
WIDENER LIBRARY
HX GSTS M


Digitized by Google

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND.

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

Dr F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1890.

DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

1890, Feb. 19 - 1891, Jan. 7.
Farrar fund.

Inhalt.

Seite

XXVI. Band. 1. Heft.

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

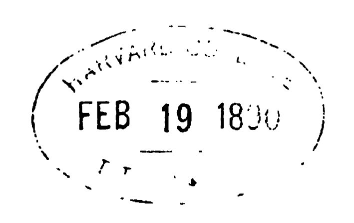
A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 1. Heftes.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1890.

DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG



Ueber den Durchgang von Elektricität durch sehr schlechte Leiter.

Von

Hugo Koller. [1])

Nach Maxwell's elektromagnetischer Lichttheorie soll bekanntlich die Diëlektricitätsconstante (D) eines vollkommenen Diëlektricums dem Quadrate seines Brechungsexponenten (n^2) für unendliche Wellenlängen gleich sein. Während sich nun diese Beziehung bei vielen Diëlektricis gut bestätigt hat, zeigen andere als ausgezeichnete Isolatoren bekannte Substanzen bedeutende Abweichungen von derselben, und zwar erscheint bis auf wenige Ausnahmen die Diëlektricitätsconstante zu gross. So findet z. B. Hopkinson [2]) für

	n^2	D
Olivenöl	2,131	3,16
Ricinusöl	2,153	4,78
Flintglas (extra dicht)	2,924	10,1.

Da Maxwell's Regel nur für vollkommene Diëlektrica gilt, welche wir in der Natur ausser unter Gasen kaum antreffen dürften, gestatten diese scheinbaren Ausnahmen von derselben noch keinen Schluss auf die Unrichtigkeit der elektromagnetischen Lichttheorie. Jedenfalls muss früher der Versuch gemacht werden, die Factoren näher kennen zu lernen, welche bei der Bestimmung von Diëlektricitätsconstanten von Einfluss sind; und zwar kommt in dieser Beziehung vor allem Leitung in Betracht. Denn, wenn wir die Capacitäten zweier gleichgeformter Condensatoren vergleichen mit zwei Diëlektricis als Zwischenmitteln, von welchen das eine etwas leitet, das andere nicht, so wird die Capacität des ersteren um die durch Leitung weggeschaffte Elektricitätsmenge zu gross erscheinen.

1) Mit einigen Aenderungen aus den Sitzungsberichten der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Bd. 98 (1889) vom Herrn Verf. mitgetheilt.

2) Hopkinson, Phil. Trans. (2) 1881. Phil. Mag. (5) 13. 1882.

Von dieser Ueberlegung ausgehend, war das Ziel meiner experimentellen Untersuchung zu prüfen, ob die Abweichungen der Diëlektricitätsconstante einiger Isolatoren von dem Quadrate des zugehörigen Brechungsexponenten in einem Verhältnisse zu ihrer Leitungsfähigkeit stünden. Es wird sich aber im Verlaufe der Versuche ergeben, dass bei Bestimmung der Diëlektricitätsconstanten von noch viel grösserer Bedeutung als die wahre Leitungsfähigkeit eine mit ihr nahe verwandte Erscheinung die Rückstandsbildung ist, deren Einfluss von Boltzmann[1]) als diëlektrische Nachwirkung bezeichnet und genauer studirt worden ist.—

Zugleich sollte die in neuerer Zeit aufgeworfene Frage beantwortet werden, inwieweit überhaupt bei Diëlektricis von einer Leitung im Sinne des Ohm'schen Gesetzes die Rede sein kann. Zwar konnte eine endgiltige Entscheidung aller dieser Fragen nicht getroffen werden, doch ergaben sich im Verlaufe der Untersuchung nicht uninteressante Beobachtungen über die Coëxistenz von diëlektrischer Verschiebung, Rückstandsbildung und Leitung. —

I.

Die in der Literatur mitgetheilten Messungen des Widerstandes von Diëlektricis sind recht spärlich. Nur Glas wurde seiner grossen, praktischen Wichtigkeit halber einer wiederholten, eingehenden Prüfung unterzogen. Über den Widerstand isolirender Flüssigkeiten liegen überhaupt keine numerischen Angaben vor, ausser in den neueren klassischen Untersuchungen Kohlrausch's und seiner Schüler, die sich aber auch nur auf Wasser, Alkohol und Aether erstrecken.[2]) —

Was die zweite Frage betrifft, ob die Leitung in Diëlektricis dem Ohm'schen Gesetze entspricht, so wurde diese von Quincke[3]) angeregt, welcher bei hohen Spannungen ein viel rascheres Anwachsen der Stromstärke beobachtete, als aus dem Ohm'schen Gesetze für die entsprechende Steigerung der elektromotorischen Kraft gefolgt wäre. Zwar konnten J. J. Thomson und H. F. Newall[4]) diese Angaben nicht bestätigen, doch wurden ihre Versuche unter ganz anderen Bedingungen und hauptsächlich mit viel geringeren Spannungen als jene Quincke's angestellt.

Eine kurze Angabe über Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze bei niederen Spannungen (unter einem Daniell) macht endlich Schulze-Berge.[5])

1) Boltzmann, Wiener Ber. (2) Bd. 70. S. 380, 1874.

2) Ueber die einschlägige Literatur s. Wied. Lehrbuch, Bd. 1. S. 565.

3) Quincke, Wied. Ann. Bd. 28. S. 529, 1880.

4) J. J. Thomson und H. F. Newall, Proc. Roy. Soc. Bd. 42, Nr. 256, S. 410, 1887.

5) Schulze-Berge, Verh. der phys. Ges. in Berlin, Bd. 14, 1, S. 90, 1885.

Alle diese Untersuchungen leiden aber an dem gemeinsamen Uebelstande, dass die Versuchsanordnungen nicht genügend variirt werden konnten, und die gewonnenen Resultate daher nur einen unvollkommenen Einblick in die Natur der zu erforschenden Phänomene gestatten. In den meisten Fällen kommt noch hinzu, dass eben bei den interessanten schlechtesten Leitern zur Erzeugung eines Ausschlages am Galvanometer oder zur Messung von Elektricitätsmengen sehr hoch gespannte Ströme benutzt werden mussten. Unter diesen Umständen sind Nebenwirkungen, wie Veränderungen der Substanz, disruptive Entladungen etc. kaum zu vermeiden und können leicht den eigentlich zu beobachtenden Vorgang ganz verdecken.

II.

Mein Bestreben war hauptsächlich darauf gerichtet, den Durchgang von Elektricität durch schlechte Leiter unter sehr mannigfachen Bedingungen, aber, um möglichst reine Resultate zu erhalten, bei Verwendung nur geringer elektromotorischer Kräfte, zu untersuchen.

In diesem Falle lassen sich auf galvanometrischem Wege nicht Resultate von genügender Genauigkeit erwarten. Bei einer anderen oft benutzten Methode: der Bestimmung der in einer gewissen Zeit durch das Diëlektricum gedrungenen Elektricitätsmenge, verzichtet man aber, abgesehen von anderen Unannehmlichkeiten, auf eine Beobachtung des Verlaufes der Erscheinungen mit der Zeit. Es war daher die Messung des Widerstandes nur durch ein Elektrometer möglich. Die bekannte Methode, welche sich stets recht gut bewährt, beruht auf folgendem Principe.

Wird eine galvanische Batterie geschlossen, so ist das in jedem einzelnen Theile des Schliessungskreises auftretende Potentialgefälle dem Widerstande desselben proportional. Bestimmt man daher das Potentialgefälle in einem Theile des Schliessungskreises von bekanntem Widerstande, so kann aus diesem und der elektromotorischen Kraft der Batterie der Widerstand berechnet werden, welcher dem Reste des Schliessungskreises entspricht.

Danach ergab sich eine Versuchsanordnung, welche Figur 1 schematisch darstellt.

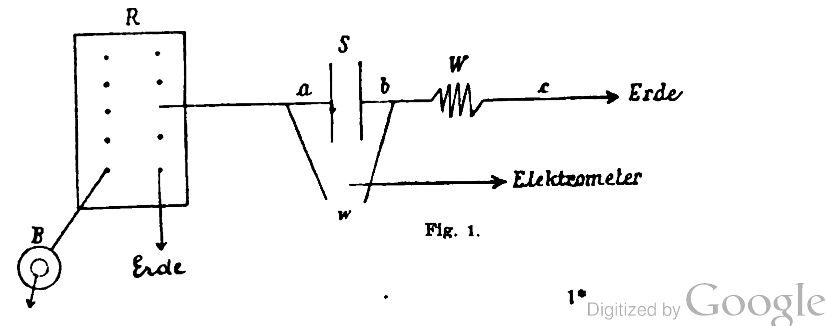


Fig. 1.

Der Kupferpol einer galvanischen Batterie (B) war direct, der Zinkpol durch einen Siemens'schen Stöpselrheostaten (R) leitend mit der Erde verbunden. Von dem Siemenskasten ging eine Zweigleitung ab, welche durch die zu untersuchende Substanz (S) und einen bekannten Vergleichswiderstand (W) auch zur Erde führte. In ihr war der Verlauf des Potentiales zu messen, und zu diesem Zwecke konnten zwei Punkte a und b vor und nach dem zu bestimmenden Widerstande abwechselnd durch eine Quecksilberwippe (w) mit dem Elektrometer verbunden werden. Bezeichnet a das dem Punkte a, b das dem Punkte b entsprechende Potential, so ist der gesuchte Widerstand gegeben durch die Formel:

$$x = \frac{a - b}{b} W,$$

wenn W den bekannten Vergleichswiderstand bezeichnet.

Das Herausziehen der Stöpsel des Siemenskastens gestattete eine bequeme, genau bestimmte Variation des in der ganzen Zweigleitung stattfindenden Potentialgefälles (a).

Obige Formel ist nur dann genau richtig, wenn der innere Widerstand der Batterie im Vergleiche zu jenem des Siemenskasten und dieser wieder im Vergleiche zu jenem der Zweigleitung zu vernachlässigen ist, was bei meinen Versuchen selbstverständlich stets der Fall war.

Als Elektricitätsquelle diente eine Batterie von 1 bis 8 sorgfältig zusammengestellten Daniell-Elementen; um übrigens von deren Constanz ganz unabhängig zu sein, wurde der einem Daniell entsprechende Elektrometerausschlag im Verlaufe einer Versuchsreihe mehrmals bestimmt.

Die zu untersuchende Flüssigkeit befand sich in einer Krystallisirschale, welche eben die Elektroden aufnehmen konnte. Letztere wurden gebildet von zwei gut polirten, vergoldeten Kupferplatten von kreisförmiger Gestalt und 3420 qmm Oberfläche. Nur bei jenen Substanzen, in welchen Wasser vermuthet werden konnte, kamen etwas kleinere, sorgfältig amalgamirte Zinkplatten in Verwendung. Die Elektroden waren durch Glasstückchen von genau bestimmter Dicke getrennt.[1])

Bei festen Körpern wird die Versuchsanordnung von Fall zu Fall beschrieben werden.

1) Bei sehr zähen Flüssigkeiten, z. B. bei Ricinusöl, legen sich oft die Glasplättchen nicht ganz an die Elektroden an, man muss, um Fehler zu vermeiden, die Elektroden gegen einander pressen, eventuell sehr geringe Elektrodendistanzen meiden. Der Widerstand der Glasstückchen war stets unendlich gross im Vergleiche zu jenem der untersuchten Flüssigkeitsschichte.

Die einzige nennenswerthe Schwierigkeit bot die Herstellung geeigneter und so grosser Widerstände, dass mit denselben selbst jener von Isolatoren vergleichbar ist, denn die Forderungen, welche an einen guten Vergleichswiderstand gestellt werden müssen, sind folgende: Dass er constant bleibe, keine Spur von Polarisation zeige und einen nicht zu grossen, bestimmbaren Temperaturcoëfficienten besitze. Diese Bedingungen liessen sich allerdings nur bis zu einer bestimmten Grenze ganz erfüllen, darüber hinaus musste ich mich mit einer möglichst guten Annäherung begnügen.

Bis 10^6 S. E. wurden Widerstände aus Zinkvitriollösung von der Concentration der besten Leitungsfähigkeit hergestellt, indem zwei mit dieser Flüssigkeit gefüllte Gefässe durch ein heberförmiges Glasrohr untereinander verbunden wurden. Als Elektroden dienten dicke, gut amalgamirte Zinkdrähte. Bis 10^8 S. E. wurden ähnliche Widerstände mit weniger concentrirter Zinkvitriollösung benutzt. Die Aenderungen mit der Temperatur wurden nach Kohlrausch's Bestimmungen in Rechnung gezogen.

Für noch grössere Widerstände fand ich nach manchen vergeblichen Versuchen eine concentrirte Lösung von Jod in Schwefelkohlenstoff am besten entsprechend. (Destillirtes Wasser, Alkohol und Äther erwiesen sich als unbrauchbar wegen nie ganz zu vermeidender Polarisation, Graphitwiderstände waren zu inconstant.) Zwei Platindrähte wurden in ein Glasröhrchen eingeschmolzen, so dass die Distanz ihrer Spitzen 0,5—10 mm betrug. Ganz besondere Sorgfalt musste dann auf die Entfernung der aussen und innen fest am Glase haftenden Feuchtigkeitsschichte verwendet werden, da sonst die Oberflächenleitung des Glases bei weitem jene der Lösung übertrifft. Zu diesem Zwecke wurde das Röhrchen mit eingeschmolzenen Platinelektroden an dem einen Ende zugeschmolzen, an dem anderen dünn ausgezogen und hier erst, nachdem das Glas durchaus auf Rothglut erhitzt worden war, rasch geschlossen. Während des Auskühlens wurde die Oberfläche, sobald es das Glas ohne zu zerspringen gestattete, vorsichtig mit Schellack bestrichen und nach vollkommener Erkaltung die Spitze des ausgezogenen Endes unter der Oberfläche der Jodlösung abgebrochen. Die Flüssigkeit stieg auf, das Röhrchen wurde nun wieder zugeschmolzen und endlich ganz in Paraffin eingebettet.

Auf diese Weise lassen sich sehr leicht Widerstände bis zu 10^{11} S. E. herstellen, ja man kann durch Verringerung der Concentration der Lösung und Vergrösserung der Elektrodendistanz fast zu beliebig hohen Werthen fortschreiten, aber die Verwendung so grosser Leitungswiderstände findet eine Grenze in der mangelhaften Isolation des Elektro-

meters und seiner Zuleitungen selbst. Es wurde z. B. im Sommer der scheinbare Widerstand des Elektrometers auf 10^{13} S. E., im Winter allerdings auf viel mehr geschätzt.

Bevor die Jodschwefelkohlenstoffwiderstände zu Messungen benutzt wurden, ruhten sie zum mindesten einen Monat aus. Dann erwiesen sie sich als recht constant und zeigten auch einen verhältnismässig nicht bedeutenden Temperaturcoëfficienten, immerhin mussten sie bei jedesmaligem Gebrauche mit den ganz verlässlichen Zinkvitriolwiderständen verglichen werden. Aber zwei unerwartete Uebelstände machten sich bemerkbar. Ihr Widerstand schien, erstens nach langer Durchströmung bis um 8% zuzunehmen, und zweitens sich mit dem Potentialgefälle des durchfliessenden Stromes zu vergrössern. Beide Unregelmässigkeiten sind wahrscheinlich durch das Lösungsmittel bedingt, indem wir im Verlaufe der Untersuchungen denselben Erscheinungen bei allen Diëlektricis begegnen werden. [1]) Die folgende Tabelle I zeigt die Aenderungen des kleinsten Jodschwefelkohlenstoffwiderstandes mit der elektromotorischen Kraft (E) des durchfliessenden Stromes.

Tabelle I.

$t = 24^\circ$ C.

E.	W.
½ Dan.	$172{,}10^7$ S. E.
1 „	$172{,}10^7$ „ „
2 „	$174{,}10^7$ „ „
4 „	$178{,}10^7$ „ „
8 „	$182{,}10^7$ „ „

Der Widerstand bei 8 Daniell übertrifft um 5,5% seines Werthes jenen bei einem Daniell. Für elektromotorische Kräfte unter einem Daniell ergaben sich indes stets gleiche Werthe und, da in den Versuchen das Gefälle im Vergleichswiderstande nie diese Grenze erreichte, können diese Unregelmässigkeiten keinen Einfluss auf die Resultate ausüben. Der Umstand, dass der zum Vergleiche benutzte Widerstand mit der Durchströmungsdauer zunimmt, hat nur zur Folge, dass alle später zu beschreibenden Abweichungen von Ohm's Gesetze kleiner erscheinen als sie thatsächlich sind.

Übrigens wurden die Jodschwefelkohlenstoffwiderstände nur selten gebraucht.

Als grösste Widerstände kamen schliesslich solche aus reinem Schwefelkohlenstoffe zur Verwendung; dann konnte es sich aber nur darum handeln, mit ihrer Hilfe überhaupt noch eine Spur von Leitungen

---

1) Reine Jodwiderstände sind hingegen unbrauchbar, weil die Krystallisation des Jodes sehr viel Zeit in Anspruch nimmt und während derselben sich sein Widerstand stets ändert.

zu entdecken, denn bei reinem Schwefelkohlenstoffe steigern sich die erwähnten Unregelmässigkeiten so bedeutend, dass er als Vergleichswiderstand zu quantitativen Messungen ganz unbrauchbar ist.

Auf diese Weise wurde ein Rheostat hergestellt, welcher von 10^4 bis über 10^{11} S. E. reichte, so zwar, dass im Mittel das Verhältnis je zweier aufeinander folgender Widerstände 1:5 betrug. Die Calibrirung desselben geschah eben nach der beschriebenen Methode, indem von einem Siemens'schen Metallrheostaten ausgehend, zu immer grösseren Widerständen vorgeschritten wurde.

Als Messapparat diente ein Thomson'sches Quadrantelektrometer nach dem vereinfachten Modelle des Professors v. Lang in gewöhnlicher Schaltung. Die Lemniscate wurde durch eine Zamboni'sche Säule geladen. Die Ablesung erfolgte mittels Spiegel und Fernrohr, das in einer Distanz von 4 m aufgestellt war. Den verschiedenen Anforderungen entsprechend, wurde auch dem Elektrometer verschiedene Empfindlichkeit gegeben. Sie variirte von 80 bis 400 Theilstrichen für ein Daniell. Die Ausschläge waren den Potentialen zwar nicht vollkommen proportional, konnten aber leicht durch ein quadratisches Correctionsglied proportional gemacht werden. Da die Genauigkeit in diesem Punkte von der grössten Wichtigkeit für die folgenden Untersuchungen ist, führe ich zwei Messungsreihen genau bekannter Potentiale bei verschiedener Empfindlichkeit des Elektrometers an. Die erste Colonne gibt durch den Stöpselrheostaten variirte Potentiale E, die zweite den beobachteten Ausschlag l, die dritte den Quotienten $\frac{l'}{E}$ an, wenn l' den nach der beigefügten Formel corrigirten Ausschlag bedeutet.

Tabelle II.

E	l	$\frac{l'}{E}$	E	l	$\frac{l'}{E}$
$\frac{1}{8}$ D.	20	160	$\frac{1}{8}$ D.	34	272
$\frac{1}{4}$ „	39,8	160	$\frac{1}{4}$ „	67,5	272
$\frac{1}{2}$ „	79,2	160	$\frac{1}{2}$ „	133,8	271,6
1 „	156,8	160	1 „	264,8	272,1
$l' = l + \frac{1}{8000} l^2$			$l' = l + \frac{1}{9000} l^2$		

Man sieht, dass die Unproportionalität selbst bei den gröfsten Ausschlägen nicht 3% erreicht und durch die Formel vollkommen corrigirt wird.

Zum Schutze gegen Luft und Wärmeströmungen war das Elektrometer ganz von einem Pappgehäuse umgeben, und selbst der Zuleitungsdraht wurde, um sie von der äusseren Luft abzuschliessen, durch eine Reihe mittels Kautschukschläuchen verbundener Glasröhren geführt,

welche einen wirksamen Schutz gegen elektrischen Staub boten. Einen kleinen Uebelstand brachte diese Anordnung allerdings durch Vergrösserung der Capacität des Messapparates mit sich.

Die Ausführung der Versuche gestaltet sich nun folgendermaassen: Nach Bestimmung des Nullpunktes und des einem Daniell entsprechenden Ausschlages wurde der Punkt *b* mit dem Elektrometer verbunden und das Potential desselben bei durch den Stöpselrheostaten verändertem Gefälle in der Zweigleitung bestimmt, stets von niederen zu höheren elektromotorischen Kräften vorschreitend. Es ist sehr wichtig, eben diese Reihenfolge einzuhalten, da jeder Strom ein unvollkommenes Diëlektricum verändert, so dass nur bei noch nie, oder annähernd, bei nur von Strömen geringeren Gefälles durchflossenen Substanzen reine Resultate zu erwarten sind. Leider ist es aber unmöglich, diese Regel immer, auch für die Messungen nach langer Durchströmungsdauer einzuhalten. Dieselbe Messungsreihe wurde für jede Elektrodendistanz durchgeführt, auch hier von kleineren zu grösseren fortschreitend, indem stets von Zeit zu Zeit der einem Daniell entsprechende Ausschlag wieder bestimmt wurde.

Mehrere Fehlerquellen können erst im Verlaufe der Versuche besprochen werden, da sie enge mit der Theorie der unvollkommenen Diëlektrica verknüpft sind, hier will ich nur auf eine aufmerksam machen.

Das wahre Verhältniss der Potentialgefälle in den beiden, der Zweigleitung eingeschalteten Widerstände kann nur dann aus den in den Punkten *a* und *b* beobachteten Potentialen berechnet werden, wenn im Verlaufe der Zweigleitung keine andere als die elektromotorische Kraft der galvanischen Batterie wirksam ist. Diese Bedingung lässt sich aber sehr selten erfüllen, da selbst die sorgfältigst gleich hergestellten Elektroden oft noch mit dem Diëlektricum ein schwaches Element geben. Ja auch die Zinkvitriolwiderstände erwiesen sich als sehr constante Elemente von 0, 005 bis 0, 01 Daniell elektromotorischer Kraft, wahrscheinlich in Folge des Angriffes, welchen das Zink durch im Wasser occludirten Sauerstoff erfährt; nur die Jodschwefelkohlenstoffwiderstände zeigten nie eine Potentialdifferenz ihrer Elektroden.

Verzeichnen wir daher nach der Abscissenachse die Widerstände, in welchen das Potentialgefälle stattfindet, nach den Ordinaten die Potentiale selbst, so wird der wahre Verlauf des Potentialgefälles in der Zweigleitung nicht, wie man erwarten sollte, durch Fig. 2, sondern durch Fig. 3 (a oder b, je nach der Richtung des neu auftretenden Potentialsprunges) dargestellt werden.[1])

1) Das Diagramm ist nur ein schematisches, da ja in Wirklichkeit viel mehr Potentialsprünge stattfinden, doch genügt es wohl zur Veranschaulichung des auftretenden Fehlers.

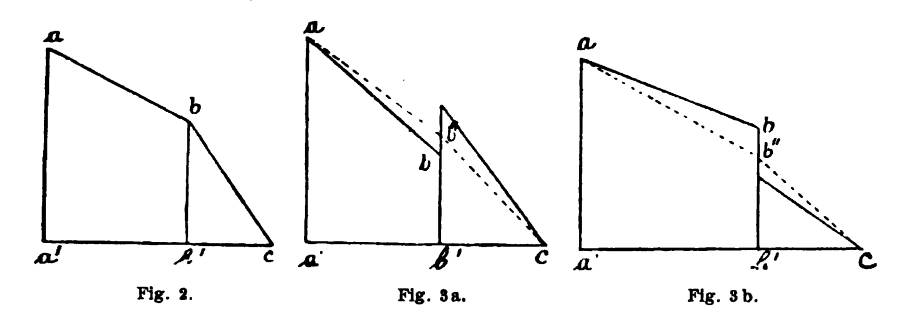


Fig. 2. Fig. 3a. Fig. 3b.

Das am Elektrometer abgelesene Potential des Punktes a entspricht der Strecke aa', jenes des Punktes b der Strecke bb'. Diese ist um die Grösse bb'' von dem wahren, d. i. jenem Werthe verschieden, welchen der Punkt b ohne die im Verlaufe der Zweigleitung hinzutretenden elektromotorischen Kräfte annehmen würde. Für diese Grösse bb'' ist eine Correction anzubringen, welche leicht auf folgende Weise bestimmt werden kann:

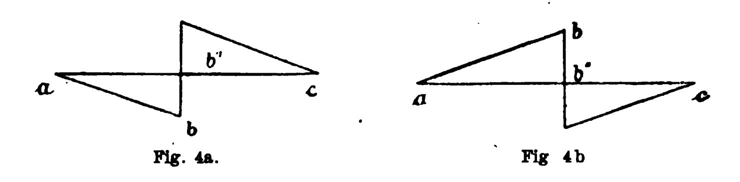


Fig. 4a. Fig 4b

Verfolgen wir den Ausgleich jener Potentialsprünge allein, welche in der Zweigleitung selbst entstehen, ohne dass sie ein fremder Strom durchfliesst, so wird sich derselbe, wie Fig. 4 zeigt, darstellen. Die Punkte a und c werden das Potential der Erde annehmen, der Punkt b hingegen um die Grösse bb'' von demselben abweichen. Da sich nun bei Durchströmung der Zweigleitung die Potentiale des Punktes b einfach superponiren, so wird auch in diesem Falle das beobachtete Potentiale des Punktes b, d. i. bb' um dieselbe Grösse bb'' von dem wahren Werthe abweichen. Es genügt daher eine einmalige Bestimmung der Grösse bb'', d. i. das Potential des Punktes b, wenn kein Strom die Zweigleitung durchfliesst. Nur ist darauf zu achten, dass überhaupt noch kein Strom das Diëlektricum passirt hat, da die nach einer Durchströmung zu Tage tretenden Rückstände keine genaue Bestimmung so kleiner Grössen mehr gestatten.

An und für sich ist diese Correction meist unbedeutend (nur in einem Falle erreichte sie 12 Theilstriche), doch würde ihre Nichtbeachtung bei variablen Potentialgefällen in der Zweigleitung einen constanten Fehler bedingen, welcher selbst bei ganz normal leitenden Körpern Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze vortäuschen würde.

III.

Die Untersuchung erstreckte sich auf folgende Substanzen:

1. Petroleumäther, Terpentinöl.
2. Leinöl (kalt und warm gepresst), Ricinusöl, Olivenöl, Mandelöl.
3. Benzol, Toluol, Xylol.
4. Schwefelkohlenstoff, Vaselinöl.
5. Wasser, Alkohol, Aether.
6. Schwer und leicht schmelzbares Glas.
7. Guttapercha, Paraffinpapier, Ebonit, Hartgummi.

Die untersuchten unvollkommenen Diëlektrica sind meist schlecht definirte, in ihrer chemischen Zusammensetzung sehr variable Körper, so dass den erhaltenen absoluten Werthen nur eine beschränkte Bedeutung beizulegen ist. Ich suchte diese Unsicherheit zum Theile durch Messung mehrerer, zu verschiedenen Zeiten gekaufter Proben zu beheben. Hierbei stimmten die Resultate für die Oele ziemlich gut überein, während sie für noch bessere Isolatoren in weiten Grenzen variirten. Am ungleichmässigsten erwiesen sich, wie zu erwarten, die Destillationsproducte des Petroleums, selbst das so häufig gebrauchte Vaselinöl leitete manchmal verhältnismässig gut, während es gewöhnlich zu den besten flüssigen Isolatoren zu zählen ist. Stets ganz verlässlich isolirte nur Benzol.

Bei den schlechtesten Leitern ergab schon eine oberflächliche Beobachtung bedeutende Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze: Der scheinbar specifische Widerstand nimmt mit der Durchströmungsdauer zu und ändert sich sowohl mit der elektromotorischen Kraft des durchgeleiteten Stromes als auch mit der Dicke der durchflossenen diëlektrischen Schichte. Eine genauere Prüfung ergab ferner, dass diese Erscheinungen sich bei allen unvollkommenen Diëlektricis verfolgen lassen, nur in verschiedenem Grade und Charakter je nach der Substanz.

In dem folgenden Abschnitte sollen die bei der Durchströmung von Petroleumäther und Terpentinöl erhaltenen Resultate discutirt werden. Beide Diëlektrica zeigen auffallende Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze, nehmen aber in Bezug auf die Art derselben gerade extreme Stellungen ein.

Die Beobachtungen sind in der Weise in Tabellen zusammengestellt, dass die erste Verticalreihe das gesammte Potentialgefälle der Zweigleitung (E) in Daniells angibt, die folgenden das dem Vergleichswiderstande entsprechende Potentialgefälle in Scalentheilen des Elektrometerausschlages. Wäre der zu untersuchende Körper ein vollkommener Leiter, so würde aus einer leichten Ueberlegung folgen, dass diese Grösse bei gleichbleibendem Vergleichswiderstande der Stromstärke

proportional ist. Nun verliert aber für unvollkommene Diëlektrica das Ohm'sche Gesetz seine Giltigkeit, wir können daher nicht mehr von Strömen im gewöhnlichen Sinne sprechen, dessenungeachtet soll in dem folgenden dieser Ausdruck gebraucht werden, um die irgendwie beschaffenen, aber Strömen äquivalenten Vorgänge in dem Diëlektricum zu bezeichnen, in demselben Sinne, wie man ja auch diëlektrische Verschiebung als einem Strome äquivalent annimmt. Das Diëlektricum soll wie ein vollkommener Leiter von variablem Widerstande aufgefasst werden und dem entsprechend die scheinbare Stromstärke mit i bezeichnet werden. (In Fig. 3 würde E der Strecke aa', i der Strecke bb' entsprechen.) Ferner wurde der Quotient $\frac{i}{E}$ berechnet, welcher dem reciproken Werthe des jeweiligen scheinbaren Widerstandes der ganzen Zweigleitung proportional ist. Er gewährt den leichtesten Ueberblick der Veränderungen der scheinbaren Leitungsfähigkeit des Diëlektricums, da dieses ja den einzigen variablen Bestandtheil der Zweigleitung bildet.

Zur Abkürzung sei:

d. = Elektrodendistanz.
W. = Vergleichswiderstand.
D. = Daniell.
Th. = Theilstrich.
T. = Durchströmungsdauer.

Wenn nicht ausdrücklich bemerkt, wurden als Elektroden die vergoldeten Kupferplatten benützt.

Alle mitgetheilten Beobachtungen sind schon corrigirt.

1. Petroleumäther.

Der Siedepunkt der untersuchten Probe lag bei 68° C.

A. d. = 0,15 mm

Tabelle III.

W. = 179 · 10⁷ S. E. D. = 330 Th. t = 22°.

E	i	$\frac{i}{E}$
⅛ Dan.	14 (?)	112
¼ „	10	40
½ „	11	22
1 „	12	12
2 „	15,2	7,6
4 „	20	5
8 „	24,6	3,1

W. = 1181 · 10⁷ S. E. E = 8 D.

T	i
1 m	127 Th.
60 „	110 „

B. d = 1,135 mm

Tabelle IV.

W. = 1181 · 10⁷ S. E. D. = 330 Th. t = 22°.

E	i	$\frac{i}{E}$
1	46	46
2	58	29
4	78	19,5
8	97	12,1

$T = 60$ m

E	i	$\frac{i}{E}$
1	22	22
2	32	16
4	45	11,25
8	62	7,7

C. d. = 7·49 mm.

Tabelle V.

W. = 1181 · 10^7 S. E.
D. = 330 Th. t = 22°.

E	*i*	$\frac{i}{E}$
1	23	23
2	38	19
4	66	16,5
8	103	12,8

Tabelle VI.

W. = 236 · 10^8 S. E. t = 22°.
D. = 330 Th. *E* = 8 D.

T	*i*
1 m	179
8 „	151
18 „	129
30 „	119
35 „	115
60 „	100
600 „	49

Tabelle VII.

Absoluter Widerstand des Petroleumäthercondensators.

E	¼	1	8	8
T.	1 m	1 m	1 m	lang [1])
d.				
0,15 mm	130 · 10^8 S. E.	474 · 10^8	1888 · 10^8	2398 · 10^8
1,135 „		729 · 10^8	3106 · 10^8	4913 · 10^8
7,49 „		1580 · 10^8	3070 · 10^8	12750 · 10^8

Tabelle VIII.

Aus Tabelle VII sich ergebende scheinbare specifische Widerstände des Petroleumäthers.

E	¼	1	8	8
T.	1 m	1 m	1 m	lang
d.				
0,15 mm	296 · 10^{15} S. E.	1081 · 10^{15}	4304 · 10^{15}	5465 · 10^{15}
1,135 „		220 · 10^{15}	935 · 10^{15}	1479 · 10^{15}
7,49 „		72,1 · 10^{15}	141 · 10^{15}	582 · 10^{15}

1) Die Zahlen gelten für die längste in den vorigen Tabellen angegebene Durchströmungsdauer.

Aehnliches Verhalten zeigen alle Destillationsproducte des Petroleums.

Rectificirtes Petroleum:

d. = 0,875 mm E = 1 D.
t. = 24,4° T. = 15 m
Sp. W. = $288{,}10^{15}$ S. E.

Käufliches Petroleum:

d. = 0,875 mm E = 1 D.
t. = 22° T. = 2 m
S. W. $188{,}10^{14}$ S. E.

2. Terpentinöl.

Die zu den folgenden Versuchen benutzten Proben waren käufliches, rectificirtes Terpentinöl, wie es unter dem Namen „Terpentingeist" in den Handel kommt. Die Proben sind sehr ungleich. Weitaus am deutlichsten zeigte die erste die für ein unvollkommenes Diëlektricum charakteristischen Eigenschaften.

1. Probe.

A. d. = 0,15 mm.

Tabelle IX.

W. = $179 \cdot 10^7$ S. E. t. = 24°
D. = 330 Th.

E	i	$\frac{i}{E}$
$\frac{1}{8}$	28	224
$\frac{1}{4}$	56	224
$\frac{1}{2}$	109	218
1	212	212

Tabelle X.[1]

W. = $1022 \cdot 10^6$ S. E. t. = 24°
D. = 330 Th.

E	i	$\frac{i}{E}$
1	22	22
2	36	18
4	62	15,5

W. = $179{,}10^7$ S. E. E = 1 D.
D. = 330 Th. t. = 24°.

T.	i
1½ m	212
3 „	207
6 „	198

B. d. = 1,135 mm.

W. = $1022 \cdot 10^6$ S. E. D. = 305 Th. t. = 24°.

Tabelle XIa.

T.	1½m	1h	2h	4h
E	i	i	i	i
1	40	8	6,4	5,4
2	72	14	11,6	10
4	116	24	20	17
8	172	46	37,4	32

Tabelle XIb.

T.	1½m	4h
E	$\frac{i}{E}$	$\frac{i}{E}$
1	40	5,4
2	36	5
4	29	4,25
8	21,5	4

1) Ich mache darauf aufmerksam, dass wegen der Aenderung des Vergleichswiderstandes Tabelle X keine directe Fortsetzung von Tabelle IX ist, denn von dem gleichen Potentialgefälle in der Zweigleitung (= 1 Dan.) kommt im ersten Falle nur ein Drittel, im zweiten fast das ganze auf den Terpentinölcondensator.

C. d. = 7,49 mm.

W. = 1022 · 10^6 S. E. für T. = 1½^m bis 3^h 15^m
W. = 179 · 10^7 S. E. für T. = 3^h 25^m bis 4^h 30^m
D. = 330 Th. t. = 24°

Tabelle XIIa.

T.	1½^m	1^h	3^h 15^m	3^h 25^m	4^h	4^h 30^m
E	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*
1	49,9	—	—	—	20	15
2	99,7	—	—	—	38,2	27,5
4	196,8	14,5	6,5	82	67,4	52,4
8	388,4	28	13	153,5	124,5	101

Tabelle XIIb.

T.	1½^m	4^h 30^m
E	$\frac{i}{E}$	$\frac{i}{E}$
1	49,9	15
2	49,8	13,8
4	49,2	13,1
8	48,6	12,6

Tabelle XIII.

E = 1 D. t. = 24°

d.	Absoluter Widerstand des Terpentinölcondensators		Specifischer Widerstand des Terpentinöles	
	T = 1½^m	T = 1 lang	T = 1½^m	T = lang
0,15 mm	91 · 10^7 S. E.	120 · 10^7	228, 10^{14}	273 · 10^{14}
1,135	67,7 · 10^7	581 · 10^7	20,5 · 10^{14}	176 · 10^{14}
7,49	51,8 · 10^7	3460 · 10^7	2,37 · 10^{14}	158 · 10^{14}

2. Probe.

Zinkelektroden.

d. = 0,885 mm W. = 145 · 10^8 S. E. T. = 2^m t. = 17°

E	*i*	$\frac{i}{E}$	Sp. W.
1	19	19	851 · 10^{14} S. E.
2	37,5	18,7	890 · 10^{14} „ „
3	54	18	935 · 10^{14} „ „
4	70,4	17,6	952 · 10^{14} „ „
5	85,6	17,1	1008 · 10^{14} „ „

3. Probe.

E = 2 D. d. = 0,145 mm W. = 179,10^7 S. E. T. = 1^h t. = 22°
Sp. W. = 158,10^{15}

IV.

Zur leichteren Uebersicht will ich die gewonnenen Resultate in drei Gruppen eintheilen.

1. Aenderungen des scheinbaren specifischen Widerstandes des Diëlektricums mit der Durchströmungsdauer.

2. Aenderungen des scheinbaren specifischen Widerstandes mit der elektromotorischen Kraft des durchfliessenden Stromes.

3. Aenderungen des scheinbaren specifischen Widerstandes mit der Dicke der durchströmten diëlektrischen Schichte.

I. Aenderungen des scheinbaren specifischen Widerstandes des Diëlektricums mit der Durchströmungsdauer.

Es ist eine lange bekannte und oft bestätigte Thatsache, dass der beobachtete Widerstand eines Diëlektricums keine constante Grösse ist, sondern von der Zeit abhängt, während welcher der Strom das Diëlektricum schon passirt hat, und zwar nimmt der Widerstand mit der Durchströmungsdauer zu und dem entsprechend die Intensität des von ein und derselben elektromotorischen Kraft erzeugten Stromes ab. Diese Stromstärkenabnahme zeigt einen charakteristischen Verlauf, indem stets der grösste Theil der Veränderungen auf die ersten Secunden der Durchströmung entfällt.

In dem Augenblicke, da ein unvollkommenes Diëlektricum den Kreis einer Batterie schliesst, entsendet diese einen starken Stromstoss, dessen Intensität aber so rasch abnimmt, dass der ihr entsprechende Elektrometerausschlag in wenigen Secunden oft unter ein Fünftel seines ersten Werthes sinkt. Die wahren Aenderungen der Stromstärke sind noch viel bedeutender und rascher, können aber von der Elektrometernadel wegen ihrer Trägheit nicht wiedergegeben werden. Dieselbe Erscheinung tritt bei jeder Vergrösserung der elektromotorischen Kraft des durchfliessenden Stromes auf.

Die Integralsumme $\int_0^t i dt$ der unmittelbar nach Schluss der Batterie auftretenden sehr veränderlichen Ströme will ich im folgenden als Schliessungsstrom bezeichnen. Es soll damit keine physikalische Grösse definirt werden, sondern nur ein Ausdruck gegeben sein für die Summe jener Ströme, welche wegen ihrer raschen Veränderlichkeit numerisch nicht mehr messbar sind, aber doch ganz wohl geschätzt werden können. Die ihnen entsprechenden Werthe sind in den vorstehenden Tabellen nicht aufgenommen, sondern es wird später nur im allgemeinen von der Stärke des Schliessungsstromes die Rede sein, worunter die von demselben bewegte Elektricitätsmenge zu verstehen ist. Die Periode des Schliessungsstromes wird vom Momente des Stromschlusses bis zur ersten mitgetheilten Beobachtung gerechnet. Die in ihr auftretenden Stromintensitäten sind stets noch grösser als jene, welche die Tabellen anzeigen, aber nur ihr Maximum kann man näherungsweise schätzen. Es wird nämlich später bemerkt werden, dass der scheinbare Widerstand der untersuchten Diëlektrica im ersten

Momente verschwindend klein ist im Vergleiche zu jenem des bekannten eingeschalteten Widerstandes, so dass die in diesem Zeitpunkte auftretende Stromstärke (i) in dem gewählten freien Maasse durch jenen Elektrometerausschlag dargestellt werden müsste, welcher dem vollen Potentiale in der Zweigleitung entspricht, d. h. in den Tabellen III, IV, V durch 330 mal der Anzahl von Daniell-Elementen. Von diesem Werthe sinkt die Stromstärke während der Dauer des Schliessungsstromes auf den ersten mitgetheilten Werth herab; z. B. in Tabelle IV

von 330 auf 46
von 2330 auf 58
von 3330 auf 78 etc.[1])

Nach Ablauf des Schliessungsstromes hat die bleibende Stromintensität noch keinen constanten Werth erreicht, sondern nimmt oft Stunden hindurch weiter ab, anfangs schneller, später langsamer, bis sie sich endlich einer bestimmten Grenze nähert. Wir haben hier ganz dieselben Erscheinungen vor uns, wie sie englische Physiker für den Verlauf von Strömen durch Kabelisolirungen beschrieben haben.

Der Uebergang des Schliessungsstromes in diesen Zustand langsamer Abnahme der Stromstärke mit der Zeit erfolgt nie ganz schroff, sondern mehr weniger allmählich. Der Unterschied der beiden Zustände ist nur graduell und beruht auf der Raschheit der Veränderungen mit der Zeit. Er verschwindet umsomehr, je kleiner die Potentialdifferenz und je grösser die Distanz der Elektrodenplatten ist; d. h. je weniger die im Condensator herrschende diëlektrische Spannung beträgt. Für extreme Fälle kann man die Resultate dahin zusammenfassen, dass die Veränderungen der Stromstärke mit der Zeit bei grosser Spannung hauptsächlich unmittelbar nach Stromschluss und nur zu geringem Theile in der folgenden Periode stattfinden, hingegen bei niederer Spannung gleichmässig vertheilt sich auf ein grösseres Zeitintervall erstrecken.

Verfolgen wir diese Erscheinungen an den als Beispiele gewählten Diëlektricis:

Bildet Petroleum das Diëlektricum des durchströmten Condensators, so war der Schliessungsstrom sehr stark, und der Uebergang desselben in den Zustand allmählicher Abnahme der Stromstärke erfolgte am unvermitteltsten von allen untersuchten flüssigen Diëlektricis. Eine Minute nach Stromschluss, zu welcher Zeit die mitgetheilten Beobachtungen

1) Die Grösse, um welche die Stromstärke während des Schliessungsstromes absinkt, hängt wesentlich von der Grösse des Vergleichswiderstandes ab. Sie liefert daher durchaus kein Maass für die durch den Schliessungsstrom bewegte Elektricitätsmenge, diese wird vielmehr durch die zeitliche Vertheilung der Stromintensitäten in der ersten Periode bestimmt.

beginnen, betrugen die Veränderungen des Ausschlages kaum einen Theilstrich in der Minute, und man musste längere Zeit warten, um eine merkliche Abnahme der Stromstärke mit der Zeit constatiren zu können Sie betrug in einer Stunde für Condensatordicken von 0,15, 1,135, 7,49 mm, respective 21, 36, 44 % (Tab. III, IV, VI). Man sieht, die in dieser späteren Periode erfolgte Abnahme der Stromstärke wächst mit der Condensatordicke, während die Intensität des entsprechenden Schliessungsstromes kleiner wird. Es war eben diese Beobachtung, welche zur Aufstellung obiger Behauptung führte, dass, je grösser die diëlektrische Spannung im Condensator ist, ein desto grösserer Theil der Abnahme der Stromintensität mit der Zeit auf die ersten Augenblicke nach Stromschluss, ein desto kleinerer auf die folgende Periode entfällt.

Die Untersuchung von Terpentinöl ergab bei gleicher Condensatordicke schwächere Schliessungsströme als Petroleumäther, die Veränderungen der Stromstärke in späteren Perioden erreichen aber einen viel grösseren Betrag, so dass das Verhalten des Terpentinöls bei grossen Spannungen vergleichbar ist mit jenem des Petroleumäthers bei kleinen Spannungen, wie man sie etwa durch weitere Vergrösserung der Elektrodendistanz hätte herbeiführen können. In diesem Sinne lassen sich die Beobachtungen an Terpentinöl wie eine Fortsetzung jener an Petroleumäther auffassen.

Die ersten Ablesungen wurden bei Terpentinöl erst $1\frac{1}{2}^m$ nach Stromschluss vorgenommen, in welcher Zeit die Abnahme des Elektrometerausschlages in 5' keinen ganzen Theilstrich mehr betrug.

Bei einer Elektrodendistanz von 1,15 mm war nach einer Stunde die Stromstärke auf $^1/_4$ ihres Werthes nach $1\frac{1}{2}^m$ (von 172 auf 46 Th. Tab. XIa), bei 7,49 mm sogar auf $^1/_{14}$ gesunken (von 388,4 auf 28 Th. Tab. XIIa). Doch während die ferneren Veränderungen mit der Zeit im ersten Falle nicht gross waren, erfolgte im zweiten innerhalb $3\frac{1}{2}^h$ eine weitere so bedeutende Abnahme der Stromstärke, dass dieselbe nur $^1/_{66}$ jener nach $1\frac{1}{2}^m$ betrug. Ja, berücksichtigen wir die noch auf die letzte halbe Stunde entfallende Veränderung von 23 Theilstrichen, so können wir selbst diese Stromstärke nicht für die zu erreichende untere Grenze ansehen.

2. Aenderungen des scheinbaren specifischen Widerstandes mit der elektromotorischen Kraft.

Der zweite Punkt, in welchem sich unvollkommene Diëlektrica von wahren Leitern unterscheiden, besteht darin, dass der scheinbare specifische Widerstand von der elektromotorischen Kraft des durch-

fliessenden Stromes abhängt. Die Stromstärke nimmt langsamer zu als die sie erzeugende elektromotorische Kraft.

Die durch dieses Verhalten bedingten Abweichungen vom Ohm-schen Gesetze sind am leichtesten in jenen Tabellen zu überblicken, welche den Verlauf des Quotienten $\frac{i}{E}$ angeben. Man sieht, diese Abweichungen sind bei Petroleumäther sehr bedeutend, nehmen aber mit der Elektrodendistauz ab. Für Terpentinöl sind sie viel geringer, bei kleinster Elektrodendistanz erreichen sie jene des Petroleumäthers für grösste Condensatordicke, nehmen aber ebenfalls mit fortschreitender Condensatordicke ab. Hat diese endlich 7,49 mm erreicht, so scheint das Ohm'sche Gesetz wenigstens unmittelbar nach Stromschluss nahezu befolgt.

Ordnet man die Tabellen nach der Grösse der Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze, so bilden auch in dieser Beziehung die Beobachtungen an Terpentinöl gleichsam eine Fortsetzung jener an Petroleumäther.

Dass Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze auftreten müssen, folgt schon aus der im vorigen Abschnitte besprochenen Thatsache, dass der Charakter des zeitlichen Verlaufes von Strömen in einem unvollkommenen Diëlektricum von der elektromotorischen Kraft derselben abhängt. Ja, aus den geschilderten Stromstärkenänderungen im Condensator bei verschiedenen diëlektrischen Spannungen könnte man alle Abweichungen vorausbestimmen. Es würde sich ergeben, dass ein Maximum der Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze existiren muss, welches für grosse Spannungen sehr bald nach Stromschluss eintritt, für geringe zeitlich immer weiter hinausrückt.

Ein Beweis dieser Behauptung durch genaue Bestimmung der verschiedenen elektromotorischen Kräften zukommenden Stromstärken unter ganz gleichen Bedingungen stösst aber auf grosse experimentelle Schwierigkeiten, da, wie erwähnt, der scheinbare Widerstand des Diëlektricums mit der Durchströmungsdauer zunimmt: Die erste Beobachtung wurde in der Weise angestellt, dass die Stromstärke bei niederster elektromotorischer Kraft bestimmte Zeit nach Stromschluss gemessen wurde. Ging man aber nun zu höheren elektromotorischen Kräften über, so trafen diese eine schon von schwächeren Strömen veränderte Substanz an, so dass genau gleiche Bedingungen für die Versuche bei verschiedenen elektromotorischen Kräften selbst in der ersten Beobachtungsreihe nicht hergestellt werden können.

Desgleichen sind die Stromstärkenbestimmungen nach langer Durchströmungsdauer nicht ganz zuverlässig, und zwar aus folgendem Grunde: Der Condensator blieb, vom stärksten Strome durchflossen stehen, und

nach längerer Zeit wurde die der grössten elektromotorischen Kraft entsprechende Stromstärke beobachtet. Diese Bestimmung ist einwurfsfrei, aber die darauf folgenden bei niederen elektromotorischen Kräften können durch Rückstände getrübt werden, welche einem dem primären entgegengesetzten Strome nach Art eines Polarisationsstromes äquivalent sind und daher die scheinbare Stromstärke verringern, wie dies noch genauer besprochen werden wird. Um daraus entspringende gröbere Fehler zu vermeiden, wurde allerdings mit der Beobachtung einige Zeit nach Verringerung der Potentialdifferenz der Condensatorplatten gewartet, bis der grösste Theil des wieder zu Tage tretenden Rückstandes fortgeschafft war, doch lässt sich nie volle Sicherheit gewinnen, dass dieser Zustand bereits eingetreten sei.

Aus diesen Gründen ist ein Vergleich der Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze, wie sie nach verschiedener Durchströmungsdauer auftreten, sehr unsicher, und es fehlte nicht an einander widersprechenden Beobachtungsreihen. Immerhin ergab sich aus einer grossen Reihe von Messungen, dass für Petroleumäther die Abweichungen vom Ohmschen Gesetze nach langer Durchströmungsdauer kleiner waren als unmittelbar nach Stromschluss. (Tab. IV.) Dasselbe Resultat wurde für Terpentinöl bei mittlerer Elektrodendistanz erhalten, (Tab. XIb) betrug diese jedoch 7,49 mm, so war eine deutliche Zunahme der Abweichungen mit der Durchströmungsdauer bemerkbar. (Tab. XIIb.)

3. Aenderungen des scheinbaren specifischen Widerstandes mit der Elektrodendistanz.

Unter sonst gleichen Bedingungen scheint der specifische Widerstand eines Diëlektricums um so kleiner, je grösser die Elektrodendistanz ist. Die Veränderungen sind so auffallend, dass bei Vergrösserung der Elektrodendendistanz der scheinbare absolute Widerstand des Condensators oft nicht wächst, sondern abnimmt. So scheint z. B. bei Terpentinöl der Widerstand des Condensators kurz nach Stromschluss um so kleiner, je weiter die Elektroden von einander entfernt sind. (Tab. XIII.) Dieses Verhalten schliesst jede Erklärung durch Uebergangswiderstände und verwandte Vorgänge aus, doch lassen sich diese Erscheinungen mit den im vorigen Abschnitte beschriebenen in Verbindung bringen, wenn man die Veränderung der Potentialdifferenz und der Elektrodendistanz von einem gemeinsamen Gesichtspunkte aus betrachtet, d. h. von dem Begriffe der diëlektrischen Spannung ausgeht.

Wir haben gesehen, dass der scheinbare Widerstand mit der Spannung im Condensator zunimmt. Eine Abnahme der Spannung kann nun sowohl durch Verkleinerung der Potentialdifferenz der Con-

densatorplatten als auch durch Vergrösserung ihrer Distanz erreicht werden. Wir haben daher bei Vergrösserung der Distanz der Condensatorplatten aber gleichbleibender Potentialdifferenz dieselben Resultate zu erwarten, welche bei gleichbleibender Elektrodendistanz durch eine Verringerung der Potentialdifferenz herbeigeführt worden wäre, denn beiden Vorgängen entspricht eine Verkleinerung der im Diëlektricum herrschenden Spannung; in beiden Fällen wird daher der scheinbare specifische Widerstand abnehmen.

Zur Erklärung der bedeutenden scheinbaren Widerstandsänderungen besonders bei Terpentinöl reicht aber dieser Grund nicht aus. Wir werden später bei Besprechung der Ursachen der Widerstandszunahme mit der Zeit einen weitren wichtigen Factor kennen lernen.

Da, wie im ersten Abschnitte hervorgehoben wurde, die Zunahme des scheinbaren specifischen Widerstandes mit der Zeit um so bedeutender und andauernder ist, je weniger die diëlektrische Spannung beträgt, so gleichen sich auch die grossen Unterschiede des scheinbaren specifischen Widerstandes bei verschiedenen Elektrodendistanzen nach langer Durchströmungsdauer aus. Bei Terpentinöl fast vollständig, viel weniger bei Petroleumäther, so dass bei letzterer Substanz selbst nach langer Durchströmung, zu einer Zeit, da die Stromintensität constant geworden ist, und wir wahrscheinlich schon von wahrer Leitung sprechen können, noch Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze beobachtet werden.

V.

Von den oben beschriebenen, für die Durchströmung unvollkommener Diëlektrica charakteristischen Erscheinungen sind die Veränderungen der Stromstärke mit der Zeit die wichtigsten, da sich, wie erwähnt, auf diese die meisten Unregelmässigkeiten zurückführen lassen dürften. Wir werden uns daher vor allem mit diesem Vorgange zu beschäftigen haben, und zwar will ich als Ausgangspunkt der folgenden Untersuchung die Auffassung Maxwell's wählen, welcher den scheinbaren, ein Diëlektricum passirenden Strom auf drei Ursachen zurückführt.[1])

1. Auf Ladung des Diëlektricums als Condensator, d. h. auf diëlektrische Verschiebung.

2. Anf einen „in Ermanglung eines besseren Ausdruckes als Polarisation zu bezeichnenden“ Vorgang, welcher sehr enge mit der Rückstandsbildung zusammenhängt.

3. Auf wahre Leitung.

---

1) Maxwell, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus, §. 366.

Der Einfluss des ersten Factors erschöpft sich sehr rasch, der des zweiten im Verlaufe einiger Stunden und nur der des letzten ist von der Zeit unabhängig.

I. Diëlektrische Verschiebung.

Es liegt nahe anzunehmen, dass der intensive, aber sehr kurz dauernde Stromstoss, welchen die Batterie unmittelbar nach erfolgter Schliessung durch den Condensator sendet, nicht der wahren Leitung in demselben, sondern seiner Capacität entspricht, indem die Elektrodenplatten mit der diëlektrischen Flüssigkeit eine Franklin'sche Tafel von nicht unbedeutender Capacität bilden, deren Ladung eben durch den ersten Stromstoss erfolgt. Die Intensität desselben zeigt auch in Übereinstimmung mit dieser Ansicht bei derselben Substanz einen der Capacität des Condensators proportionalen Gang. Ferner ist ja aus den Untersuchungen über die Diëlektricitätsconstante bekannt, dass Petroleumäther und Terpentinöl vollständig die Eigenschaften eines Diëlektricums zukommen.

Setzt man nun nach Maxwell die der Ladung eines Condensators entsprechende diëlektrische Verschiebung einem Strome äquivalent, so kann man in gewissem Sinne auch von einem Widerstande sprechen, welchen ein Diëlektricum der Erzeugung eines Zwangszustandes entgegensetzt. Dieser Widerstand wird in meinen Versuchen im ersten Momente nach Stromschluss mit jenem der übrigen Leitung verglichen. Er erscheint stets sehr gering, doch ist der Verlauf des Processes ein so rascher, dass er nicht gemessen werden kann. Aus Versuchen Herwig's[1]) ist aber bekannt, dass der scheinbare Widerstand eines Paraffincondensators in Bruchtheilen der ersten Hundertelsecunde nach Stromschluss nur etwa 100 S. E. beträgt. Nehmen wir dieselbe Grössenordnung für die scheinbaren Widerstände der Flüssigkeitscondensatoren in unseren Versuchen an, so verschwindet derselbe vollständig gegen den eingeschalteten Vergleichswiderstand. Die grösste Intensität des Ladungsstromes wird daher durch den Vergleichswiderstand (wenn ich diesen als vollkommenen Leiter auffasse) allein bestimmt sein, was auch bei Besprechung der Versuche angenommen wurde.

Der Capacität des Condensators entspricht also sicher ein kurzer, intensiver Ladungsstrom, aber nun entsteht die weitere Frage, ob dieser allein zur Erklärung der Integralsumme $\int i dt$ der unmittelbar nach Schliessung der Batterie auftretenden Ströme von sehr rasch abnehmender Intensität ausreicht, welche unter der Bezeichnung „Schliessungs-

1) Herwig, Wied. Ann. Bd. 13, S. 169, 1881.

strom" zusammengefasst wurden. Dies ist nicht der Fall. Vor allem spricht dagegen die kurze Zeit, welche diëlektrische Verschiebungen zu ihrer Entwicklung bedürfen. Nach Root[1]) genügen hierzu weniger als 0,000082 Secunden. Bei der grossen Capacität meines Elektrometers und der Trägheit seiner Nadel hätte ein so kurzer Stromstoss eine viel geringere Wirkung als die beobachtete hervorgebracht, wie dies auch durch Vergleich mit dem Ladungsstrome eines Luftcondensators bestätigt wurde. Ferner war der Schliessungsstrom für ganz gleich geformte Condensatoren bei Petroleumäther viel grösser als bei Terpentinöl, obwohl die Diëlektricitätsconstanten dieser beiden Substanzen nicht sehr verschieden sind.

Andererseits wurde aber schon früher die Continuität der Stromstärkenänderungen, den Schliessungsstrom mit einbezogen, hervorgehoben, so dass wohl auch für die raschen Aenderungen in den ersten Secunden zum grössten Theile dieselben Ursachen massgebend sein dürften, wie für die viel langsameren, welche in späteren Perioden stattfinden. Mit diesen wollen wir uns im folgenden Abschnitte beschäftigen.

2. Rückstandsbildung.

Die allmähliche Abnahme der Intensität eines durch Kabelisolirungen geschickten Stromes erklärt Maxwell[2]) auf folgende Weise:

„Man wird annehmen können, dass die Erscheinung einer eigenthümlichen, in Ermanglung eines besseren Ausdruckes als Polarisation zu bezeichnenden Bedingung, in die Guttapercha unter dem Einflusse einer elektrischen Kraft tritt, ihre Entstehung verdankt. Sowie die Polarisation begonnen hat, tritt eine innere elektromotorische Kraft auf, die in der Substanz dem Strome entgegenwirkt und soweit anwächst, bis sie entweder einen dem primären Strome entgegengerichteten und an Stärke ihm gleichen Strom hervorgebracht hat, oder bis der Polarisationszustand durch die wirkliche Leitungsfähigkeit der Substanz sich allmälich verliert."

Durch Heranziehung einer elektromotorischen Gegenkraft scheint Maxwell einen Vorgang anzunehmen, welcher mit elektrolytischer Polarisation Aehnlichkeit besitzt, man dürfte aber zu einem leichteren Verständnisse dieser Erscheinungen gelangen, wenn man die Verwendung betrachtet, welche die von der Batterie gelieferten Elektricitätsmengen im Schliessungskreise erfahren.

---

1) Root, Pogg. Ann. Bd. 158, S. 1, 425.
2) Maxwell, l. c.

Ich will in dem folgenden von allen Wirkungen des Stromes nach aussen absehen und nur die Vorgänge im Inneren des Schliessungskreises berücksichtigen.

Von den Zuständen, welche die einer Batterie entnommenen Elektricitätsmengen im Schliessungskreise hervorbringen, sind nur zwei genauer studirt: 1. Die diëlektrische Verschiebung, durch Bestimmung von Diëlektricitätsconstanten. — 2. Die Leitung.

Der wesentliche Unterschied dieser beiden Zustände besteht darin, dass die verbrauchten Elektricitätsmengen in der diëlektrischen Verschiebung als elektrische Energie erhalten bleiben und auch als solche zurückgewonnen werden können, während die Leitung auf einer fortdauernden Umwandlung von Elektricität in Wärme beruht. Während ferner die diëlektrische Verschiebung zu ihrer Erhaltung keines weiteren Elektricitätszuflusses bedarf, müssen zur Unterhaltung der Leitung fortwährend die als Wärme verlorenen Elektricitätsmengen ersetzt werden. Aus dem Elemente fliessen neue Elektricitätsmengen nach, welche wieder eine Umwandlung in Wärme erfahren und so fort bis sich Gleichgewicht zwischen zufliessender und verbrauchter Elektricitätsmenge hergestellt, d. h. ein constanter Strom entwickelt hat.

Untersuchen wir nun den Zustand, in welchen ein unvollkommenes Diëlektricum unter dem Einflusse eines constanten Stromes tritt, so begegnen wir alsbald der diëlektrisehen Verschiebung, welche einem Theile des kurzen, intensiven Schliessungsstromes entspricht. Hierauf folgt ein Zustand continuirlicher Abnahme der Stromstärke. Wollten wir schon in diesem Stadium eine reguläre Leitung annehmen, so wären die grossen Veränderungen der Stromstärke mit der Zeit unerklärlich.[1]) Es liegt

---

1) Nur ein Vorgang könnte zur Erklärung dieser Erscheinungen noch herangezogen werden, nämlich elektrolytische Polarisation. Aber abgesehen davon, dass sie bei den minimalen benutzten Stromstärken sehr unwahrscheinlich ist, lässt sich eicht zeigen, dass sie nicht die Erscheinungen zu erklären vermöchte.

Erstens kann sie keinen Aufschluss geben über die Ursache des verschiedenen Verhaltens bei verschiedenen Elektrodendistanzen. Zweitons ist kein Maximum der Polarisation erkennbar. Dieses müsste nach den bereits citirten Versuchen 8 Daniell betragen, nach späteren Versuchen sogar 100 Smee, was undenkbar ist. Wir werden noch Ströme kennen lernen, welche Polarisationsströmen sehr ähnlich sind, aber auch deren elektromotorische Kraft ist für Polarisationsströme viel zu bedeutend. Sie betrug z. B. in den interessanten Versuchen Warburg's und Tegetmayer's über die Leitung des Quarzes bei höheren Temperaturen (Wied. Ann. Bd. 32 S. 442) über 500 D. Warburg wies allerdings später Zersetzung des Quarzes nach und glaubt; darauf alle Erscheinungen zurückführen zu können, aber schon ein Rückstrom von 500 D. allein genügt zur Rechtfertigung von Warburg's und Tegetmayer's ursprünglicher Ansicht, dass wir es hier mit einem besonderen Vorgange — vielleicht verbunden mit elektrolytischer Polarisation — zu thun haben. (Vergl. Wied. Ann. Bd. 35 S. 455.



daher nahe, zu untersuchen, ob sich nicht vielleicht neben Leitung Vorgänge entdecken liessen, welche, wie die diëlektrische Verschiebung, zwar Strömen äquivalent sind, ohne aber auf wahrer Leitung, d. h. auf Umsetzung von Elektricität in Wärme zu beruhen. Ist der Verlauf dieses vermutheten Vorganges mit der Zeit veränderlich, so könnte auf ihn die Abnahme der scheinbaren Stromstärke zurückgeführt werden.

Die erste Frage, welche sich nun aufdrängt, ist folgende: Wenn dieser supponirte Vorgang Strömen äquivalent ist, ohne aber weder diëlektrischer Verschiebung, noch Leitung gleichgesetzt werden zu können, in welcher Energieform befindet sich die ihm entsprechende von der Batterie gelieferte Elektricitätsmenge? Die Versuche lehren, dass sie als Rückstand im unvollkommenen Diëlektricum aufgespeichert ist. Diesen Zustand werden wir nun genauer zu untersuchen haben.

Verbindet man die eine Belegung eines gut isolirenden Condensators mit der Erde, die andere mit einer Elektricitätsquelle von bestimmtem Potentiale, so wird die zweite Belegung das Potential derselben annehmen und eine bestimmte Elektricitätsmenge wird in dem Condensator aufgespeichert werden. Unterbricht man nun die Verbindung mit der Elektricitätsquelle, so wird das Potential der dadurch isolirten Belegung mit der Zeit abnehmen und sich asymptotisch einer unteren Grenze nähern. Man sagt, die disponible Ladung nehme ab. Stellt man neuerdings die Verbindung mit der Elektricitätsquelle her, so nimmt die Belegung wieder das Potential derselben an und der Condensator neue Elektricitätsmengen auf. Nach wieder erfolgter Isolation sinkt nun die disponible Ladung langsamer ab und erreicht nicht mehr die frühere untere Grenze. Dieselbe Erscheinung tritt bei Wiederholung dieses Vorganges auf. Statt mit Unterbrechungen oft zu laden kann man gleich die Elektricitätsquelle durch längere Zeit mit dem Condensator in Verbindung lassen. Man wird dann beobachten, dass, je länger die Ladung gedauert hat, desto langsamer und weniger die disponible Ladung absinkt, wie dies deutlich an Versuchen von Hopkinson [1]) zu sehen ist.

Wir erfahren aus diesen Versuchen, dass der Condensator eine grössere Elektricitätsmenge aufgenommen hat, als der nur durch diëlektrische Verschiebung bedingten Capacität entsprechen würde. Ein Theil der aufgenommenen Elektricitätsmenge hat sich als disponible Ladung erhalten, der bei weitem grössere hat sich aber unserer Beobachtung entzogen.

1) Hopkinson, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Bd. 167, S. 599, 1877.

Entladet man jetzt diesen lange durchströmten Condensator, so wird nach kurzer Zeit wieder eine Potentialdifferenz der Belegungen auftreten, welche das gleiche Vorzeichen mit der ursprünglichen Ladung zeigt aber nicht deren vollen Werth erreicht. Entfernt man auch diese Ladung, so wird neuerdings eine ähnliche, aber etwas kleinere auftreten, u. s. f. Es muss daher in dem Diëlektricum etwas verborgen sein, woraus sich Potentialdifferenzen der Condensatorbelegungen entwickeln können. Nun haben wir früher gesehen, dass ursprünglich als disponible Ladung vorhandene Elektricitätsmengen allmählich verschwunden sind, wir werden daher wohl diese als Quelle wieder zu Tage tretender Condensatorladungen auffassen. Diesen noch wenig erforschten Zustand des Diëlektricums, welcher sich aus disponiblen Ladungen entwickelt und sich wieder in diese umsetzen kann, bezeichnet man als Rückstand.

Die Leichtigkeit, mit welcher sich Rückstände in disponible Ladung, respective in diëlektrische Verschiebung verwandeln, lässt auf ihre nahe Verwandtschaft mit diesem Zustande schliessen, aber doch bestehen bedeutende Unterschiede.

Erstens kommt dem Rückstande an und für sich kein elektrisches Potential zu, denn unmittelbar nach Entfernung der disponiblen Ladung zeigen die Condensatorbelegungen noch keine Potentialdifferenz. Diese entwickelt sich erst allmählich mit der Umwandlung von Rückstand in freie Elektricität.

Zweitens, und darin besteht der Hauptunterschied, haftet der Rückstand fest an dem unvollkommenen Diëlektricum, in welchem er gebildet wurde, während der Polarisationszustand eines Diëlektricums nur von der Summe der vorhandenen Elektricitätsmengen und der räumlichen Vertheilung von Conductoren und Diëlektricis abhängt. So könnten wir z. B. die der Capacität eines Condensators mit vollkommenem Diëlektricum entsprechende Elektricitätsmengen auf einer der Belegungen concentriren, indem wir dieselbe in das Unendliche entfernen. Nicht so die als Rückstände aufgespeicherten Elektricitätsmengen, sondern diese bleiben an das Diëlektricum gebunden, wie dies klar aus Versuchen von Wüllner[1]) erhellt: Wird von einem Rückstände enthaltenden Condensator eine der Belegungen entfernt, so wird dadurch allerdings der Polarisationszustand des Diëlektricums, aber nicht sein Rückstand gestört, dieser entwickelt sich vielmehr ganz unverändert zu freier Elektricität an den nun unbelegten Oberflächen des Diëlektricums.

1) Wüllner, Wied. Ann. Bd. 1, S. 247, 361, 1877.

Bei der Leitung sehen wir nun ebenfalls einen an die Moleküle des Leiters gebundenen Vorgang auftreten, der auf bisher noch unbekannte Weise aus disponibler Ladung entsteht: die Wärmeentwicklung. Es nähert sich so die Energieform des Rückstandes durch ihre Eigenschaft einerseits aus diëlektrischer Verschiebung zu entstehen, andererseits aber fest an dem Diëlektricum zu haften, jener der Wärme; sie unterscheidet sich aber von derselben dadurch, dass aus ihr sich wieder diëlektrische Verschiebung entwickeln kann, was bei Wärme nicht mehr der Fall ist. Der Rückstand scheint daher einen Uebergangszustand zu bilden, welchen die Elektricität bei ihrer allmählichen Umwandlung von diëlektrischer Verschiebung in Wärme durchläuft.

Ich überlasse es den folgenden Betrachtungen, diese Auffassung wahrscheinlicher zu machen, will aber gleich jetzt auf eine Eigenschaft des Rückstandes hinweisen:

Wie von Faraday und Maxwell hervorgehoben wurde, befindet sich das Diëlektricum eines geladenen Condensators in keinem natürlichen, sondern einem gezwungenen Zustande. Dasselbe kann man auch vom Rückstande behaupten, indem dieser nie für sich allein besteht,[1] sondern stets einer freien Elektricitätsmenge, der disponiblen Ladung bedarf, welche ihn wie unter einem Drucke in dem Diëlektricum zurückhält. Wird der Condensator entladen, so erzeugt der Rückstand selbst eine so grosse Ladung, dass ihr Druck seinem Gegendrucke Gleichgewicht hält.

Umgekehrt wird die einem Condensator mit unvollkommenem Diëlektricum zugeführte Elektricitätsmenge nicht zur Erzeugung der diëlektrischen Verschiebung allein, sondern alsbald auch zur Rückstandsbildung verwendet, bis zwischen diesen beiden sich gegenseitig bestimmenden Zuständen Gleichgewicht eingetreten ist.

Eben dieser Vorgang entspricht der Abnahme der disponiblen Ladung eines Condensators.

Gehen wir nun zur Betrachtung der constanten Durchströmung eines unvollkommenen Diëlektricums über, so wird in diesem Falle die in jedem Augenblicke durch die Abnahme der disponiblen Ladung verlorene Elektricitätsmenge von der Batterie ersetzt. Es verläuft die Rückstandsbildung unter dem Drucke einer äusseren elektromotorischen Kraft. Gegen diesen üben aber die schon gebildeten Rückstände einen Gegendruck, dessen Stärke mit der Menge des angesammelten Rückstandes wächst, bis er endlich jenem der äusseren elektromotorischen Kraft Gleichgewicht hält, womit das Ende der Rückstandsbildung er-

---

1) Auf eine Beschränkung dieses Satzes wird bei Besprechung der Rückstände in Gläsern hingewiesen werden.

reicht ist. Dieser Gegendruck des angesammelten Rückstandes entspricht vollkommen der elektromotorischen Gegenkraft Maxwell's.

In unserer Versuchsanordnung erscheinen die zur Erzeugung des Rückstandes in den Condensator gepressten Elektricitätsmengen Strömen äquivalent, deren Intensität daher durch die Stärke der jeweiligen Rückstandsbildung bestimmt ist. Wir haben nun gesehen, dass je mehr Rückstand bereits angesammelt ist, desto langsamer die weitere Rückstandsbildung vor sich geht, und in der That nimmt auch die Intensität des ihr entsprechenden Stromes mit der Zeit ab. Wir haben hier den gesuchten zwischen diëlektrischer Verschiebung und Leitung stehenden Vorgang vor uns, auf welchen wegen seiner Veränderlichkeit mit der Zeit die Abnahme der scheinbaren Stromstärke zurückgeführt werden kann.

Nach vollendeter Rückstandsbildung sollte man ein vollständiges Verschwinden der Ströme erwarten, doch tritt dieser Fall nicht ein, sondern die Stromstärke nähert sich einer constanten Grenze. Die diesem bleibenden Strome entsprechende Elektricitätsmenge muss durch Leitung fortgeschafft werden, da wir kaum eine unbegrenzte Anhäufung elektrischer und Rückstandsenergie im Diëlektricum erwarten können. Unter dem Drucke der elektromotorischen Kraft der Batterie findet eben eine weitere Umwandlung der elektrischen Energie bis in Wärme statt.

Fassen wir die gewonnenen Resultate zusammen, so kann die allmähliche Abnahme der Elektricitätsaufnahme eines unvollkommenen Diëlektricums nach Art einer Stauung aufgefasst werden, welche in dem Umwandlungsprocesse von Elektricität in Wärme eintritt. Das Diëlektricum ist nur im Stande, eine geringe Elektricitätsmenge durch Leitung fortzuschaffen, es sammeln sich daher unter dem Drucke der äusseren elektromotorischen Kraft allmählich Elektricitätsmengen in den Uebergangsstadien an, welche von der primären diëlektrischen Verschiebung zu dem Endresultate, der Umwandlung in Wärme führen.

Zu der einfachen Vorstellung der Stauung kommt noch hinzu, dass die Elektricitätsmengen nicht als solche erhalten bleiben, sondern mit der Stauung eine Umwandlung in Wärme erfahren.

Da auf diese Weise die Rückstandsbildung als ein Uebergang zur Leitung erscheint, könnte es nahe liegen, aus starker Rückstandsbildung eines Diëlektricums auf dessen bessere Leitungsfähigkeit zu schliessen. Diese Voraussetzung trifft aber durchaus nicht in allen Fällen zu, indem von gleich ausgezeichneten Isolatoren der eine viel, der andere wenig Rückstand aufnimmt.

Die Beobachtung der allmählichen Abnahme der Stromstärke in einem unvollkommenen Diëlektricum erlaubt aber mehr als einen allgemeinen Schluss, dass Rückstandsbildung stattfinde, sie gibt uns auch das genaueste Mittel an die Hand, die Grösse derselben zu bestimmen, indem die Integralsumme $\int_0^t idt$ weniger der Capacität des Condensators und der in dieser Periode durch Leitung fortgeschafften Elektricitätsmenge gleich dem Rückstande sein muss.

Da diese Methode der Rückstandsbestimmung sich von allen gebräuchlichen unterscheidet, welche stets von dem nach Entfernung der disponiblen Ladung wieder zu Tage tretenden Rückstande ausgehen (nur Giese[1]) beobachtete die Rückstandsbildung direct), unternahm ich eine Reihe von Versuchen zum Vergleiche der nach beiden Methoden gewonnenen Resultate. Leider wurde in allen bisher angestellten Beobachtungen das Augenmerk nur auf das Potential des wieder zu Tage tretenden Rückstandes gerichtet; diese gestatten aber keinen directen Schluss auf die dem Rückstande entsprechenden Elektricitätsmengen. Allerdings wird unter sonst ganz gleichen Umständen ein grösserer Rückstand auch eine stärkere disponible Ladung entwickeln, und wenn daher z. B. Dieterici[2]) findet, dass für denselben Paraffincondensator und dieselbe elektromotorische Kraft der ladenden Batterie das Potential des wieder zu Tage getretenen Rückstandes mit der Durchströmungsdauer zunimmt so kann dieses Resultat sicher die Deutung erfahren, dass die Rückstandsmenge zugenommen hat, doch liefert dieses Verfahren kein Maass für die Elektricitätsmenge.

Eine viel genauere Schätzung der dem Rückstande entsprechenden Elektricitätsmenge gestattet wiederholtes Entladen des rückstanderfüllten Condensators, wie es schon von Kohlrausch[3]) geschehen ist. In dieser Weise ausgeführte Versuche Hopkinson's[4]) können sämmtlich als Beweise dafür angesehen werden, dass die Rückstandsmenge mit der Durchströmungsdauer zunimmt, was auch mit den Ladungserscheinungen übereinstimmt.

Statt den Condensator oft zu entladen, kann man endlich noch direct die beiden Belegungen durch einen bekannten Widerstand schliessen und den auftretenden Rückstrom messen. Der Condensator verhält sich dann wie eine Secundärbatterie, welche die ganze zu ihrer Ladung verbrauchte Elektricitätsmenge zur Erzeugung eines Rückstromes

1) Giese, Wied. Ann. Bd. 9. S. 161, 1880.
2) Dieterici, Wied. Ann. Bd. 25. S. 545, 1885.
3) Kohlrausch, Pogg. Ann. Bd. 41, S. 56, 1854.
4) Hopkinson, l. c.

verwendet. Die Intensität desselben kann entweder galvanometrisch gemessen werden, wie bei Kabelisolirungen, oder elektrometrisch, indem man das Potentialgefälle in einem bekannten, dem Schliessungskreise eingeschalteten Widerstande misst. Die zum Ausgleiche kommenden Elektricitätsmengen sind dann durch die Formel $\int_0^\infty J' R dt$ gegeben, wenn R den Widerstand im ganzen Schliessungskreise bedeutet. Letzterer Weg wurde von mir eingeschlagen, indem die Verbindung der Condensatorbelegungen durch denselben Widerstand hergestellt wurde, welcher zur Messung des Ladungsstromes gedient hatte.

Es ist zwar auch auf diese Weise keine genaue absolute Messung der dem Rückstande entsprechenden Elektricitätsmenge möglich, da weder die variable elektromotorische Kraft des Rückstromes, noch der wahre Widerstand des Diëlektricums, welcher bei dieser Anordnung dem inneren Widerstande eines Secundärelementes entspricht, bekannt ist. Die Intensität des Rückstromes blieb scheinbar immer weit hinter der des entsprechenden Ladungsstromes zurück (den auf wahre Leitung entfallenden Bruchtheil desselben natürlich abgerechnet), was sich bei den minimalen in Spiel kommenden Elektricitätsmengen zum Theile aus Isolationsfehlern, der Absorption der verwendeten isolirenden Materialien, dem Elektricitätsverbrauche des Elektrometers, dessen Capacität nicht unbedeutend war, und vor allem daraus erklärt, dass der Rückstrom nicht unter dem Drucke einer so starken unveränderlichen elektromotorischen Kraft, wie jener der Batterie entsteht. Bei diesen Beobachtungen zeigte sich aber bald die Erscheinung, dass die Verluste nicht unter allen Umständen gleich gross waren, sondern je langsamer der Ladungsstrom abgenommen hatte, d. h. je allmählicher die Rückstandsbildung vor sich gegangen war, desto kleiner war das Verhältnis des Rück- zum Ladungsstrome. Daher scheinen besonders bei Ladung mit schwach gespannten Strömen die im Diëlektricum aufgespeicherten Elektricitätsmengen nur sehr zähe und unvollkommen aus demselben hervorzutreten. Es wird sich später eine Erklärung dieser Erscheinung ergeben.

Wenn es nun in Folge dessen überhaupt nicht gelingt, durch Messung wieder zu Tage tretenden Rückstandes verlässliche absolute Werthe zu erhalten, so liefern die Untersuchungen doch oft gut untereinander vergleichbare Resultate, welche ich in grossen Umrissen mittheile:

Die wieder zu Tage tretenden Rückstände wurden nach kurz dauernder Entladung des Condensators bestimmt. Sie waren verschieden:

1. Je nach dem Diëlektricum, sehr gering, meist nicht nachweisbar bei Petroleumäther, bedeutender bei Terpentinöl.

2. Sie nahmen bei derselben Substanz zu mit der Durchströmungsdauer und

3. Bei gleichbleibender Potentialdifferenz der Condensatorplatten mit der Elektrodendistanz.

Wie erinnerlich, halten die zur Erzeugung der betreffenden Rückstände, als Ladungsströme beobachteten Elektricitätsmengen dieselbe Reihenfolge in Bezug auf ihre Grösse ein.[1]

Das Interesse für den wieder zu Tage tretenden Rückstand knüpft sich aber weniger an die numerischen Resultate, als an die Beobachtung des zeitlichen Verlaufes, welchen die Umwandlung von Rückstand in elektrische Energie nimmt. Um die Continuität dieses Entladungsvorganges zu erhalten, ist es jedoch nothwendig, den Condensator nicht erst kurz zu entladen und den dann noch zu Tage tretenden Rückstand zu messen, sondern einfach den zeitlichen Verlauf des Rückstromes zu beobachten. Man sieht bei dieser Anordnung, dass dem Rückstrome durchaus keine constante Stromstärke zukommt, er zeigt vielmehr ganz ähnliche Intensitätsschwankungen, wie der entsprechende, der Richtung nach entgegengesetzte Ladungsstrom. Der schon oft gemachte Vergleich zwischen elastischer Nachwirkung und Rückstand scheint in Bezug auf diese Thatsache besonders treffend.

An der Entladung können wir denselben Unterschied zwischen den in den ersten Augenblicken und den später auftretenden Strömen bemerken, ja der Gegensatz zwischen diesen beiden Perioden ist noch schärfer ausgesprochen als bei der Ladung, da der kurze Entladungsstrom nahezu dieselbe Intensität wie der ihm vollkommen entsprechende Schliessungsstrom zu besitzen scheint[2]), während aber der bleibende

---

1) Von vielen Beobachtern konnten in Flüssigkeiten überhaupt keine Rückstände nachgewiesen werden. Die Ursache dieses negativen Resultates dürfte wohl darin zu suchen sein, dass die Ladung zu kurze Zeit gedauert hatte. Die mitgetheilten Elektricitätsmengen sind daher sehr gering und werden leicht durch wahre Leitung und die Entladung selbst fortgeschafft. Immerhin beobachteten J. J. Thomson und H. F. Newall (Proc. R. Soc. Bd. 42, Nr. 256, S. 410, 1887) wieder zu Tage tretenden Rückstand bei Schwefelkohlenstoff und auch Hertz (Wied. Ann. Bd. 20, S. 279) verfolgte nach Giese's Methode die Rückstandsbildung in Benzin. Hertz glaubte allerdings dieselbe durch Convection vermittels suspendirter Staubtheile erklären zu können.

2) Gaugain gibt an, dass gerade die in den ersten zwei Secunden von einem Condensator aufgenommene Elektricitätsmenge durch eine kurz dauernde Entladung entfernt werde. (Ann. de chim. et de phys. 4. serie, t. Bd. 2, S. 264.

Rückstrom dem lange anhaltenden Ladungsstrome an Intensität, wie oben erwähnt, weit nachsteht. Desgleichen tritt der Unterschied in dem Verhalten der beiden untersuchten Diëlektrica Petroleumäther und Terpentinöl viel deutlicher hervor. Zwei gleichgeformte mit diesen Diëlektricis gebildete Condensatoren sollten theoretisch nahezu dieselbe Capacität besitzen. Dessenungeachtet übertrifft der kurze Entladungsstrom des Petroleumäthers um ungefähr das zehnfache jenen des Terpentinöls an Itensität. Diese Erscheinung kann nur dadurch erklärt werden, dass selbst an kurzdauernden Entladungen ausser den der theoretischen Capacität entsprechenden Elektricitätsmengen noch andere dem Rückstand angehörige, Theil nehmen. Dadurch gewinnt zugleich unsere früher ausgesprochene Ansicht, dass auch an der Bildung des Schliessungsstromes nicht nur diëlektrische Verschiebung, sondern auch Rückstandsbildung betheiligt sei, eine mächtige Stütze.

Man sieht daraus ferner, einen wie unvollkommenen Einblick in den Zustand eines rückstanderfüllten Diëlektricums die gebräuchliche Beobachtungsweise des erst nach der Entladung wieder zu Tage tretenden Rückstandes ohne Berücksichtigung der Entladung selbst, gewährt.

Betrachtet man nun die eigenthümliche Stellung, welche die Energieform des Rückstandes als Übergangszustand zwischen diëlektrischer Verschiebung und Wärme einnimmt, so folgt, dass ihm kein homogener Zustand entsprechen kann, sondern dass sich ein Theil derselben mehr der diëlektrischen Verschiebung, ein anderer mehr der Wärme anlehnen wird. Überlegt man ferner, dass die Verwandtschaft des Rückstandes mit der diëlektrischen Verschiebung hauptsächlich auf der Möglichkeit und Leichtigkeit einer Umwandlung in diesen Zustand beruht, jene mit der Wärme hingegen auf der Zähigkeit, mit welcher Rückstände an dem Diëlektricum haften, und hält damit die Thatsache zusammen, dass unter manchen Umständen die Rückstandsbildung rasch verläuft, eben so rasch aber auch die Wiederumwandlung desselben in diëlektrische Verschiebung, unter anderen langsamer, aber auch der gebildete Rückstand nur langsam, ja selbst gar nicht mehr zu Tage tritt, so wird man zu dem Schlusse geführt, dass diesen verschiedenen Bildungsweisen und Verhalten des Rückstandes auch verschiedene Arten desselben entsprechen. Er wird in dem ersten Falle mehr der diëlektrischen Verschiebung, in dem zweiten mehr der Wärme ähnlichen Charakter besitzen.

In einem continuirlich durchströmten Diëlektricum sind Rückstände in allen Übergangsstufen von der diëlektrischen Verschiebung bis zur Wärme enthalten. In welchen Mengenverhältnissen aber die einzelnen Rückstandsformen in demselben aufgespeichert sind, hängt wesentlich

davon ab, an welchem Punkte des Umwandlungsprocesses von diëlektrischer Verschiebung in Wärme das die Stauung bedingende Hindernis liegt. Bei einigen Diëlektricis verwandelt sich vielleicht diëlektrische Verschiebung überhaupt nicht in Rückstand. Dazu gehören Gase bei gewöhnlicher Temperatur; bei anderen werden wohl der diëlektrischen Verschiebung sehr ähnliche Rückstände entwickelt, aber in der weiteren Umwandlung tritt Stauung ein, zu diesen Substanzen ist Flintglas zu zählen; wieder bei anderen ist das Hindernis auf keine kurze Stelle concentrirt. Diese Diëlektrica entwickeln Rückstände in allen Formen in grosser Menge. Dazu gehören die relativ gut leitenden Diëlektrica, wie die meisten untersuchten Flüssigkeiten und Thüringerglas. Petroleumäther bildet den Übergang zwischen der vorigen und dieser Gruppe. Endlich gibt es noch Substanzen, welche ausgezeichnet isoliren, aber dessenungeachtet mehr Rückstände aufnehmen, als alle bisher besprochenen Diëlektrica. Ich rechne hierher Paraffin. Nach unserer Theorie sind wir gezwungen, bei diesen Substanzen das Hindernis in einem sehr späten Stadium des Umwandlungsprocesses anzunehmen. Der Wärme schon sehr verwandte Rückstände werden doch nicht in Wärme umgewandelt. Dementsprechend scheinen die Ladungsströme des Paraffins gar nicht aufzuhören, obwohl man in die Isolationsfähigkeit dieser Substanz keinen Zweifel setzen wird, andererseits ist es mir aber nicht gelungen, rückstandfreies Paraffin zu erhalten. Zu dieser Gruppe von Diëlektricis dürften auch die meisten in der Reibungselektricität als gute Elektricitätsquellen bekannten Isolatoren gehören.

Vermehrt man die einem unvollkommenen Diëlektricum zugeführte Elektricitätsmenge durch Erhöhung der elektromotorischen Kraft der Batterie, so wird trotz der Erhöhung des an der Überwindung des Hindernisses arbeitenden Druckes, die Stauung verhältnismässig früher eintreten. Darauf ist die Erscheinung zurückzuführen, dass die der Rückstandsbildung entsprechenden Stromstärken langsamer wachsen, als die sie erzeugenden elektromotorischen Kräfte[1]). Auch fördert die Erhöhung der Spannung im Diëlektricum vielmehr die Bildung von Rückständen, welche der diëlektrischen Verschiebung als jener, welche der Wärme nahe stehen. Wir haben ja gesehen, wie sich durch Herabsetzung der Spannung das Verhalten des rasch rückstandbildenden Petroleumäthers jenem des unter gleichen Umständen viel langsamer rückstandbildenden Terpentinöls nähert.

Aus dieser Auffassung des Rückstandes als unhomogenen Übergangszustandes ergibt sich von selbst, dass die Beobachtung des wieder

1) Bei festen Diëlektricis werden wir allerdings gerade entgegengesetzte Abweichungen von Ohm's Gesetze kennen lernen.

zu Tage getretenen Rückstandes kein Maass für die wahre Rückstandsmenge abgeben kann. Sie kann ja immer nur einen Bruchtheil des ganzen vorhandenen Rückstandes anzeigen, jenen, welcher weder der diëlektrischen Verschiebung noch der Wärme sehr nahe steht. Denn der Rückstand der ersten Art wird schon durch die kurze Entladung des Condensators entfernt, jener der zweiten, welcher der lange andauernden Ladung entspricht und oft den grössten Theil der Rückstandsmenge ausmacht, tritt aus dem Diëlektricum nur ganz unvollkommen wieder zu Tage.

Durch erfolgloses Aufsuchen von Rückstand in einmal entladenen Diëlektricis könnte man verleitet werden, Substanzen für rückstandsfrei zu halten, obwohl sie sehr bedeutende Rückstandsmengen aufnehmen, ein Fehlschluss, der in der That bei den flüssigen Isolatoren gemacht worden ist.

Zur Unterstützung der oben aufgestellten Theorie des Rückstandes will ich noch einige experimentelle Details mittheilen. Meine Versuchsanordnung gestattete nicht den Ladungsvorgang in den ersten Secunden genau zu verfolgen, es konnte daher die dem rasch abnehmenden Schliessungsstrome entsprechende Rückstandsmenge nur geschätzt aber nicht gemessen werden; und doch wäre eine genaue Kenntnis gerade dieser Periode von grösster Wichtigkeit, weil in ihr die Unterschiede in der Rückstandsbildung der einzelnen Substanzen am deutlichsten hervortreten müssen. Glücklicherweise finden sich in den Untersuchungen mehrerer Physiker numerische Angaben über die Vorgänge während dieser Periode.

Domalip[1]) und nach ihm Gruss und Biermann[2]) bestimmten die Zeit, welche eine gewisse Elektricitätsmenge zu ihrem Transporte durch Diëlektrica bedurfte. Auf welche Weise dieser Transport erfolgte, ob durch diëlektrische Verschiebung, Rückstandsbildung oder Leitung, kann nach ihren Versuchen nicht entschieden werden. Jedenfalls ist nach unseren Erfahrungen unmittelbar nach Stromschluss Rückstandsbildung der einflussreichste Factor. Die erwähnten Physiker massen daher nicht, wie sie vermutheten, die Leitung der Diëlektrica, sondern die Intensität der kurz nach Stromschluss stattfindenden Rückstandsbildung.

Die zum Transporte gleicher Elektricitätsmengen nothwendigen Zeiten verhielten sich bei:

	Wasser		Petroleum	Terpentinöl
wie	1	zu	3,2	74,5.

1) Domalip, Wiener Ber. Bd. 75 (2), April 1877.
2) Gruss und Biermann, Wiener Ber. Bd. 77 (2) 1878.

Man sieht, dass der Transport derselben Elektricitätsmenge durch Petroleum mehr als zwanzigmal weniger Zeit als durch Terpentinöl beansprucht in Uebereinstimmung damit, dass die von mir beobachteten der Rückstandsbildung dieser Periode äquivalenten Ströme bei der ersten Substanz stärker als bei der zweiten sind. Obwohl Terpentinöl bei langer Durchströmung mehr Rückstände aufnimmt und besser leitet als Petroleum.

Dadurch, dass diese Beobachtungen sich nur auf Bruchtheile der ersten Secunde der Ladung beziehen, ist ferner der sichere Beweis meiner Annahme erbracht, dass selbst an den kürzesten noch der Beobachtung zugänglichen Ladungsströmen Rückstandsbildung Antheil hat.

Eben dieselben Versuche lehren, dass der scheinbare Widerstand des Petroleums in den ersten Zeittheilchen nach Stromschluss nur dreimal grösser ist als jener des Wassers, obwohl sein wahrer Widerstand ihn um das viele Millionenfache übertrifft. Die Rückstandsbildung ist eben so intensiv, dass die durch sie bewegten Elektricitätsmengen mit den durch Leitung beförderten vergleichbar werden.

Der Nachweis wieder zu Tage tretenden Rückstandes gelingt bei Terpentinöl leicht, etwas schwerer bei Petroleumäther, man kann aber desto sicherer auf günstigen Erfolg rechnen, je kürzere Zeit die beiden Condensatorplatten in Verbindung gestanden waren. Oft, besonders bei kleinen Elektrodendistanzen genügt jedoch eine Entladung von nur wenigen Secunden, um alle nachweisbaren Rückstandsmengen zum Verschwinden zu bringen. Es erklärt sich dieses Verhalten ganz ungezwungen aus dem der diëlektrischen Verschiebung ähnlichen Charakter den wir nach dem Ladungsvorgange dem grössten Theile des Rückstandes im Petroleumäther zuerkennen müssen. Mit gleicher Geschwindigkeit, mit der sich dieser Rückstand ansammelt, geht auch seine Wiederumwandlung in freie Elektricität vor sich.

Wir haben gesehen, dass die disponible Ladung wie ein Druck zu wirken scheint, welcher die als Rückstand an den Molekülen haftenden Elektricitätsmengen an dieselben anpresst. Erst mit Nachlassen desselben können jene zum Vorscheine kommen. Die Moleküle des Petroleumäthercondensators nehmen nun Elektricität mit grofser Lebhaftigkeit auf, halten sie aber nur in leichter Bildung fest, so dafs im Momente der Entladung bei nachlassendem Drucke des Zwangszustandes ein Theil der in den Molekülen als Rückstand zurückgedrängten Elektricitätsmengen sich wieder in freie Elektricität verwandelt und gleich an der Entladung theilnimmt.

Geschieht endlich die Rückstandsbildung so schnell dass ein merklicher Theil derselben schon auf die kurze Zeit entfällt, welche die Ladung des Condensators bei Messung von Diëlektricitätsconstanten

beansprucht, so muss diese zu gross ausfallen. Bei Petroleum tritt diese Erscheinung noch nicht ein, denn die beobachtete Diëlektricitätsconstante stimmt ziemlich mit dem von der Maxwell'schen Theorie verlangten Werthe überein, wohl aber bei den meisten festen Diëlektricis.

Flintglas zeigt in dieser Beziehung das auffallendeste Verhalten. Die Elektricitätsmengen, welche eine aus diesem Materiale hergestellte Leydnerflasche aufnimmt, sind ungemein variabel, aber selbst bei kürzester Ladungsdauer erscheint die entsprechende Diëlektricitätsconstante noch zu gross [1]). Analoges Verhalten bietet die Entladung dar, welche zwar stets sehr stark ist [2]), aber wesentlich von der Entladungsdauer abhängt, indem Gaugain nachwies, dass die nach derselben im Condensator noch zurückbleibende Elektricitätsmenge um so grösser ist, je kürzer die Entladung gedauert hatte. Wurde der Knopf einer Leydnerflasche nur einen Moment ableitend berührt, so konnte der Rückstand bis gegen ein Drittel der zur Ladung verbrauchten Elektricitätsmenge betragen. Alle diese Beobachtungen deuten darauf hin, dass wir bei Ladung eines Flintglascondensators neben diëlektrischer Verschiebung noch bedeutende, aber ungemein rasch verlaufende Rückstandsbildung vor uns haben, welehe sich zeitlich von dem ersten Vorgange gar nicht trennen lässt. Ja, ich glaube, dass eben dieser Eigenschaft eines unvollkommenen Diëlektricums, rasch Rückstand zu bilden, denselben aber eben so rasch wieder in freie Elektricität zu verwandeln, der Flintglascondensator seine grosse Wirksamkeit verdankt. Die nach einer Entladung von zwei Secunden noch zu Tage tretenden Rückstände sind nach Hopkinson [3]) nur mehr ganz unbedeutend; die Isolation vortrefflich. —

Die Ansicht, dass die an der Entladung einer Leydnerflasche participirenden Elektricitätsmengen auch von Rückständen herstammen, findet in den Beobachtungen Rjike's [4]), dass der Rückstand einer Flintglasleydnerflasche wesentlich von dem Widerstande des sie entladenden Körpers abhängt, eine weitere Stütze. Denn dieser Widerstand bedingt die Schnelligkeit, mit welcher der Druck der jeweiligen disponiblen Ladung auf den Rückstand nachlässt, und dadurch die Umwandlung desselben in freie Elektricität, welche mit an der Entladung Theil nimmt, gestattet. Rjike fand für das Verhältnis des Potentiales

1) Vergl. Hopkinson, Proc. Roy. Soc. Bd. 26 p. 298.

2) Schwedoff, (Pogg. Bd. 135 S. 418) bestimmte calorimetrisch den Betrag der Entladung zweier gleichgeformter aus Flintglas und aus Ebonit hergestellter Condensatoren und fand erstere dreimal so gross, als die zweite.

3) Hopkinson, Phil. Trans. Roy. Soc. of London, vol. 167 pag. 599.

4) Rjike, Pogg. Ann. Bd. 113, S. 327, 1861.

der Ladung zu jenem des Rückstandes bei Entladung der Flasche durch Hanf oder Messing folgende Werthe:

	Entladung durch	
	Hanf	Messing
$\frac{R}{L}$	0,117, 0,137,	0,073, 0,076.

Endlich scheinen Versuche Hopkinson's[1]) dafür zu sprechen, dass die einem Flintglascondensator mitgetheilte Elektricitätsmenge auf ganz besondere Weise in demselben festgehalten werde. Hopkinson lud eine Flintglasleydnerflasche, deren innere und äussere Belegung Schwefelsäure bildete, durch mehrere Stunden mit 48 Elementen. Wurde hierauf die eine Belegung abgeleitet, die andere mit dem Elektrometer verbunden, so zeigte dieses einen Ausschlag von 240 Theilstrichen, der sich im Laufe der Zeit auf folgende Weise verringerte:

15. Juli	240	Theilstriche.
23. Juli	183	„
9. August	175	„
14. September	163	„
14. October	140	„

Die der Zerstreuung an die Luft ausgesetzte Oberfläche ist allerdings klein, aber dieser Umstand könnte doch nicht den minimalen Elektricitätsverlust erklären. Es würde ja z. B. der dem Ladungsverluste vom 23. Juli bis 9. August entsprechende Zerstreuungscoëfficient weniger als $^1/_{500}$ des gewöhnlich angenommenen betragen, obwohl auch fortwährend, wenn selbst unbedeutende Verluste durch Leitung eintreten. Dieses aussergewöhnliche Verhalten wird aber leicht verständlich, wenn wir in dem nur leicht zurückgehaltenen Rückstande des Condensators ein Reservoir freier Elektricität sehen, welches die durch Zerstreuung an die Luft und durch Leitung eintretenden Verluste der disponiblen Ladung nach Möglichkeit ersetzt.

3. Leitung.

Unter dem Drucke der äusseren elektromotorischen Kraft wird ein Theil, der in ein Diëlektricum hineingepressten Elektricitätsmengen in Wärme immer ähnlichere Formen und endlich in Wärme selbst übergeführt. Während wir nun in dem vorigen Abschnitte hauptsächlich die Übergangsstufen zwischen diëlektrischer Vorschiebung und Rückstand betrachtet haben, kämen wir jetzt zur Untersuchung der Übergangsformen zwischen Rückstand und Wärme. Diese entziehen sich aber leider ganz der Beobachtung, wie die Wärmeerscheinungen selbst;

1) Hopkinson, l. c.

wir müssen nur aus theoretischen Gründen auf ihre Existenz schliessen, da mehr Elektricität in das Diëlektricum eintritt als durch Leitung fortgeschafft wird und durch Entladung wieder zurückgewonnen werden kann.

Nur eine eigenthümliche an Gläsern gemachte Beobachtung scheint direkt für das Vorhandensein dieser der Wärme schon sehr ähnlichen Rückstände zu sprechen. Die Schnelligkeit, mit welcher der Ladungsstrom einiger Leydnerflaschen abnahm, hing ausser von anderen Umständen noch davon ab, ob die betreffende Probe bereits zu Versuchen gedient hatte oder nicht. Bei noch nie durchströmtem Glase dauerte es manchmal Stunden, bis der Widerstand sein Maximum erreicht hatte. Entfernte man aber nach diesem Versuche die disponible Ladung sammt den Rückständen bis sich keine Potentialdifferenz der Belegungen mehr zeigte, und liess hierauf die Leydnerflasche unberührt stehen, so trat bei nach Wochen erneuerter Untersuchung meist in wenigen Minuten dasselbe Maximum ein. Dieses Verhalten lässt sich nur daraus erklären, dass Rückstände in dem Glase zurückgeblieben waren, die unserer Beobachtung entgangen sind.

In dem ersten der erwähnten Versuche muss der ganze Rückstand, welchen die Leydnerflasche aufnehmen kann, entwickelt werden, der zweite findet aber schon einen Theil desselben entwickelt vor, so dass die ihm entsprechende Elektricitätsaufnahme des Condensators entfällt, und der Endzustand dadurch früher erreicht wird.

Da wir bei der Entladung warteten, bis keine Potentialdifferenz der Belegungen mehr sichtbar war, aber dessenungeachtet Rückstände zurückblieben, könnte man zu der Annahme verleitet werden, dass diesen Rückständen überhaupt keine disponible Ladung mehr entspreche. Sicher werden dieselben schon durch einen sehr geringen Druck im Diëlektricum zurückgehalten, ob sie aber gar keiner Potentialdifferenz mehr bedürfen, könnte nur durch Elektrometer von ganz verschwindender Capacität entschieden werden.

Die der wahren Leitung entsprechenden Ströme können erst nach beendeter Rückstandsbildung beobachtet werden, d. i. wenn die Stromstärke einen constanten Werth angenommen hat, weil nur dann die in jedem Zeittheilchen zugeführte Elektricitätsmenge genau der in Wärme umgesetzten gleich ist. Die Zeit, welche bis zum Eintritte dieses Zustandes verstreicht, ist verschieden je nach der Substanz und den Versuchsbedingungen, am längsten bei grosser Elektrodendistanz.

Wir sind aber jetzt auch im Stande, wie früher versprochen, eine weitere Ursache der auffallend starken und lange anhaltenden Rückstandsströme bei grosser Elektrodendistanz anzugeben (vergl. Tab. XIIa). Es hängt nämlich die Rückstandsmenge, welche ein unvollkommenes

Diëlektricum aufnehmen kann, wesentlich von der Menge desselben selbst ab. Sie wird unter sonst gleichen Umständen (gleicher diëlektrischer Spannung) der Dicke des durchströmten Diëlektricums proportional sein. Dementsprechend muss auch die Summe der zur Rückstandsbildung verbrauchten Ströme, — welche wir eben beobachteten, — mit der Elektrodendistanz wachsen[1]).

In der Periode der Rückstandsbildung haben wir Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze mit der diëlektrischen Spannung beobachtet, und da sich die wahre Leitung aus dem Rückstande entwickelt, gewissermaassen dessen Endzustand darstellt, finden analoge Abweichungen auch bei der wahren Leitung statt, wie man aus den Werthen der letzten Colonne (für lange Durchströmung) der Tabellen VIII und XIII sieht. Es wächst eben die Fähigkeit eines unvollkommenen Diëlektricums, die ihr mitgetheilte Elektricitätsmenge in Wärme umzusetzen, langsamer als der Druck der entsprechenden elektromotorischen Kraft. Die Abweichungen steigern sich mit der diëlektrischen

1) Durch diese Ueberlegung klärt sich auch ein scheinbarer in dem Abschnitte über Rückstandsbildung enthaltener Widerspruch auf. Es wurde daselbst gesagt, dass die wieder zu Tage tretende Rückstandsmenge mit der Spannung im Condensator abnehme, andrerseits aber doch bei gleichbleibender Potentialdifferenz der Platten mit der Elektrodendistanz wachse. Die grössere Elektrodendistanz vermindert allerdings die Spannung und es sinkt daher auch die von einer Masseneinheit des Diëlektricums gelieferte Rückstandsmenge, aber auch die Rückstand enthaltende Gesammtmasse des Diëlektricums ist grösser geworden.

Ich will hier noch eine Fehlerquelle hervorheben, welche bei meinen Stromstärkenbestimmungen auftritt, die aber leider in ihrem Umfange zu spät erkannt wurde, um vermieden zu werden. Die als Elektroden dienenden Metallplatten waren ganz von der diëlektrischen Flüssigkeit umgeben, so dass die durchströmende Elektricität ihren Weg nicht nur durch die zwischen den Elektroden befindliche Flüssigkeit, sondern auch über den Rand derselben in ausgebauchten Stromlinien von einer Platte zur anderen nimmt. Würde nur wahre Leitung stattfinden, wie ich anfangs vermuthete, so wären die aus elektrischer Diffusion entspringenden Fehler gering, da die Flächenausdehnung der Elektroden sehr gross im Vergleiche zu ihrer Distanz war. Anders stellt sich aber die Sache bei Rückstandsbildung. Diese erfolgt in der ganzen Flüssigkeitsmasse, welche von Stromlinien durchzogen wird und hängt wesentlich von der Menge der rückstandaufnehmenden Substanz ab; überdies verläuft sie in den verschiedenen Theilen der Füssigkeit mit verschiederer Geschwindigkeit, je nach der daselbst herrschenden diëlektrischen Spannung. Die beobachteten Ströme entsprechen daher nicht der zwischen den Elektroden allein, sondern der in der ganzen Flüssigkeitsmenge stattfindenden Rückstandsbildung. Besonders an den schwachen Strömen in späteren Perioden dürfte die Rückstandsbildung in der ausserhalb der Elektroden befindlichen Substanz bedeutenden Antheil haben. Glücklicherweise standen die Elektroden nur 3 mm von der seitlich begrenzenden Gefässwand ab, so dass die die Elektroden umgebende, durchströmte Flüssigkeitsmenge sehr gering war.

Spannung, doch gelten diese Sätze nur für die in unseren Versuchen angewandten niederen Spannungen.

Zur Constatirung wahrer Leitung erübrigt es noch, den Nachweis durch den Strom bewirkter Erwärmung des Diëlektricums zu erbringen. Entsprechende Versuche wären bei meiner Anordnung ganz aussichtslos, da die minimalen auftretenden Wärmemengen sich der Beobachtung entziehen. Dass aber bei Verwendung stärkerer Ströme eine merkliche Erwärmung eintritt, ist eine unbestrittene Thatsache. Siemens[1]) wies die Erwärmung einer oft geladenen und entladenen Leydnerflasche, Borgmann[2]) und Naccari u. Bellati[3]) jene flüssiger Isolatoren nach.

VI.

Ehe ich zur Mittheilung der mit anderen Diëlektricis gewonnenen Resultate übergehe, will ich eine oft die Versuche störende Erscheinung beschreiben.

Es wird vielleicht aufgefallen sein, dass die Stromstärkenbestimmung in dem Terpentinölcondensator von kleinster Elektrodendistanz mit der Beobachtung bei 4 Daniell abbricht. (Tab. X.) In dem Momente des Ueberganges von 4 auf 8 Daniell trat nämlich eine Veränderung ein, welche die folgenden Beobachtungen unbrauchbar macht. Während man für 8 Daniell einen Ausschlag von höchstens 120 Theilstrichen hätte erwarten sollen, betrug derselbe weit über 500 Theilstriche, so dass er auf der Scala nicht mehr beobachtet werden konnte. Zwar nahm die Intensität dieses Stromes mit der Zeit ab, übertraf aber immer weit den zu erwartenden Werth.

Diese plötzliche, scheinbare Verringerung des Widerstandes des Diëlektricums will ich als Deformation, und den sie hervorbringenden Strom als deformirenden Strom bezeichnen.

Anfangs meinte ich, dass ein plötzlich eingetretener Contact, etwa durch ein sich aufrichtendes Härchen erzeugt die bessere Leitung veranlasse[4]), aber oftmaliges, sorgfältiges Filtriren der Flüssigkeit und Wiederzusammensetzen des Condensators brachten diese Erscheinung

---

1) Siemens, Pogg. Ann. Bd. 114, S. 137, 1861.

2) Borgmann, Journ. d. russ. phys. chem. Ges. (1), 18, S. 1, 1886. Beibl. Bd. 11, S. 50.

3) Naccari u. Bellati, J. de phys. (2), I. pag. 430.

4) An convective Entladung, bedingt durch flottirende Staubtheilchen, ist nicht zu denken, da sich deren eigenthümlicher Charakter wenigstens zum Theile auch bei niedereren Spannungen hätte bemerkbar machen müssen.

unter vielen beobachteten Fällen nur einmal zum Verschwinden, hingegen fiel bei diesen Versuchen alsbald auf, dass die Deformation bei derselben Probe fast stets bei derselben Aenderung der Potentialdifferenz der Platten eintrat, so z. B. in der erwähnten mit Terpentinöl angestellten Versuchsreihe beim Uebergange von 4 auf 8 Daniell. Es macht den Eindruck, als ob, sobald die Spannung im Diëlektricum einen gewissen Werth überschreitet, Deformation eintrete.

Wir hätten demnach in der Deformation eine ganz eigenthümliche, noch nicht näher erforschte Erscheinung vor uns. Für diese Auffassung und gegen die Annahme einer rein accidentellen Entladung spricht ferner der Umstand, dass die plötzliche Deformation nur das Anfangsglied einer Reihe langsam fortschreitender Veränderungen bildet, welche das Diëlectricum unter dem Einflusse des deformirenden Stromes erfährt.

Hat nämlich der deformirende Strom nur kurze Zeit eingewirkt, so ist auch das Diëlektricum wenig verändert; d. h. geht man auf Versuche mit niederer gespannten Strömen zurück, so ergeben diese nur wenig grössere Stromstärken, als vor eingetretener Deformation beobachtet worden waren. Je länger aber der deformirende Strom einwirkt, desto stärker sind die Veränderungen der durchflossenen Substanz, indem sie auch für niederer gespannte Ströme scheinbar immer besser leitend wird. Die Unterschiede der bei gleichen Spannungen vor und nach der Deformation beobachteten Stromstärken werden immer grösser, bis endlich nach langer Einwirkung des deformirenden Stromes der Widerstand für alle Spannungen dauernd verringert erscheint. Doch selbst nach Ablauf dieses Processes wird das Verhalten der Substanz nie mehr ganz constant. Fortwährend treten langsam verlaufende Schwankungen in dem Widerstande derselben auf.

Diese eigenthümliche Deformation trat bei fast einem Viertel der untersuchten Terpentinölproben auf, desgleichen wurde sie — doch nur in Ausnahmsfällen — bei Petroleumäther, Vaselinöl und Ricinusöl angetroffen. Bedingung ihres Zustandekommens ist vor Allem sehr geringe Elektrodendistanz (in meinen Versuchen = 0, 145 mm). Um ferner den Unterschied zwischen Deformation und gewöhnlichen Landungsvorgängen beobachten zu können, ist es nothwendig, die Versuche mit geringer Potentialdifferenz der Platten zu beginnen.

Ich führe in der folgenden Tabelle XIV die Werthe an, welche sich für die eingangs erwähnte Probe Terpentinöl nach $2^1/_4$ stündiger Einwirkung des deformirenden Stromes ergaben. Sie sind zum Vergleiche mit den vor der Deformation beobachteten Stromstärken zusammengestellt.

Tabelle XIV.

d = 0,15 mm W = 1022 · 10⁶ S. E.
D. = 305 Th. t = 24⁰

E	Vor der Deformation: i	$\frac{i}{E}$	Nach der Deformation: i	$\frac{i}{E}$
1	22	22	43	43
2	36	18	71,6	35,8
4	62	15,5	122,5	30,6
8	—		201	25,01

Terpentinöl ist durch Deformation scheinbar doppelt so gut leitend geworden. Auffallend ist, wie genau die Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze in beiden Beobachtungsreihen übereinstimmen[1]).

Mit der Deformation lassen sich vielleicht mehrere vereinzelt auftretende Vorgänge in Dïelektricis in Zusammenhang bringen. So schien in einem Falle der Widerstand von Terpentinöl nach sehr langer Durchströmung (über 12^h) sich wieder zu verringern, nachdem er ein Maximum passirt hatte. Manchmal nahm der scheinbare Widerstand einiger Dïelektrica (besonders der Destillationsproducte des Petroleums) vom Beginne der Versuche an ab, passirte ein Minimum, um weiterhin zuzunehmen. Dieselben Proben zeigten gerade entgegengesetzte Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze als die gewöhnlich beobachteten[2]), doch sind alle diese Erscheinungen bei flüssigen Dïelektricis seltene Ausnahmen.

Zum Schlusse möchte ich noch auf die Aehnlichkeit aufmerksam machen, die in mancher Beziehung zwischen Deformation und Ueberschreiten der Elasticitätsgrenze besteht.

---

1) Eine der Deformation verwandte Erscheinung beobachtete wohl auch Quincke bei der Untersuchung der elektrischen Doppelbrechung. Er sagt (Wied. Ann. Bd. 19, S. 707): „Terpentinöl verlor, nachdem es längere Zeit elektrisirt worden war, plötzlich sein Isolationsvermögen, und war dann keine elektrische Doppelbrechung mehr an ihm zu beobachten."

2) Bei den wenigen untersuchten festen Isolatoren ist dies sogar die Regel.

(Schluss folgt.)



Ueber die Bewegungen suspendirter Theilchen in der Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten.

Von

C. Fuchs.

Ein wichtiges Experiment der Biologie besteht darin, dass man in Wasser, in welchem Schwärmsporen sich befinden, ein Glasröhrchen mit enger Oeffnung taucht, in welchem sich Apfelsäure befindet, welche von dort aus in das Wasser diffundirt. Man bemerkt dann, dass die Schwärmsporen sich sofort der Apfelsäure zuwenden und gegen die Mündung des Röhrchens schwimmen. Wenn man diesen Versuch mit mehreren Flüssigkeiten macht, findet man, dass einzelne anziehend, andere abstossend, wieder andere bei geringerer Concentration anziehend, bei höherer Concentration aber abstossend wirken. Man war geneigt, namentlich in der letzten Erscheinung, eine Art Willensäusserung zu erblicken. Es lässt sich aber zeigen, dass rein physikalische Kräfte noch vollkommen ausreichen, diese Erscheinungen zu erklären. Andere verwandte Erscheinungen wollen wir nachträglich besprechen.

Wir müssen etwas ausholen.

Betrachten wir eine homogene Mischung zweier Flüssigkeiten A und B, welche in unvermischtem Zustande die Dichten ϱ_1 und ϱ_2 besitzen. Wenn in der Volumeinheit der Mischung das A-Volumen v_1 und das B-Volumen v_2 enthalten ist, so dass $v_1 + v_2 = 1$ ist, dann sind in der Mischung die Dichten von A und B gleich $v_1 \varrho_1$ und $v_2 \varrho_2$.

Wenn wir eine homogene Flüssigkeit N spalten, d. h. in zwei Hälften zerreissen wollen, dann müssen wir die Cohäsion der Flüssigkeit überwinden. Wir müssen dann pro Flächeneinheit des Risses eine Arbeit leisten, welche offenbar dem Quadrate des Dichte s der Flüssigkeit proportional ist, denn die Vertheilung der Flüssigkeitsmassen ist bei verschiedenen Dichten dieselbe, nur haben je zwei einander anziehende Volumelemente bei n-facher Dichte eine n-fache

Masse in sich, ziehen sich also n^2-mal stärker an. Die Spaltungsarbeit einer Flüssigkeit pro Flächeneinheit können wir also mit $s^2 m$ bezeichnen.

Dieses Resultat wenden wir auf unsere Mischung von A und B an. Wenn wir dieselbe vertical spalten wollen, dann haben wir folgende vier Arbeiten zu leisten:

Rechts vom Risse haben wir A-Flüssigkeit von der Dichte $v_1 \varrho_1$; diese A-Flüssigkeiten müssen wir abreissen

1. von der links vom Risse gelegenen A-Flüssigkeit von der Dichte $v_1 \varrho_1$ unter Ueberwindung der Cohäsion; die hierbei pro Flächeneinheit von uns geleistete Arbeit bezeichnen wir mit $(v_1 \varrho_1)^2\, a$ oder $v_1^2 \varrho_1^2 a$;
2. von der links vom Risse gelegenen B-Flüssigkeit von der Dichte $v_2 \varrho_2$ unter Ueberwindung der Adhäsion; die hierbei pro Flächeneinheit geleistete Arbeit bezeichnen wir mit $(v_1 \varrho_1)(v_2 \varrho_2)\, c$, da sie offenbar den Dichten von A rechts und B links proportional ist; einfacher schreiben wir $v_1 v_2 \varrho_1 \varrho_2 c$;

sodann reissen wir die rechts vom Risse gelegene B-Masse von der Dichte $v_2 \varrho_2$ ab

3. von der links gelegenen A-Flüssigkeit von der Dichte $v_1 \varrho_1$ unter Ueberwindung der Adhäsion, wobei wir die Arbeit leisten $(v_1 \varrho_1)(v_2 \varrho_2)\, c$ oder $v_1 v_2 \varrho_1 \varrho_2 c$;
4. von der links gelegenen B-Flüssigkeit von der Dichte $v_2 \varrho_2$ unter Ueberwindung der Cohäsion, wobei wir die Arbeit leisten $(v_2 \varrho_2)^2 b$ oder $v_2^2 \varrho_2^2 b$.

Die Zerreissungsarbeit der Mischung von A und B ist also

$$v_1^2 \varrho_1^2 a + v_2^2 \varrho_2^2 b + 2 v_1 v_2 \varrho_1 \varrho_2 c,$$

da die zweite und dritte Arbeit gleich sind. Dieselbe Arbeit, aber mit negativem Vorzeichen, haben beim Zerreissen die Molekularkräfte geleistet.

Ehe wir weiter gehen, haben wir noch die Arbeit zu berechnen, welche die Molekularkräfte leisten, wenn wir die Oberfläche O eines festen Körpers M mit der Oberfläche unserer Mischung in Berührung bringen. Hierbei werden nur zwei Arbeiten geleistet:

1. die A-Flüssigkeit von der Dichte $v_1 \varrho_1$ wird, dem Zuge der Adhäsion an M folgend, an M angelegt; die Arbeit ist der Dichte von A proportional und kann pro Flächeneinheit geschrieben werden $v_1 \varrho_1 \alpha$;
2. die B-Flüssigkeit von der Dichte $v_2 \varrho_2$ wird ebenfalls dem Zuge der Anziehung an M folgend an O angeschmiegt, wobei analog die Arbeit $v_2 \varrho_2 \beta$ durch die Molekularkräfte pro Flächeneinheit geleistet wird.

Die Benetzung liefert also die Molekulararbeit pro Oberflächeneinheit

$$v_1 \varrho_1 \alpha + v_2 \varrho_2 \beta.$$

Jetzt können wir die Arbeit der Molekularkräfte berechnen, welche geleistet wird, wenn wir den festen Körper M vom Volumen V und der Oberfläche O in die Mischung der Flüssigkeiten A und B eintauchen.

Zunächst müssen wir für M einen Hohlraum vom Volumen V und der Oberfläche O schaffen. Dies geschieht, indem wir die Mischung über einen Riss von der Flächenausdehnung $\frac{1}{2} O$ zerreissen, da wir hierdurch zwei freie Flächen je gleich $\frac{1}{2} O$ erhalten. Hierbei leisten die Molekularkräfte die Arbeit

$$-\tfrac{1}{2} O\,(v_1^2 \varrho_1^2 a + v_2^2 \varrho_2^2 b + 2 v_1 v_2 \varrho_1 \varrho_2 c).$$

Wenn wir dann M in den Hohlraum einführen, dann leisten die Molekularkräfte die Benetzungsarbeit

$$+ O\,(v_1 \varrho_1 \alpha + v_2 \varrho_2 \beta).$$

Die Gesammtarbeit, welche die Molekularkräfte leisten, wenn M in die homogene Mischung von A und B eingeführt wird, ist also

$$E = O\,[v_1 \varrho_1 \alpha + v_2 \varrho_2 \beta - \tfrac{1}{2} v_1^2 \varrho_1^2 a - \tfrac{1}{2} v_2^2 \varrho_2^2 b - v_1 v_2 \varrho_1 \varrho_2 c].$$

Da die ϱ aber unzertrennliche Begleiter der Constanten bleiben, so wollen wir die ϱ in die Constanten einbeziehen und demgemäss schreiben

$$E = O\,(v_1 \alpha + v_2 \beta - \tfrac{1}{2} v_1^2 a - \tfrac{1}{2} v_2^2 b - v_1 v_2 c).$$

Wir wollen sogar den Factor O weglassen, d. h. die Arbeit auf die Flächeneinheit beziehen, um uns die Uebersicht über die Capillargrössen möglichst klar zu erhalten.

Nun gehen wir einen Schritt weiter. In einem Punkte C inmitten eines Mediums B soll sich reine Flüssigkeit A befinden, deren Concentration v_1 der Entfernung r von C proportional abnimmt, während natürlich die Concentration v_2 von B der Entfernung r proportional zunimmt. Die Steigerung des v_2, also dv_2/dr wollen wir mit v_2' bezeichnen. Für die Entfernung R, in welcher $v_1 = 0$, $v_2 = 1$ wird, gilt dann $R v_2' = 1$. Nun nehmen wir an, dass unser suspendirtes Theilchen in der Mischungsschicht von C weg um dr verschoben wird. Die Arbeit, welche die Molekularkräfte der Flüssigkeiten hierbei leisten, findet man, indem man die Arbeit E nach r differenzirt, wobei v_1 und v_2 variabel sind. Wegen $v_1 + v_2 = 1$ ist dabei $v_1' = - v_2'$. Auf die Einheit des Weges berechnet ist dann die Arbeitsleistung der Molekularkräfte

$$K = \frac{d\,E}{d\,r} = v_2'\,([\beta - \alpha] + [v_1 a - v_2 b] + [v_2 - v_1]\,c)$$

Da aber die Arbeit pro Wegeinheit numerisch gleich ist der Kraft, so ist K zugleich die Kraft, mit der das suspendirte Theilchen pro Oberflächeneinheit von C weg bewegt wird.

Diese Formel liefert nun sehr auffallende Folgerungen: a priori wird wohl jedermann meinen, wenn ein suspendirtes Theilchen in der Mischungsschicht der Flüssigkeiten A und B in der Richtung nach der einen Flüssigkeit zu schwimmen beginnt, dass das Theilchen von dieser Flüssigkeit stärker angezogen wird, als von der anderen Flüssigkeit, überhaupt dass das Theilchen nur dann sich der einen oder anderen Flüssigkeit zuwenden wird, wenn die Flüssigkeiten mittels ihrer Molekularkräfte auf das Theilchen wirken. Unsere Formel zeigt nun, dass diese Voraussetzung falsch ist. Ein suspendirtes Theilchen wird selbst dann der einen oder anderen Flüssigkeit zutreiben, wenn α und β gleich Null sind, d. h., wenn die Flüssigkeiten gar keine Wirkung (Molekularanziehung) auf das Theilchen ausüben. Die wirkenden Kräfte sind dann die Cohäsionen und die gegenseitige Adhäsion der beiden Flüssigkeiten. Wir wollen nun die Wirkungen der einzelnen Kräfte betrachten. Activ sind die Adhäsionen α und β der beiden Flüssigkeiten A und B an das suspendirte Theilchen M, die Cohäsionen a und b der beiden Flüssigkeiten, und die Adhäsionen der Flüssigkeiten an einander.

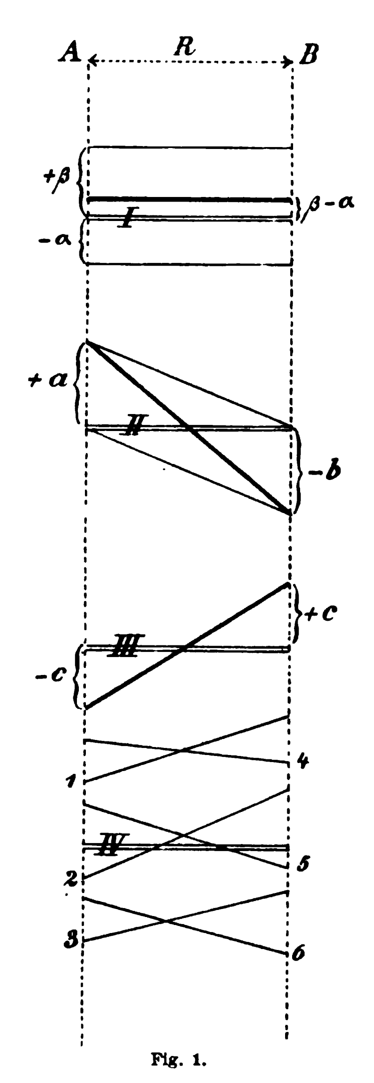


Fig. 1.

1. α, β, Fig. 1, I. Die Adhäsion α der Flüssigkeit A an das Theilchen M liefert einen in der ganzen Mischungsregion sich gleichbleibenden Zug gegen A, da α in der Formel für K das negative Vorzeichen hat; analog liefert β einen in der ganzen Mischungsschicht gleich bleibenden Zug nach rechts, gegen das reine B, da β in der Formel das positive Vorzeichen hat. Die Resultirende dieser beiden entgegengesetzten Kräfte ist eine in der ganzen Mischungsschicht gleich blei-

bende Kraft, welche M entweder gegen A oder gegen B führt, je nachdem α oder β grösser ist.

In der Fig. 1 I bedeutet der Doppelstrich die orthogonale Trajectorie der Mischungsschicht. Eine positive, d. h. nach rechts gegen B in der Richtung der positivem r wirkende Kraft ist als proportionale positive Ordinate verzeichnet, während die negativen Kräfte, welche nach links, gegen A, wirken, durch negative Ordinaten dargestellt werden. Die Kräfte, welche von α und β herstammen, sind demnach als horizontale Linien dargestellt, und ebenso ihre stark ausgezogene Resultante.

Wir können sagen:

J e d e d e r b e i d e n F l ü s s i g k e i t e n w i r k t v e r m ö g e i h r e r A d h ä s i o n a n d a s s u s p e n d i r t e T h e i l c h e n a n z i e h e n d a u f d a s s e l b e.

2. a, b, Fig. 1, II. Die Cohäsion (a) der Flüssigkeit A liefert eine positive, d. h. nach rechts wirkende Kraft, welche für $r = 0$ oder $v_1 = 1$ den Werth a, für $r = R$ oder $v_1 = 0$ den Werth $= 0$ besitzt. Analog liefert die Cohäsion (b) der Flüssigkeit B eine negative, d. h. nach links wirkende Kraft, welche für $r = R$ oder $v_2 = 1$ den Werth b, für $v = 0$ oder $v_2 = 0$ den Werth $= 0$ besitzt. Wir können dem entsprechend sagen:

J e d e F l ü s s i g k e i t w i r k t v e r m ö g e i h r e r C o h ä s i o n a u f d a s s u s p e n d i r t e T h e i l c h e n a b s t o s s e n d, u. zw. proportional ihrer Concentration.

Die Resultante wird durch eine Gerade dargestellt, welche bei $v = 0$ die Ordinate $+ a$, bei $r = R$ die Ordinate $- b$ besitzt, also die Nulllinie nothwendig innerhalb der Mischungsschicht schneidet. Die Kräfte sind sowohl rechts, als auch links diesem indifferentem Punkte zugewendet.

Wir können also sagen:

V e r m ö g e d e s Z u s a m m e n w i r k e n s d e r C o h ä s i o n e n d e r F l ü s s i g k e i t e n w e r d e n d i e s u s p e n d i r t e n T h e i l c h e n s c h e i n b a r v o n e i n e r i n d i f f e r e n t e n L a m e l l e d e r M i s c h u n g s s c h i c h t a n g e z o g e n mit einer Kraft, die um so grösser ist, je entfernter ein Theilchen von der indifferenten Lamelle sich befindet.

3. c. Fig. 1 III. Die Adhäsion der Flüssigkeiten A und B an einander liefert eine Kraft, die abermals durch eine Gerade dargestellt wird, deren Ordinate für $r = 0$ oder $v_1 = 1$, $v_2 = 0$ den Werth $= - c$, für $r = R$ oder $v_1 = 0$, $v_2 = 1$ den Werth $= + c$ besitzt. Sie schneidet die Nulllinie in der Mitte der Mischungsschicht. Rechts und links von diesem Schnittpunkt sind die Kräfte von diesem Punkte abgewendet.

Wir können also sagen:

Vermöge der Adhäsion der beiden Flüssigkeiten an einander werden die suspendirten Theilchen scheinbar von einer in der Mischungsschicht gelegenen indifferenten Lamelle abgestossen, u. zw. um so stärker, je entfernter ein Theilchen von dieser Schicht ist.

Alle fünf Kräfte zusammengenommen liefern eine Resultante, deren Curve sich leicht durch eine Formel darstellen lässt. Wir brauchen nur in unserer letzten Formel für K überall v_1 durch $1 - v_2$ zu ersetzen, und erhalten dann:

$$K = v_2' \; [(\beta - \alpha) + (a - c)] + 2 v_2 \, v_2' \; [c - (\frac{a + b}{2})]$$

Hierbei ist nur v_2 variabel. Wir haben also die Formel einer geraden Linie vor uns, welche jede beliebige Lage zur Nulllinie haben kann, die mit endlichen Ordinaten verbunden ist, da die Constanten α, β, a, b, c von einander unabhängig sind und jeden beliebigen positiven Werth haben können.

Wir bleiben nun bei der anfänglichen Annahme, dass die Flüssigkeit A aus einem eingetauchten Röhrchen in das Medium B diffundirt, in welchem sich suspendirte Körperchen befinden. Wir betrachten nun zunächst die Fälle, I., dass die Curve der Resultirenden eine Steigerung nach rechts zu hat und schreiben die eintretenden Wirkungen ausschliesslich den Kräften der Flüssigkeit A zu.

1. Fig. 1, IV, 1. Die Curve des Resultirenden liegt ganz oberhalb der Nulllinie, d. h. alle Ordinaten sind positiv, oder das Theilchen wird unbedingt nach rechts bewegt. Es entsteht dann der Schein, dass A das Theilchen abstösst, und zwar um so stärker, je weniger concentrirt A ist, gleichsam als würde die Empfindlichkeit des Theilchens durch concentrirtes A abgestumpft.

2. Fig. I, IV, 2. Die Curve schneidet die Nulllinie in irgend einem Punkte, so dass die Kraft rechts vom Schnittpunkt nach rechts, links nach links wirkt. Es entsteht dann der Schein, dass A in schwacher Concentration auf das Theilchen abstossend wirkt; dass diese Abstossung aber bei höherer Concentration kleiner wird und endlich in Anziehung übergeht, als fände das Theilchen erst bei hoher Concentration den Geschmack.

3. Fig. 1, IV, 3. Die Curve liegt ganz unter der Nulllinie, zeigt aber überall eine nach links gerichtete Kraft an. Dann entsteht der Schein, dass das Theilchen von A angezogen wird, u. zw. um so stärker, je concentrirter A ist, als würde das Theilchen immer mehr gefesselt.

II. Nun nehmen wir an, dass die Curve nach rechts zu ein Gefälle habe. Wir betrachten abermals drei Fälle:

4. Fig. 1, IV, 4. Die Curve liegt ganz oberhalb der Nulllinie. Das gibt den Schein, dass A auf das Theilchen abstossend wirkt, u. zw. um so stärker, je concentrirter es ist, als bedürfte das stumpfe Theichen starker Reizung.

5. Fig. 1, IV, 5. Die Curve schneidet die Nulllinie, zeigt also links positive, rechts negative Kräfte an. Das gibt den Schein, dass A in schwacher Concentration anziehend wirkt; dass diese Anziehung aber bei höherer Concentration in Abstossung übergeht, als würde das Theilchen überreizt.

6. Fig. 1, IV, 6. Die Curve liegt gänzlich unter der Nulllinie, zeigt aber lauter negative Kräfte. Dann zieht A scheinbar das Theilchen an, aber bei höherer Concentration schwächer, als bei niederer Concentration, als würde im ersteren Falle das Theilchen betäubt.

Wir sehen, dass alle diese lediglich auf Molekularwirkungen beruhenden Erscheinungen gar sehr geeignet sind, den Eindruck zu machen, als handelte es sich hier um Sinnesreize und Geschmacksäusserungen, d. h. um Lebenssymptome, als was sie heute auch gedeutet werden, dass aber thatsächlich die anorganische Physik völlig ausreicht, diese Erscheinungen zu erklären.

Speciell an den Schwärmsporen bemerkt man, dass sie sich nicht nur progressiv zu oder von A bewegen, sondern dass sie auch das Vorderende dem A zu-, oder aber von ihm abwenden. Diese Drehungen erklären sich ganz einfach durch die Annahme, dass das Vorderende an A stärker adhärirt, als das Hinterende, wenn ersteres sich dem A zuwendet; dass das Vorderende aber an A schwächer adhärirt, als das Hinterende, wenn ersteres sich von A abwendet.

Nehmen wir nun an, dass A nicht von einem Punkte abdiffundirt, sondern dass zwei Medien A und B neben einander liegen, und dass zwischen ihnen sich eine Mischungsschicht gebildet hat. In der ganzen Flüssigkeit sollen Körperchen von einer gewissen Art vertheilt sein. Die Curve der Kraft, welche in der Mischungsschicht auf ein Theilchen wirkt, wird dann in der Praxis nicht eine Gerade sein, weil v_2^1 oder $v_1^1 = - v_2^1$ nicht überall in der Mischungsschicht gleichen Werth besitzt, da v_2^1 an den Grenzen der Mischungsschicht sich dem Werthe $= 0$ nähert. Die Kraftcurve wird also an beiden Enden in die Nulllinie übergehen. Ihr Verlauf wird dann die vier Typen der Fig. 2 zeigen können.

Typus I. Die Kraft ist überall nach rechts gerichtet; alle Theilchen werden nach B wandern und sich dort häufen, während A körnerfrei bleibt.

Typus II. Rechts ist die Kraft nach rechts, links nach links gerichtet; zwischen den körnerhaltigen Medien A und B wird sich eine körnerfreie Mischungschicht ausbilden.

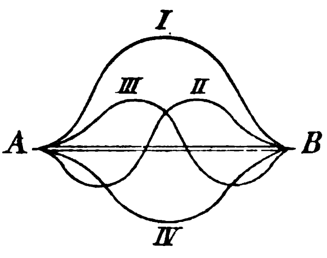


Fig. 2.

Typus III. Rechts ist die Kraft nach links, links nach rechts gerichtet. Alle Körner sammeln sich dann in der Mischungsschicht, während die Medien körnerfrei bleiben.

Typus IV. Die Kraft ist überall nach links gerichtet. Dann sammeln sich alle Körner in A, während B körnerfrei wird.

Derartigen Wanderungen und Gruppirungen suspendirter Körner begegnet man aber bei mikroskopischen Studien auf Schritt und Tritt. Bis heute aber war noch keine Erklärungsbasis gefunden.

Die Gleichungen der Drehung eines freien starren Körpers um seinen Schwerpunkt.

Von

Adalbert Ryšánek.

Wenn Kräfte auf einem freien starren Körper wirken, so erzeugen sie eine fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes und eine drehende Bewegung um eine Schwerpunktsachse, welche im starren Körper ihre relative Lage mit der Zeit ändert. Die Gleichungen dieser drehenden Bewegung findet man in den Lehrbüchern der theoretischen Mechanik derart abgeleitet, dass die Rolle, welche die bei dieser Drehung auftretenden Fliehkräfte spielen, nicht genug ersichtlich wird. Nun lassen sich aber diese Gleichungen unter Berücksichtigung dieser Fliehkräfte auf folgende elementare Weise leicht ableiten.

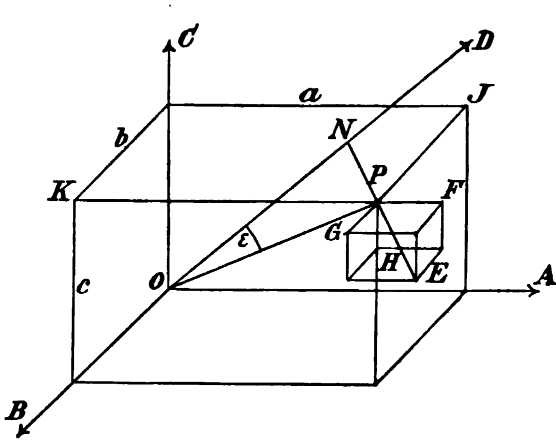


Fig. 1.

Es sei (Fig. 1) O der Schwerpunkt, OA, OB und OC seien die drei rechtwinkeligen Hauptachsen im Schwerpunkte (freie Achsen) und OD die augenblickliche Drehachse des freien starren Körpers. Um OD gehe die Drehung mit einer Winkelgeschwindigkeit ω rechtsum vor sich. Schliesst OD mit den Hauptachsen die Winkel α, β und γ ein und bezeichnet man mit ω_a, ω_b und ω_c die Componenten von ω nach diesen Achsen, so hat man:

$$\omega_a = \omega \cos\alpha, \quad \omega_b = \omega \cos\beta \quad \text{und} \quad \omega_c = \omega \cos\gamma. \qquad 1)$$

Betrachten wir nur einen materiellen Punkt P mit der Masse m. Seine rechtwinkeligen Coordinaten in Bezug auf die Hauptachsen als Coordinatenachsen seien a, b und c. Auf P wirken ein: erstens die durch die Drehung um OD entstehende Fliehkraft f und zweitens die Resultierende der äusseren Kräfte k. Von beiden Kräften sollen nun die Drehmomente in Bezug auf die Hauptachsen berechnet werden.

1. Drehmomente der Fliehkräfte: Hat der Punkt P von OD die Entfernung $PN = r$, so dreht er sich um OD mit der Geschwindigkeit $r\omega$. Aus dieser Drehung entsteht eine nach der Verlängerung des Radius r wirkende Fliehkraft $PE = f$, welche gegeben ist durch die Gleichung:

$$f = m \times \frac{r^2 \omega^2}{r} = m r \omega^2.$$

Zerlegt man PE in Componenten nach den Achsen OA, OB und OC, so bekommt man: $PF = m r \omega^2 \cos (r, a)$, $PG = m r \omega^2 \cos (r, b)$ und $PH = m r \omega^2 \cos (r, c)$, unter (r, a), (r, b) und (r, c) die Winkel, welche PE mit den Hauptachsen einschliesst, verstanden. Verlegt man den Angriffspunkt P von PG in die Ebene AOC nach J, so gibt diese Kraft in Bezug auf OC das Drehmoment: $m r \omega^2 \cos (r, b) \times a$ rechtsum. Ebenso verlege man den Angriffspunkt P von PF in die Ebene BOC nach K. Diese verlegte Kraft gibt in Bezug auf dieselbe Achse OC das Drehmoment: $m r \omega^2 \cos (r, a) \times b$ linksum. Beide Kräfte geben also ein resultirendes Drehmoment d in Bezug auf OC rechtsum:

$$d = m a \omega^2 \cdot r \cos (r, b) - m b \omega^2 \cdot r \cos (r, a).$$

Bezeichnet man mit ξ, η und ζ die Coordinaten von N in Bezug auf die Hauptachsen, so bekommt man die Projectionen von r auf diese Achsen durch die Gleichungen:

$$r \cos (r, a) = a - \xi,\quad r \cos (r, b) = b - \eta \text{ und } r \cos (r, c) = c - \zeta. \quad (2$$

Mithin: $d = m a \omega^2 (b - \eta) - m b \omega^2 (a - \xi) = m b \omega^2 \xi - m a \omega^2 \eta$.

Setzt man $\measuredangle PON = \varepsilon$, so hat man, weil OP mit den Achsen Winkel bildet, deren Cosinus

$$\frac{a}{OP}, \frac{b}{OP} \text{ und } \frac{c}{OP}$$

sind:

$$\cos \varepsilon = \frac{a}{OP} \cos \alpha + \frac{b}{OP} \cos \beta + \frac{c}{OP} \cos \gamma.$$

Nun ist $OP \cos \varepsilon = ON$ und $ON \cos \alpha = \xi$, mithin: $\xi = OP \cdot \cos \varepsilon \cdot \cos \alpha$. Substituirt man hierin für $\cos \varepsilon$ den eben gefundenen Werth, so bekommt man für ξ und ebenso auch für η und ζ:

$$\xi = (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) \cos \alpha$$
$$\eta = (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) \cos \beta \qquad 3)$$
$$\zeta = (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) \cos \gamma$$

Daraus folgt:

$$d = m\, b\, \omega^2 (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) \cos \alpha - m\, a\, \omega^2 (a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) \cos \beta.$$

Führt man hier die Multiplication aus, bildet hierauf ähnliche Ausdrücke für alle anderen Massentheilchen, summirt dieselben und setzt die gemeinsamen Factoren $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ und ω^2 vor das Summenzeichen, so ergibt sich als resultirendes Drehmoment D_c aller Fliehkräfte in Bezug auf die Achse OC rechtsum:

$$D_c = \omega^2 \cos^2 \alpha \Sigma (m a b) + \omega^2 \cos \alpha \cos \beta \Sigma (m b^2) + \omega^2 \cos \alpha \cos \gamma \Sigma (m b c) - \omega^2 \cos \alpha \cos \beta \Sigma (m a^2) - \omega^2 \cos^2 \beta \Sigma (m a b) - \omega^2 \cos \beta \cdot \cos \gamma \Sigma (m a c).$$

Da nun a, b und c die rechtwinkeligen Coordinaten von m in Bezug auf die Hauptachsen sind, so hat man:

$$\Sigma (m a b) = \Sigma (m a c) = \Sigma (m b c) = 0.$$

Mithin:

$$D_c = \omega \cos \alpha \cdot \omega \cos \beta \Sigma (m b^2) - \omega \cos \alpha \cdot \omega \cos \beta \Sigma (m a^2),$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung 1) und wegen $\Sigma (m c^2) - \Sigma (m c^2) = 0$:

$$D_c = \omega_a \ \omega_b [\Sigma (m b^2) + \Sigma (m c^2) - \Sigma (m c^2) - \Sigma (m a^2)].$$

Dieser Gleichung kann man auch die Form geben:

$$D_c = \omega_a \omega_b \left[\Sigma [m (b^2 + c^2)] - \Sigma [m (a^2 + c^2)] \right]$$

Bezeichnet man mit Q_a, Q_b und Q_c die Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt, so ist:

$$Q_a = \Sigma [m (b^2 + c^2)], \ Q_b = \Sigma [m (a^2 + c^2)] \text{ und } Q_c = \Sigma [m (a^2 + b^2)].$$

Durch Einführung dieser Bezeichnung erhält man für D_c und ebenso für die Drehmomente D_a und D_b um OA und OB rechtsum:

$$D_a = \omega_b \omega_c (Q_b - Q_c), \ D_b = \omega_c \omega_a (Q_c - Q_a) \text{ und } D_c = \omega_a \omega_b (Q_a - Q_b). \qquad (4$$

2. Drehmomente der äusseren Kräfte: Die resultirende k der äusseren Kräfte, welche auf m einwirken, gibt nach den Hauptachsen zerlegt die Componenten: $k \cos (k, a)$, $k \cos (k, b)$ und $k \cos (k, c)$, unter (k, a), (k, b) und (k, c) die Winkel verstanden, welche k mit den Hauptachsen bildet. In Bezug auf OC geben diese Componenten das Drehmoment rechtsum:

$a\, k \cos (k, b) - b\, k \cos (k, a)$, in Bezug auf OA: $b\, k \cos (k, c) - c\, k \cos (k, b)$ und in Bezug auf OB: $c\, k \cos (k, a) - a\, k \cos (k, c)$.

Bildet man ähnliche Ausdrücke für alle Massentheilchen und summirt,

so findet man als resultirende Drehmomente M_a, M_b und M_c der äusseren Kräfte um OA, OB und OC rechtsum:

$$M_a = \Sigma[b\,k\cos(k, c)] - \Sigma[c\,k\cos(k, b)],$$
$$M_b = \Sigma[c\,k\cos(k, a)] - \Sigma[a\,k\cos(k, c)]$$

und

$$M_c = \Sigma[a\,k\cos(k, b)] - \Sigma[b\,k\cos(k, a)].$$

3. Das gesammte Drehmoment um OA beträgt also $D_a + M_a$ und die daraus folgende Winkelbeschleunigung γ_a um OA findet man durch Division dieses Drehmomentes durch das Trägheitsmoment Q_a für diese Haupsachse, mithin:

$$\gamma_a = \frac{M_a + D_a}{Q_a}$$

oder nach Gl. 4:

$$\gamma_a = \frac{M_a + \omega_b\,\omega_c\,(Q_b - Q_c)}{Q_a}$$

oder

$$Q_a\,\gamma_a = M_a + \omega_b\,\omega_c\,(Q_b - Q_c)$$

und ebenso

$$Q_b\,\gamma_b = M_b + \omega_c\,\omega_a\,(Q_c - Q_a)$$
$$Q_c\,\gamma_c = M_c + \omega_a\,\omega_b\,(Q_a - Q_b),$$

wo γ_b und γ_c die Winkelbeschleunigungen um OB und OC bedeuten. Substituirt man für γ_a den Differentialquotienten $\frac{d\omega_a}{dt}$, so kann man letzteren Gleichungen auch die Form geben:

$$Q_a \cdot \frac{d\omega_a}{dt} = M_a + \omega_b\,\omega_c\,(Q_b - Q_c), \text{ etc.}$$

Man erkennt auch leicht, dass die Fliehkräfte die progressive Bewegung des Schwerpunktes nicht beeinflussen, wenn man ihre Componenten parallel zu sich selbst in den Schwerpunkt verlegt und summirt. Die Componente nach der Axe OA wurde gefunden:

$$PF = m\,r\,\omega^2\cos(r, a)$$

oder nach Gl. 2:

$$PF = m\,\omega^2\,(a - \xi).$$

Substituirt man ξ aus Gl. 3, so hat man:

$$PF = m\,\omega^2\,(a - a\cos^2\alpha - b\cos\alpha\cos\beta - c\cos\alpha\cos\gamma).$$

Die Summation aller dieser Componenten gibt also die Resultirende:

$$\omega^2\,[\Sigma(m\,a) - \cos^2\alpha\,\Sigma(m\,a) - \cos\alpha\cos\beta\,\Sigma(m\,b) - \cos\alpha\cos\gamma\,\Sigma(m\,c)].$$

Da nun OA, OB und OC Schwerpunktsachsen sind, somit $\Sigma(m\,a) = \Sigma(m\,b) = \Sigma(m\,c) = 0$ ist, so ist diese Resultirende längs OR gleich Null. Dasselbe gilt bezüglich der Componenten längs OB und OC.

Ueber die elektromotorische Gegenkraft des Lichtbogens.

Von

Friedrich Vogel.

Es sei gestattet, im folgenden eine Ansicht über die Vorgänge im galvanischen Lichtbogen zu entwickeln.

Bereits in einem früheren Aufsatze[1]) habe ich kurz angedeutet, wie eine Reihe von Eigenthümlichkeiten und Unregelmässigkeiten bei dem elektrischen Lichtbogen durch elektrolytische Vorgänge in demselben erklärt werden könnten. Neuere Untersuchungen über die Elektricitätsleitung in Gasen und verwandte Erscheinungen haben mir die damaligen Vermuthungen fast zur Gewissheit gesteigert.

Nach der Theorie von A. Schuster[2]) leiten Gase die Electricität nur dann, wenn sie in Atome zerlegt werden, sei es durch elektrische Kräfte, oder durch Wärme, oder durch Belichtung. Eine Reihe werthvoller Arbeiten, wie von Arrhenius, Nahrwold, Narr, u. A. stützen die erwähnte Theorie; eine wohl vollständige Bestätigung hat sie durch die schönen Untersuchungen von Elster und Geitel[3]) über die Elektricitätserregung beim Contact verdünnter Gase mit galvanisch glühenden Drähten erhalten.

Bei dem elektrischen Lichtbogen, wird die Bogenbildung meist dadurch eingeleitet, dass die Kohlen einander berühren. Beim Durchgang des Stromes gerathen die Berührungspunkte, die einen geringen Querschnitt darbieten in Gluth und erwärmen die anliegenden Lufttheilchen. Nun ist die Bedingung für den Uebergang der Elektricität durch Luft gegeben, da nach den Beobachtungen von E. Becquerl, die durch Blondlot[4]) bestätigt worden sind, die zur Rothgluthtemperatur

---

1) Fr. Vogel: Messungen am elektrischen Lichtbogen bei Gleichstrom. Centralbl. f. Elektrotechn. 1887. S. 189 u. f.

2) A. Schuster: Proc. Roy. Soc. Bd. 37. S. 317 (1884).

3) J. Elster u. H. Geitel, Sitzungsber. d. Ak. in Wien. Math.-Naturw. Klasse Bd. 97 Oct. 1888.

4) Blondlot, Compt. rendus Bd. 104. S. 283



erhitzte Luft leitend ist. Nach Schuster's Vorstellung werden wir die Gase als, wenigstens theilweise, dissociirt ansehen müssen.

Der Begriff der elektromotorischen Gegenkraft des Lichtbogens ist zuerst von Edlund eingeführt und in neuerer Zeit Gegenstand mehrfacher Forschungen gewesen, insbesondere von V. v. Lang[1]), Nebel, Cross und Shepard, L. Arons u. A. Wir greifen einige Messungen von L. Arons[2]) heraus. Es wurde der wahre Widerstand des Lichtbogens einerseits, andrerseits die Spannung am Bogen und die Stromstärke gemessen:

Wirkl. Widerst.: 2,1 Ohm, Spanng. 40,6 V, Stromst. 3,4 Amp., Scheinb. Widerst. 11,8 Ohm.

Wirkl. Widerst.: 1,6 Ohm, Spanng. 39,6 V, Stromst. 4,1 Amp., Scheinb. Widerst. 9,7 Ohm.

Der scheinbare Widerstand ist rund sechs Mal so gross, als der wahre, d. h. es wird im elektrischen Lichtbogen noch andre Arbeit geleistet, als die Joule'sche Wärmearbeit. Lecher[3]) bestreitet das Vorhandensein einer elektromotorischen Gegenkraft, und neigt zu der Annahme Wiedemann's discontinuirlicher Entladungen, indem er durch Versuch fand, dass der Bogen nach Unterbrechung keinen Ausschlag an einem Galvanometer bewirke, wie es bei den Elektrolyten der Fall ist. Aber erstens ist es noch nicht gelungen, mit Hilfe des rotirenden Spiegels die Theilentladungen nachzuweisen, zweitens gibt ein zum Bogen parallel geschaltetes Telephon keinen Ton, wenn der Bogen ruhig brennt und eine constante Stromquelle, wie Accumulatoren verwendet werden, und endlich gibt Wild[4]) an, dass es ihm gelungen ist, einen Gegenstrom zu erhalten durch rasche Verbindung der Elektroden mit einem Galvanometer. Die Lecher'schen negativen Resultate, ihre Richtigkeit vorausgesetzt, würden aber auch kein directer Gegenbeweis gegen das Vorhandensein einer elektromotorischen Gegenkraft sein. Wenn sich die Gasstrecke zwischen den Kohlen abgekühlt hat während des Umlegens der Wippe u. s. f., so wirken sie als Isolator. Es könnten dann nur noch freie, auf den Elektroden befindliche Elektricitätsmengen zurückströmen, die jedenfalls sehr gering sind.

Die Schuster'schen Vorstellungen über die Elektricitätsleitung in Gasen sind geeignet, die elektromotorische Gegenkraft des Lichtbogens zu erklären, wenn man die einzelnen Arbeitsvorgänge gesondert betrachtet und als Analogon der Zersetzung in flüssigen Elektrolyten heranzieht.

1) V. v. Lang: Wied. Ann. Bd. 26. S. 145 (1885).
2) L. Arons: Wied. Ann. Bd. 30. S. 95.
3) Lecher: Wiener. Akad. Ber. Bd. 95. S. 992.
4) Wild, Exners Rep. 1888 S. 224.

Wir denken uns den Lichtbogen im stationärem Zustande. Um die Gasstrecke und die Kohlenenden auf constanter Temperatur zu erhalten, muss eine gewisse elektrische Arbeit aufgewendet werden; ihr entspricht der wahre Widerstand des Lichtbogens. Zweitens: die Elektroden, im besonderen Falle die Kohlen, müssen vergast werden. Drittens: die entstandenen Kohlenwasserstoffe und anderen Gase und die aus der Umgebung in den Bogen tretenden Gase werden dissociirt. Für beide Vorgänge ist ein Arbeitsaufwand nöthig, mithin eine elektromotorische Kraft, die ausser der einen Kraft für die Joule'sche Wärme: Jw wirken muss, wenn w der wahre Widerstand des Lichtbogens ist. Wir wollen besonders die letztgenannte, die Dissociations-Arbeit betrachten.

Bezeichnet für einen Elektrolyten W die Wärmetönung, d. h. die Wärmemenge, die bei der Bildung von einem Moleculargewicht der Verbindung frei wird, Q die Elektricitätsmenge, durch die das Moleculargewicht in seine Bestandtheile, die Ionen, zerlegt wird, so muss dem Elektrolyten eine elektrische Arbeitsmenge zugeführt werden $c \cdot Q \cdot E$, und nach dem Satz von der Erhaltung der Energie ist:

$$c \cdot Q \cdot E = W.$$

Es ist c das elektrische Aequivalent einer Wärmeeinheit. Für fortdauernde Zerlegung in die Ionen muss also, abgesehen von der elektromotorischen Kraft, die der Joule'schen Wärmearbeit entspricht, eine elektromotorische Kraft am Elektrolyten wirken:

$$E = \frac{W}{c \cdot Q}$$

In gleicher Weise wird zur Dissociation eines Gases ein elektrischer Arbeitsaufwand erforderlich sein und zur fortgesetzten Zerlegung eine minimale elektromotorische Kraft. Bedeutet e diese elektromotorische Kraft, q die Elektricitätsmenge, durch die ein Moleculargewicht des Gases in Atome, Ionen, zerlegt wird, φ die Atombindungswärme eines Moleculargewichts, so ist auch hier

$$c \cdot q \cdot e = \varphi$$

und

$$e = \frac{\varphi}{c \cdot q}.$$

Die elektromotorische Kraft e für die Dissociation hat den Charakter einer elektromotorischen Gegenkraft, auch wenn sie sich nicht durch Polarisation bemerkbar machen sollte. Sie ist eben das Correlat zu einer Arbeitsleistung.

Aus dem Gesagten erklären sich auch gewisse Unregelmässigkeiten des Lichtbogens, so z. B. dass die gleichen Kohlen bei gleicher Strom-

stärke und gleicher Lampenspannung verschiedene Lichtmengen aussenden können, je nach den äusseren Verhältnissen, wie Feuchtigkeitsgehalt u. s. w.[1]). Der auf Elektrolyse, die Dissociation mit einbegriffen, entfallende Arbeitsbetrag wird ein verschiedener. Ist es erwiesen, dass die Gase nur wie Elektrolyte, durch Zerlegung der Moleküle in Atome, die Elektricität leiten, so gibt gerade die elektromotorische Gegenkraft des Lichtbogens ein wichtiges Mittel ab, die Atombindungswärme zu bestimmen.

Das vollständige Vacuum leitet nach Foeppl[2]) nicht. Das einatomige Quecksilbergas, das nicht dissociirt werden kann, kann nach Schuster's Vorstellung nicht leiten, eine Folgerung, die durch Elster und Geitel[3]) bestätigt wird. Die im Vacuum mit der Quecksilberluftpumpe stets vorhandenen Quecksilberdämpfe stören also die Erscheinungen nicht. Ja zwischen Quecksilberelektroden würde sich im Vacuum überhaupt kein Lichtbogen erhalten können.

Kohlenelektroden sind für das Studium der Dissociation nicht geeignet, da sie sowohl Gase absorbiren, als auch in unbekannte Kohlenverbindungen zerfallen. Denken wir uns reine Metalle im Vacuum brennend, dann kann man die Wärmearbeit, die dem Metall, hier in Form elektrischer Energie, zugeführt werden muss, berechnen, um eine gewisse Quantität bis zum Siedepunkt zu erhitzen. Aus Wägungen findet man die Menge des dissociirten Metalldampfes, die der Elektricitätsmenge $q = i \cdot t$ entspricht, wenn i die Stromstärke t die Zeit ist. Aus der Differenz: Gesammte elektrische Arbeit, minus Joule'sche Wärmearbeit $J^2 w t$, minus Wärmearbeit für die Erhitzung bis zum Siedepunkt findet man die Dissociationsarbeit für die verdampfte Metallmenge. Wiederholt man die Versuche in einfachen Gasen mit denselben Metallen unter verschiedenen Drucken, so kann man auch für diese die Dissociationsarbeit bestimmen, die gleich ist der Bindungsarbeit der Moleküle.

Es sollte hier nur der ohngefähre Weg für die Experimente angedeutet werden. Das zu erforschende Gebiet ist weit, aber für Theorie und Praxis öffnet sich ein weiter Blick.

Braunschweig, November 1889.

1) Vergl. Fr. Vogel a. a. O.
2) Foeppl: Wied. Ann. Bd. 33. S. 492.
3) J. Elster u. H. Geitel a. a. O.

Ellipsoidische Isophoten.

Versuch einer allgemeineren Theorie der Helligkeitsvertheilung auf körperlichen Oberflächen.

Von

Dr. **Ferdinand Meisel,**

Director der gewerblichen Zeichenschule in Halle a. S.

Wie die Physik lehrt, ist die Helligkeit eines Flächenelements proportional dem Cosinus des Einfallswinkels α des Lichtstrahls und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes l des leuchtenden Punktes von dem betrachteten Punkte der Fläche. Die Linien gleicher Helligkeit — die Isophoten oder Lichtgleichen — sind daher Curven der Oberfläche, in welchen der Quotient $\frac{\cos \alpha}{l^2}$ je einen constanten Werth behält. Setzt man, wie das gewöhnlich geschieht, voraus, dass die Entfernung der Lichtquelle, verglichen mit den Dimensionen des beleuchteten Körpers, unendlich gross sei, so sind die Isophoten ganz einfach Curven der Oberfläche, in welchen der Cosinus des Einfallswinkels sich nicht ändert.

Handelt es sich nun darum, die körperliche Oberfläche mit den Beleuchtungserscheinungen, welche sie darbietet, abzubilden, so beschränkt man sich gewöhnlich darauf, die auf der Oberfläche selbst thatsächlich vorhandenen Isophoten nach der für die Abbildung gewählten Projectionsart auf die Bildfläche zu übertragen. Diesem Verfahren liegt die stillschweigende Annahme des Lambert'schen Gesetzes, dass nämlich die von einem bestrahlten Flächenelement in beliebiger Richtung ausgesandte Lichtmenge dem Cosinus des Emanationswinkels ε proportional sei, zu Grunde. Da nämlich die Helligkeit bekanntlich gleich dem Verhältnis der in der betreffenden Richtung ausgesandten Lichtmenge zu der Projection des Flächenelements auf die zur Blickrichtung rechtwinklige Ebene, und diese Projection wieder dem Cosinus des Emanationswinkels ε proportional ist, fällt, sobald man das Lambert'sche Gesetz annimmt, $\cos \varepsilon$ weg, die Helligkeit ist unabhängig vom Emanationswinkel, und die Isophoten des Bildes, die

Linien gleicher scheinbarer Helligkeit in der Abbildung, sind nichts weiter, als die Projectionen der wirklichen Isophoten der körperlichen Oberfläche auf die Bildfläche. Darauf beruht die gewöhnliche Art, die Isophoten graphisch oder analytisch zu ermitteln, und sie steht und fällt mit dem Lambert'schen Gesetz.

Wenn nun auch dieses Gesetz recht gute Durchschnittswerthe ergibt, so ist es doch, wie Versuche ergeben haben, keineswegs streng richtig. Schon die tägliche Erfahrung lehrt, dass gleich gestaltete und gleich beleuchtete Körper von verschiedener materieller Beschaffenheit ganz verschiedene Beleuchtungserscheinungen darbieten, und in der Unmöglichkeit, sich diesen Verschiedenheiten anzupassen, liegt der hauptsächlichste Mangel der gewöhnlichen Isophotentheorie. Die natürlichen Körper liegen in Bezug auf ihr Reflexionsvermögen zwischen den beiden, in der Natur nicht vorkommenden Grenzen des vollständig spiegelnden Körpers, welcher an sich unsichtbar ist, und des vollständig matten Körpers, für welchen das Lambert'sche Gesetz in aller Strenge gilt. Für eine Isophotentheorie, welche diesen Verschiedenheiten Rechnung zu tragen im Stande sein soll, ist daher die Einführung einer Constanten, deren Werth für einen beliebigen Körper durch den Versuch zu ermitteln ist, und damit auch die Berücksichtigung des Emanationswinkels, also der Blickrichtung, das wesentlichste Erfordernis.

Denkt man sich unter Zugrundelegung einer beliebigen Helligkeitseinheit die Helligkeiten, unter welchen ein beliebiges, in beliebiger Richtung bestrahltes Flächenelement in allen möglichen Richtungen erscheint, auf diesen Richtungen selbst aufgetragen, so bilden die Endpunkte dieser Strecken eine Fläche, welche wir die Helligkeitsfläche nennen wollen. Bei Zugrundelegung des Lambert'schen Gesetzes ist diese Fläche eine Halbkugel, und man kann deshalb die gewöhnlichen, auf Grund dieses Gesetzes gefundenen Isophoten als sphärische Isophoten bezeichnen. Um dem oben bezeichneten Erfordernis zu genügen, liegt es nahe, die Halbkugel durch ein halbes Ellipsoid zu ersetzen, dieses also als Helligkeitsfläche vorauszusetzen. Als grösste Axe des Ellipsoids wird diejenige Richtung anzunehmen sein, in welcher beim vollständig spiegelnden Körper die Rückstrahlung ausschliesslich erfolgt, und welche auch beim diffus reflectirenden Körper immer noch einen gewissen Vorrang behauptet, also ein Helligkeitsmaximum besitzt, welches um so grösser ist, je mehr sich die Oberfläche der Abstraction der vollständig spiegelnden Fläche nähert. Unter dieser Voraussetzung soll nun im folgenden die Helligkeit eines beliebigen Oberflächenpunktes berechnet werden. Die sich daraus ergebenden Lichtgleichen mögen ellipsoidische Isophoten genannt werden.

Der Weg, welchen wir zur Ermittelung der Helligkeit eines beliebigen Flächenpunktes auf Grund der soeben dargelegten Annahme einzuschlagen haben, ist demnach der folgende. Wir ermitteln, indem wir den betrachteten Punkt als Coordinaten-Ursprung betrachten, die Mittelpunktsgleichung eines Ellipsoids, dessen grösste Halbaxe dem Cosinus des Einfallswinkels α proportional ist und in die Richtung des nach dem gewöhnlichen Spiegelungsgesetz reflectirten Strahls fällt, und dessen eine Hauptebene mit der Einfallsebene zusammenfällt. Der nach dem Auge gerichtete Radius vector dieses Ellipsoids gibt sodann die verhältnismässige Helligkeit an.

Die Mittelpunktsgleichung eines Ellipsoids von den Halbaxen a, b, c, auf seine eigenen Hauptaxen bezogen, ist bekanntlich

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Drehen wir nun das rechtwinklige Coordinatensystem so, dass seine z-Axe mit der Normalen der Fläche im betrachteten Punkt zusammenfällt, seine y-Axe aber ihre Lage beibehält, so haben wir, da um das Complement des Einfallswinkels α zu drehen ist, x durch $x \cdot \sin\alpha - z \cdot \cos\alpha$, z durch $x \cdot \cos\alpha + z \cdot \sin\alpha$ zu ersetzen. Die Gleichung des Ellipsoids, auf die neuen Axen bezogen, heisst also:

$$x^2\left[\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha}{c^2}\right]+\frac{y^2}{b^2}+z^2\left[\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{c^2}\right]+$$
$$2\,xz\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)=1.$$

Ist nun J die Intensitätseinheit, so ist zu setzen:

$$a = J\cdot\cos\alpha.$$

Ferner sei

$$b = m\cdot a = m\cdot J\cdot\cos\alpha$$
$$c = n\cdot a = n\cdot J\cdot\cos\alpha,$$

worin $m<1$, $n<1$. Dann lautet obige Gleichung:

$$x^2(1+n^2\cdot\operatorname{tg}^2\alpha)+\frac{n^2\cdot y^2}{m^2\cdot\cos^2\alpha}+z^2(n^2+\operatorname{tg}^2\alpha)+2\,xz\cdot\operatorname{tg}\alpha\,(1-n^2)=n^2\cdot J^2.$$

Dieses Ellipsoid ist nun mit dem, nach dem Auge gerichteten Strahle zu schneiden. Sind η, η', η'' die Winkel, welche dieser Strahl mit der x-, y- und z-Axe bildet, so sind

$$\frac{x}{\cos\eta}=\frac{y}{\cos\eta'}=\frac{z}{\cos\eta''}$$

die Gleichungen des Strahls, aus denen

$$y = x \cdot \frac{\cos \eta'}{\cos \eta}, \quad z = x \cdot \frac{\cos \eta''}{\cos \eta}$$

folgt. Setzt man diese Werthe in obige Gleichung ein und löst dieselbe nach x auf, so ergibt sich

$$x = \frac{n \cdot J \cdot \cos \eta}{\sqrt{(1+n^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)\cos^2\eta + 2(1-n^2)\cos\eta\cos\eta''\operatorname{tg}\alpha + (n^2+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\eta'' + \frac{n^2\cos^2\eta'}{m^2\cos^2\alpha}}}$$

$$= \frac{n \cdot J \cdot \cos \eta}{R},$$

wenn der Werth der Wurzel kurz mit R bezeichnet wird. Ebenso ist

$$y = \frac{n \cdot J \cdot \cos \eta'}{R}, \quad z = \frac{n \cdot J \cdot \cos \eta''}{R}$$

und der Radius vector, d. h. nach unserer zu Grunde gelegten Hypothese die Helligkeit selbst

$$i = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{n \cdot J}{R}.$$

Da die physikalische Bestimmung der beiden Constanten m und n sehr schwierig sein wird, soll zunächst, der Einfachheit wegen $m = n$ gesetzt werden, so dass also

$$R = \sqrt{(1+n^2\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\eta + 2(1-n^2)\cos\eta\cos\eta''\operatorname{tg}\alpha + (n^2+\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\eta'' + \frac{\cos^2\eta'}{\cos^2\alpha}}$$

ist. Diese Formel entspricht offenbar der Voraussetzung, dass die Helligkeitsfläche ein Rotationsellipsoid sei.

Es kommt nun darauf an, für einen beliebigen Punkt der betrachteten Fläche die Winkel $\alpha, \eta, \eta', \eta''$ zu berechnen. Sind in Bezug auf ein festes, rechtwinkliges Coordinatensystem, auf welches wir uns die beleuchtete Fläche bezogen denken,

a_1, b_1, c_1 die Richtungscosinusse des Lichtstrahls,

a_2, b_2, c_2 die Richtungscosinusse der Normalen der Fläche im betrachteten Punkte, so ist nach einem Fundamentalgesetz der analytischen Geometrie

$$\cos \alpha = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2.$$

Setzt man ein Parallelstrahlenbündel voraus und macht man ferner über die Richtung desselben die gewöhnliche Annahme, dass es der von der vorderen, oberen, linken Ecke zur hinteren, unteren, rechten Ecke gehenden Diagonale eines Würfels parallel sei, dessen Seiten-

flächen den Coordinatenebenen parallel sind, so ist $a_1 = b_1 = c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
und folglich

$$\cos\alpha = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{\sqrt{3}}.$$

Bildet man nun ferner die beleuchtete Fläche durch orthogonale Projection auf die feste xz-Ebene oder eine ihr parallele Ebene ab, so ist der Sehstrahl stets der y-Axe parallel, und die Winkel η, η', η'' sind die Neigungen der Axen des beweglichen Coordinatensystems gegen die y-Axe des festen. Da die z-Axe des beweglichen Systems zugleich die Normale der Fläche ist, deren Richtungscosinusse a_2, b_2, c_2 sind, hat man zunächst:

$$\cos\eta'' = b_2.$$

Um den Winkel η zu ermitteln, ziehen wir von einem beliebigen Punkte des Raumes aus Parallele zur festen y-Axe, zum einfallenden Strahl und zur Normalen des betrachteten Punkts und schneiden diese 3 Geraden mit einer um den beliebig angenommenen Punkt beschriebenen Kugelfläche. Ist in dem so entstandenen sphärischen Dreieck YSN w der Winkel bei N, so ist

$$\cos w = \frac{b_1 - b_2 \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha \cdot \sin\beta_2}$$

worin $\beta_2 = \text{arc} \cdot \cos b_2$ ist. Zieht man von dem angenommenen Punkte ferner eine Parallele zur X-Axe des beweglichen Coordinatensystems, so folgt aus dem sphärischen Dreieck NXY, in welchem $NX = 90^0$ ist,

$$\cos\eta = \sin\beta_2 \cdot \cos w = \frac{b_1 - b_2 . \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Endlich findet man η' aus der Gleichung

$$\cos^2\eta + \cos^2\eta' + \cos^2\eta'' = 1.$$

Die so gefundenen Werthe von $\cos\eta$, $\cos\eta'$, $\cos\eta''$ sind in die obige Gleichung für R einzusetzen.

Soll beispielsweise die Helligkeitsvertheilung auf einer Kugelfläche gefunden werden, so werden wir einen allgemeinen Punkt derselben am einfachsten durch seine Breite β und Länge λ bestimmen. Die Breite werde von der xy-Ebene aus positiv nach oben, negativ nach unten, die Länge von der positiven Seite der xz-Ebene aus von 0 bis 180^0 gerechnet. Dann ist

$$a_2 = \cos\beta \cdot \cos\lambda, \quad b_2 = \cos\beta \cdot \sin\lambda, \quad c_2 = \sin\beta,$$

und die Formel lautet:

$$R = \sqrt{\left\{(1 + n^2 \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\eta + 2\,(1 - n^2)\cos\eta\cos\beta\sin\lambda\operatorname{tg}\alpha + \right.}$$

$$\left. + (n^2 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\beta\sin^2\lambda + \frac{\sin^2\eta - \cos^2\beta\sin^2\lambda}{\cos^2\alpha}\right\},$$

worin

$$\cos\alpha = \frac{(\sin\lambda + \cos\lambda)\cos\beta + \sin\beta}{\sqrt{3}}, \quad \cos\eta = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \cos\beta\cdot\sin\lambda\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ist. Nimmt man noch beispielsweise $n^2 = \frac{1}{2}$ an, so ist

$$R = \sqrt{\left\{(1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\eta + \cos\eta\cos\beta\sin\lambda\operatorname{tg}\alpha + \right.}$$

$$\left. + (\tfrac{1}{2} + \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\beta\sin^2\lambda + \frac{\sin^2\eta - \cos^2\beta\sin^2\lambda}{\cos^2\alpha}\right\}$$

und

$$i = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot R}\cdot J.$$

Auf Grund dieser Formeln wurde folgende Tabelle für $\frac{i}{J}$ berechnet:

$\lambda =$	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\beta = +90°$	0,4472	0,4472	0,4472	0,4472	0,4472	0,4472	0,4472
+75°	0,5477	0,5593	0,5463	0,5057	0,4433	0,3745	0,3162
+60°	0,6108	0,6351	0,6386	0,5640	0,4285	0,2895	0,1637
+45°	0,6325	0,6849	0,7558	0,6325	0,3954	0,1904	0
+30°	0,6108	0,6994	0,8778	0,6718	0,3349	0,0796	
+15°	0,5477	0,6596	0,8677	0,6024	0,2500		
0°	0,4472	0,5461	0,5570	0,4472	0,1511		
−15°	0,3163	0,4330	0,4564	0,2920	0,0414		
−30°	0,1637	0,2821	0,2789	0,1508			
−45°	0	0,1115	0,1096	0			

Durch graphische Interpolation wurden nun auf jedem Breitenkreise die Punkte gefunden, welche den verhältnismässigen Helligkeiten 0,1 · · · 0,8 entsprechen und durch Verbindung dieser Punkte die Isophoten gezeichnet. Das so entstandene Bild (siehe Fig. 1) scheint mir der Natur in hohem Grade zu entsprechen; der hellste Punkt ist dem Mittelpunkte des Kreises, in welchem sich die Kugel abbildet, näher gerückt, als bei den gewöhnlichen Isophoten, was sich auch erwarten liess. Das ganze Isophotensystem ist gleichsam eine Vermittlung des gewöhnlichen Systems, welches sich für $n = 1$ ergibt, mit dem vereinzelten Glanzpunkte,

welcher auf der spiegelnden Kugelfläche erscheint, und dem Werthe $n = 0$ entspricht.

Für Umdrehungskörper, welche auf eine zur Rotationsaxe parallele Ebene projicirt sind, kann die beigegebene Figur als „Normalkugel" in genau derselben Weise zur Aufsuchung der ellipsoidischen Isophoten dienen, wie die gewöhnliche Normalkugel zur Bestimmung der gewöhnlichen, sphärischen Isophoten dient. Für eine perspectivische Abbildung wird die Sache freilich wesentlich verwickelter, da man für jeden einzelnen Sehstrahl erst die Winkel η, η', η'' zu bestimmen hat und die Vereinfachung, welche sich aus der Annahme der y-Axe als gemeinsamer Sehstrahlenrichtung ergab, wegfällt. Ebenso würde auch die Annahme einer endlich entfernten Lichtquelle die Rechnung complicirter machen.

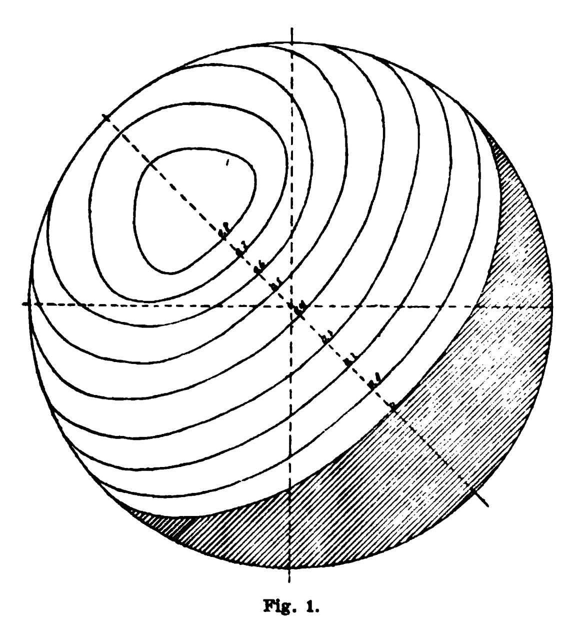


Fig. 1.

Bei rechtwinkliger Projection und unendlich ferner Lichtquelle aber ist die Construction der Isophoten des Cylinders, Kegels, Wulstes, der verschiedensten Gefässformen u. s. w. keineswegs schwieriger, als sonst, wenn man die Normalkugel einmal hat. Für jede neue Strahlenrichtung freilich hat man erst eine ziemlich langwierige Rechnung auszuführen. Das liegt nun einmal in der Natur der Sache.

Die Bestimmung der Werthe von n, oder, wenn möglich, von m und n für verschiedene Stoffe, ist natürlicherweise Sache der Experimentalphysik; es kam mir hier nur darauf an, zu zeigen, dass die Annahme des Ellipsoids als Helligkeitsfläche überhaupt brauchbare Resultate liefert. Durch Versuche wird auch zu ermitteln sein, ob die hier gemachte Voraussetzung der Unabhängigkeit des n vom Einfallswinkel α in aller Strenge richtig ist.

Protokoll der Versammlung
der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,
vom 2. November 1889.

Vorsitzender: Hofrath E. Ludwig.

Herr A. Theo E. Wangemann spricht über die Einrichtung, Herstellung und Anwendung des Edison'schen Phonographen und demonstrirt denselben.

Der Vorsitzende spricht Herrn Wangemann Namens der Gesellschaft den Dank aus.

Protokoll der Versammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 12. November 1889.

Vorsitzender: Hofrath E. Ludwig.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

In Vertretung des Kassiers, Herrn A. von Waldheim, erstattet der Secretär den Kassabericht über das Vereinsjahr 1888/89. Als Rechnungsprüfer werden die Herren Dr. R. Benedikt und Dr. E. Lecher gewählt.

Herr Professor Dr. V. von Ebner spricht über Substanzen, welche sich gegen Druck und Zug optisch anormal verhalten, und zeigt durch objective Demonstration mit Hilfe eines Projectionsapparates, der mit zwei gekreuzten Nikols und einer Gypsplatte Roth I. Ordnung versehen ist: 1. dass eine beschränkt gequollene Kirschgummimembran auf Zug optisch gerade entgegengesetzt reagirt, wie eine beschränkt gequollene Gelatinemembran; 2. dass die beschränkt gequollene Kirschgummimembran beim Dehnen sofort — ohne vorausgehende positive Farbenschwankung — eine negative Färbung zeigt, und 3. dass beim Nachlassen des Zuges sofort die neutrale Färbung wiederkehrt, so lange, als die Membran nicht überdehnt wird.

Herr Dr. M. Margules hält einen Vortrag: Untersuchungen über ein comprimirtes Gasgemisch.“

Die Herren Dr. James Eisenberg, Hermann Koziol, Karl Kraus, Lampa, Ernst Murmann, Dr. Arnold Rössler, Assistent Dr. A. Smita, Assistent Florian Wallenstein und Oberlieutenant A. Walter werden als Mitglieder aufgenommen.

Der Secretär.

Protokoll der ordentlichen Generalversammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 22. Oktober 1889.

Vorsitzender: Prof. Siegmund Exner.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Der Vorsitzende verliest ein Dankschreiben des Hofrates Prof. Dr. von Brücke für die ihm von der Gesellschaft an seinem siebzigsten Geburtstage überreichte Adresse und legt die eingelaufenen Schriftstücke und Drucksachen (darunter Bulletin of the Chemical Society of Washington Nr. 4; Hann, Zur Meteorologie des Sonnblickgipfels; Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau Nr. 6) vor

Sodann gelangt ein von den Herren Hofrath Stefan und Prof. von Lang gestellter Antrag zur Verlesung: „die chemisch-physikalische Gesellschaft möge zu dem in München zu errichtenden Denkmal für G. S. Ohm einen Beitrag von 100 Mark bewilligen.“ Derselbe wird angenommen.

Der Vorsitzende erstattet den Bericht über das Vereinsjahr 1888/89, erwähnt, dass die Gesellschaft derzeit 187 Mitglieder zählt, sowie dass in der Berichtsperiode 10 Sitzungen mit 21 Vorträgen stattfanden und gedenkt des der Gesellschaft durch den Tod entrissenen Mitgliedes Dr. Karl Schilder.

Für das Vereinsjahr 1889/90 werden gewählt als Vorstand Herr Hofrath Prof. Dr. Ernst Ludwig, als Vorstandsstellvertreter Herr Hofrath Prof. Dr. Josef Stefan, als Secretär Herr Dr. Rudolf Wegscheider. Die Gewählten erklären die Wahl anzunehmen.

Hofrath Ludwig übernimmt den Vorsitz.

Hierauf folgen die Vorträge des Herrn Dr. M. Margules: „Ueber comprimirte Gase und gesättigte Dämpfe“, und Dr. S. Zeisel: „Ueber Bromderivate des Tetraäthylphloroglucins“.

Hofrat Ludwig spricht Namens der Gesellschaft dem abtretenden Vorstand den Dank aus.

Der Secretär.

XXVI. Band. 2. Heft.

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

Dr F. EXNER,

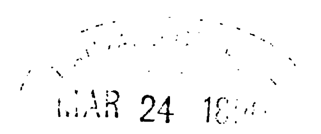
A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 2. Heftes.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1890.

DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.



Ueber den Durchgang von Elektricität durch sehr schlechte Leiter.

Von

Hugo Koller.

(Schluss.)

VII.

In den folgenden Tabellen sind die mit verschiedenen Diëlektricis gewonnenen Resultate zusammengestellt. Da aber die Bedeutung der einzelnen Factoren erst im Verlaufe der Untersuchungen bekannt wurde, sind leider nicht alle Bestimmungen so systematisch durchgeführt, als man wohl zum Zwecke der Erforschung der Eigenschaften unvollkommener Diëlektrica wünschen würde; doch werden sie stets über die Grössenordnung des Widerstandes Aufschluss geben.

Wenn nicht näher angegeben, war die Durchströmungsdauer kurz.

1. Leinöl. (Warm gepresst.)

1. Probe.

d. = 0,925 mm
t. = 20,6°
E = 1 D.
Sp. W. = $206 \cdot 10^{12}$ S. E.

2. Probe.

E = 1 D. t. = 24,6°

d.	Sp. W.
0,145 mm	$517 \cdot 10^{12}$ S. E.
0,875 „	$374 \cdot 10^{12}$ „
3,015 „	$309 \cdot 10^{12}$ „

d. = 0,875 mm t. = 24,6°

E	Sp. W.
1 D.	$378 \cdot 10^{12}$ S. E.
2 „	$392 \cdot 10^{12}$ „
4 „	$411 \cdot 10^{12}$ „
8 „	$439 \cdot 10^{12}$ „

3. Probe.

d. = 0,145 mm D. = 280 Th.
W. = 282 · 10^5 S. E. t. = 23°

E	i	$\frac{i}{E}$
⅛	20,4	163,2
¼	40,8	163,2
½	81,7	163,4
1	163,4	163,4

d. = 0,145 mm D. = 317 Th.
W. = 176 · 10^4 S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	24,1	24,1
2	46,6	23,3
4	93,5	23,4 (?)
8	155,1	19,4
nach 1 h		
8	144,9	18,1

d. = 1,135 mm D. = 317 Th.
W. = 101 · 10^5 S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	22,6	22,6
2	44,4	22,2
4	85,6	21,4
8	170,9	21,4

d. = 3,015 mm D. = 317 Th.
W. = 101 · 10^5 S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	9,5	9,5
2	18,8	9,4
4	36,3	9,1
8	73	9

t. = 24° E = D.[1])

d.	Sp. W.	T.
0,145 mm	472 · 10^12 S. E.	kurz
0,145 „	502 · 10^12	5 m
0,145 „	537 · 10^12	1h 15m
1,135 „	397 · 10^12	kurz
3,015 „	368 · 10^12	kurz.

Zum Vergleiche der verschiedenen Proben sind die specifischen Widerstände derselben, unter möglichst gleichen Bedingungen gemessen, zusammengestellt.[2])

	Sp. W.	t.
1. Probe	206 · 10^12 S. E.	20°
2. Probe	374 · 10^12 „	24,6°
3. Probe	397 · 10^12 „	24°

2. Leinöl. (Kalt gepresst.)

1. Probe.

E = 1 D. t. = 24,8°

d.	Sp. W.
0,145 mm	980 · 10^13 S. E.
0,875	574 · 10^13
3,015	519 · 10^13

d. = 0,875 mm t. = 24,8°

E	Sp. W.
1	574 · 10^13 S. E.
2	586 · 10^13
4	621 · 10^13
8	660 · 10^13

1) Die Werthe nach langer Durchströmungsdauer wurden aus Beobachtungen bei 8 D. berechnet, welche mit Rücksicht auf die Abweichungen von Ohm's Gesetz auf 1 D. umgerechnet wurden.

2) In den Tabellen zum Vergleiche verschiedener Proben wurde immer T kurz angenommen.

2. Probe.

d. = 0,875 mm D. = 292 Th.
W. = $1022 \cdot 10^5$ S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	19,4	19,4
2	37,5	18,7
4	70,2	17,6
8	131,2	16,4

d. = 3,015 mm D. = 292 Th.
W. = $1022 \cdot 10^5$ S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	5,7	5,7
2	11,2	5,6
4	21,4	5,4
8	40,6	5,15

d. = 7,49 mm D. = 292 Th.
W. = $1022 \cdot 10^5$ S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	52,3	52,3
2	103,8	51,9
4	206,5	51,6
Nach 10 Stunden.		
1	10,2	10,2 (?)
2	17,2	8,6
4	33,1	8,3
8	64,4	8,05

E = 1 D. t. = 24°

d.	Sp. W.	T.
0,875 mm	$560 \cdot 10^{12}$ S. E.	kurz
3,015	$581 \cdot 10^{12}$	15 m
7,49	$21,6 \cdot 10^{12}$ 1)	5 m
7,49	$129 \cdot 10^{12}$	10 h

	Sp. W.	t.
1. Probe	$574 \cdot 10^{12}$ S. E.	24,8°
2. Probe	$560 \cdot 10^{12}$	24°

Die Uebereinstimmung des specifischen Widerstandes der beiden Proben ist auffallend, um so mehr, da zwischen den entsprechenden Versuchsreihen ein Zeitraum von sechs Monaten lag. Es mag dies auf einem Zufalle beruhen, ich will aber gleich bemerken, dass die specifischen Widerstände der Oele nie in so weiten Grenzen variirten, wie etwa jene des Wassers. Man ist vielmehr vollkommen berechtigt, jedem reinen Oele einen bestimmten Widerstand zuzuschreiben. Die warmgepressten Oele sind stets unreiner als die kaltgepressten, gewöhnlich schon in der Farbe dunkler und besitzen dementsprechend einen viel variableren zehn- bis zwanzigmal geringeren Widerstand, anderseits treten bei den kaltgepressten Oelen die Eigenschaften eines unvollkommenen Diëlektricums schon deutlicher hervor, indem sich die Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze ganz gut beobachten lassen. In dem Folgenden habe ich nur die mit kaltgepressten Oelen gewonnenen Resultate mitgetheilt.

1) Die Ursache dieser besonders auffallenden Abnahme des specifischen Widerstandes konnte nicht gefunden werden.

3. Ricinusöl.

1. Probe.

d. = 0,885 mm t. = 19° E = 1 D.

Sp. W. = $165 \cdot 10^{13}$ S. E.

2. Probe.

d. = 1,53 mm t. = 24,6°

E	Sp. W.
1	$321 \cdot 10^{13}$ S. E.
2	$330 \cdot 10^{13}$
4	$339 \cdot 10^{13}$
8	$357 \cdot 10^{13}$

3. Probe.

d. = 1,145 mm D. = 305 Th.
W. = $276 \cdot 10^{5}$ S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
$\frac{1}{8}$	18	144
$\frac{1}{4}$	35,6	141,2
$\frac{1}{2}$	70,1	140,2
1	135,9	135,9

d. = 0,145 mm D. = 418 Th.
W. = $176 \cdot 10^{4}$ t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	16	16
2	30,5	15,25
4		

Es tritt Deformation ein. Nachdem der deformirende Strom 15 m eingewirkt hat, erhalten wir:

E	i	$\frac{i}{E}$
1	36,7	36,7
2	72,7	36,35
4	145,8	36,4
nach 1 h 10 m		
4	72,4	18,1

d. = 1,135 mm D. = 418 Th.
W. = $119 \cdot 10^{5}$ S. E. t. = 25°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	21,4	21,4
2	42	21
4	81,7	20,4
8	154,3	19,3

d. = 3,015 mm D. = 418 Th.
W. = $119 \cdot 10^{5}$ S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	11,6	11,6
2	22	11
4	41,2	10,3
8	76,6	9,4
nach 2 h 30 m		
8	30,1	3,75

	Sp. W.	t.
1. Probe	$165 \cdot 10^{13}$ S. E.	18°
2. Probe	$321 \cdot 10^{13}$	24,6°
3. Probe	$63,6 \cdot 10^{13}$	24°

$E = 1$ D. t. = 24°

0,145 mm	$807 \cdot 12^{12}$	kurz
0,145	$1042 \cdot 10^{12}$	15 m
Nach der Deformation		
0,145	$432 \cdot 10^{12}$	15 m
0,145	$913 \cdot 10^{12}$	1 h 40 m
1,135	$636 \cdot 10^{12}$	kurz
3,015	$476 \cdot 10^{12}$	kurz
3,015	$1214 \cdot 10^{12}$	2 h 30 m

4. Olivenöl.

1. Probe.

d. = 1,53 mm $E = 4$ D.

t. = 24,6°

Sp. W. = $157 \cdot 10^{15}$ S. E.

2. Probe.

d. = 1,53 mm t. = 24,4°

E	Sp. W.
1	$127 \cdot 10^{15}$ S. E.
2	$127 \cdot 10^{15}$
4	$133 \cdot 10^{15}$
8	$141 \cdot 10^{15}$

$E = 1$ D. t. = 24,6°

d.	Sp. W.
0,145 mm	$128 \cdot 10^{15}$ S. E.
1,53	$127 \cdot 10^{15}$
3,015	$105 \cdot 10^{15}$

3. Probe.

d. = 0,145 mm D. = 388 Th.
W. = $183 \cdot 10^{7}$ S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
⅛	26,6	212,8
¼	53,3	213,2
½	106,2	212,4
1	210,8	210,8

d. = 0,145 mm D. = 388 Th.
W. = $276 \cdot 10^{6}$ S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	6	6
2	11,4	5,7
4	22	5,5
8	42	5,25

d. = 1,135 mm D. = 388 Th.
W. = $1022 \cdot 10^{6}$ S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	6,4	6,4
2	12,2	6,1
4	24,3	6,08
8	48,4	6,04
nach 3h		
1	3,8	3,8
2	7,2	3,6
4	14,2	3,55
8	27,7	3,46

d. = 3,015 mm D. = 388 Th.
W. = $179 \cdot 10^{7}$ S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	27,2	27,2
2	54,3	27,1
4	106,5	26,7
8	201,6	25,2
nach 2h		
1	24,2	24,2
2	48,3	24,1
4	96,5	24,1
8	187,6	23,8

t. = 24° E = 1 D.

d.	Sp. W.	T
0,145 mm	$242 \cdot 10^{14}$ S. E.	5 m
0,145	$414 \cdot 10^{14}$	30 m
1,135	$184 \cdot 10^{14}$	3 m
1,135	$312 \cdot 10^{14}$	3 h
3,015	$270 \cdot 10^{14}$ (?)	3 m
3,015	$304 \cdot 10^{14}$	2 h

	Sp. W.	t.
1. Probe	$157 \cdot 10^{15}$ S. E	24,6°
2. Probe	$133 \cdot 10^{15}$	24,4°
3. Probe	$31,2 \cdot 10^{15}$	24°

5. Mandelöl.

1. Probe.

d. = 1,53 mm t. = 24°

E	Sp. W.
1	$443 \cdot 10^{14}$ S. E.
2	$445 \cdot 10^{14}$
4	$477 \cdot 10^{14}$
8	$501 \cdot 10^{14}$

2. Probe.

d. = 0,145 mm D. = 330 Th.
W. = $1037 \cdot 10^5$ S. E. t. = 23,4°

E	i	$\frac{i}{E}$
$\frac{1}{8}$	4,2	33,6
$\frac{1}{4}$	8,2	32,8
$\frac{1}{2}$	15	30
1	27,2	27,2 [1])

d. = 0,145 mm D. = 302 Th.
W. = $1037 \cdot 10^5$ S. E. t. = 23,4°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	32,5	32,5
2	56,3	28,2
4	100,1	25
8	165,8	20,7

d. = 1,135 mm D. = 302 Th.
W. = $1031 \cdot 10^5$ S. E. t. = 23,6°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	6,2	6,2
2	12,2	6,1
4	23,3	5,8
8	44,8	5,6

d. = 3,015 mm D. = 302 Th.
W. = $179 \cdot 10^7$ S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	43,2	43,2
2	84	42
4	159,8	40
8	302	38

1) Plötzlich stieg die Stromstärke an, als ob eine Deformation ähnlich jener bei Terpentinöl beschriebenen eingetreten wäre. Die bleibende Verminderung des Widerstandes war aber unbedeutend.

t. = 24° E = 1 D.

d.	Sp. W.	T
0,145 mm	272 · 10^14 S. E.	kurz
nach d. Def.	204 · 10^14	15 m
1,135	150 · 10^14	kurz
3,015	122 · 14^14	kurz

	Sp. W.	t.
1. Probe	443 · 10^14 S. E	24°
2. Probe	272 · 10^14	24°

6. Schwefelkohlenstoff.

Viele Proben dieser Substanz zeichneten sich durch geringe Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze aus. Die zweite angeführte Probe zeigt beim Uebergange zur grössten Elektrodendistanz eine unerklärte bedeutende Steigerung des scheinbaren Widerstandes.

1. Probe.

E = 1 D. t. = 24°

d.	Sp. W.
0,875 mm	95 · 10^13 S. E.
1,58	87 · 10^13
3,015	55 · 10^13

2. Probe.

d. = 0,145 mm D. = 205 Th.
W. = 172 · 10^7 S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
⅛	20,7	165,6
⅓	56	168
½	82,5	165
1	165,2	165,2

d. = 0,145 mm D. = 208 Th.
W. = 276 · 10^5 S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	11	11
2	22,5	11,25
4	43,6	10,9
8	84	10,5

d. = 1,135 mm D. = 208 Th.
W. = 276 · 10^5 S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	3	3
2	6	3
4	9	2,25
8	15	1,88

d. = 7.49 mm D. = 208 Th.
W. = 172 · 10^7 S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	7	7
2	14	7
4	27	6,75
8	54	6,75

t. = 24° E = 1 D.

d.	Sp. W.
0,145 mm	$117 \cdot 10^{14}$ S. E.
1,185	$56{,}6 \cdot 10^{14}$
7,49	$226 \cdot 10^{14}$

	Sp. W.	t.
1. Probe	$87 \cdot 10^{13}$	23°
2. Probe	$566 \cdot 10^{13}$	24°

7. Vaselinöl.

Diese Substanz isolirt ausgezeichnet, aber oft tritt die als Deformation beschriebene plötzliche Verringerung des Widerstands ein.

1. Probe.

d. = 153 mm t. = 22°

E	Sp. W.
1	$168 \cdot 10^{16}$ S. E.
8	$606 \cdot 10^{16}$

2. Probe.

E = 8 D. t. = 24°

d.	Sp. W.
0,145 mm	$203 \cdot 10^{16}$ S. E.
1,53	$210 \cdot 10^{16}$

3. Probe.

d.	T.	E	Sp. W.
0,145 mm	1 m	1 D.	$241 \cdot 10^{16}$ S. E.
0,145	5	1	$254 \cdot 10^{16}$
1,53	1	8	$193 \cdot 10^{16}$
3,015	1	8	$156 \cdot 10^{16}$
3,015	60	8	$260 \cdot 10^{16}$

4. Probe.

d. = 0,155 mm D. = 301 Th.

W. = $179 \cdot 10^{7}$ S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	11,6	11,6
2	22	11
4	76—220	19—55

Bei Steigerung der Potentialdifferenz der Platten von 2 auf 4 Daniell tritt plötzliche Verringerung des Widerstandes ein. Der erste Ausschlag betrug 130 Th. Er sank auf 76 und stieg in 5 Minuten wieder auf 220 Th. Eine Viertelstunde nach dieser Deformation wurden folgende Werthe erhalten:

d. = 0,155 mm t. = 24^0
W. = $179 \cdot 10^7$ S. E. t. = 301 Th.

E	i	$\frac{i}{E}$
1	52	52
2	121	60,5
4	240	60

d. = 1,135 mm D. = 301 Th.
W. = $1022 \cdot 10^5$ S. E. t. = 24^0

E	i	$\frac{i}{E}$
1	6,8	6,8
2	14,8	7,4
4	34,9	8,7
8	72,2	9,15
nach 30 m		
1	4,8	4,8
2	8,8	4,4
4	17,8	4,4
8	33,9	4,2

d. = 7,49 mm D. = 301 Th.
W. = $1022 \cdot 10^6$ S. E. t. = 24^0

E	i	$\frac{i}{E}$
1	50	50
2	93	46,5
4	202	50,5
nach 8 h		
1	6	6
2	12	6
4	24	6
8	48	6

t. = 24^0 $E.$ = 1 D.

d.	Sp. W.	T.
0,155 mm	$99 \cdot 10^{16}$ S. E.	1 m
nach der Def.	$19 \cdot 10^{16}$	
1,135	$134 \cdot 10^{14}$	1
1,135	$190 \cdot 10^{14}$	30
7,49	$2,34 \cdot 10^{14}$	1
7,49	$23 \cdot 10^{14}$	8 h

t. = 24^0

Probe	Sp. W.	E.
1	$168 \cdot 10^{16}$ S. E.	1
2	$210 \cdot 10^{16}$	8
3	$193 \cdot 10^{16}$	8
4	$190 \cdot 10^{14}$	1

Während bei der kleinsten Elektrodendistanz Deformation eintritt, scheint bei grösserer der nach kurzer Durchströmung gemessene scheinbare Widerstand mit der elektromotorischen Kraft abzunehmen. Nach längerer Durchströmung verschwindet diese Erscheinung. Sehr auffallend ist ferner die bedeutende Verringerung des Widerstandes mit der Elektrodendistanz.

8. Benzol.

1. Probe. (Von Kahlbaum).

d. = 0,145 mm D. = 302,4 Th.
W. = 358 · 10⁸ S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
$\frac{1}{8}$	32,8	258,4
$\frac{1}{4}$	64,4	257,6
$\frac{1}{2}$	129	258
1	257	257

d. = 0,145 mm D. = 305 Th.
W. = 1022 · 10^5 S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	4	4
2	6	3
4	9	2,25
8	14	1,62
nach 2^h W. = 179 · 10^7 S. E.		
1	47,3	47,3
2	73,6	36,8
4	110,3	27,6
8	172,2	21,5

d. = 1,135 mm D. = 305 Th.
W. = 177 · 10^7 S. E. t. = 24,4°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	40,2	40,2
2	59,4	29,7
4	104,3	26,1
8	174,2	21,8
nach 3^h		
1	16	16
2	30,1	15,05
4	53,3	13,3
8	82,7	10,03

d. = 7,49 mm D. = 305 Th.
W. = 179 · 10^7 S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	14	14
2	26,1	13,05
4	51,3	12,8
8	88,9	11,1
nach 1^h 40^m		
1	5,8	5,8
2	11,2	5,6
4	21,2	5,3
8	34,2	4,3

t. = 24° E = 8 D.

d.	Sp. W.	T.
0,145 mm	194 · 10^{15} S. E.	5^m
0,145	231 · 10^{15}	2^h
1,135	483 · 10^{14}	4^m
1,135	956 · 10^{14}	3^h
7,49	166 · 10^{14}	2^m
7,49	436 · 10^{14}	1^h 40^m

2. Probe (käufliches Benzin).

E. = 2 D. t. = 24°
T. = 30^m

d.	Sp. W.
0,145 mm	900 · 10^{14} S. E.
0,875	141 · 10^{14}
3,015	57,4 · 10^{14}

Einige Proben von Benzol isolirten so ausgezeichnet, dass ihr specifischer Widerstand nicht mehr bestimmt werden konnte; derselbe lag sicher über 10^{18} S. E.

9. Toluol.

1. Probe.

d. = 0,875 mm t. = 24°

E.	Sp. W.
1	$250 \cdot 10^{13}$ S. E.
2	$254 \cdot 10^{13}$
4	$260 \cdot 10^{13}$
8	$269 \cdot 10^{13}$

E. = D. t. = 24°

d.	Sp. W.
0,145 mm	$317 \cdot 10^{13}$ S. E.
0,875	$250 \cdot 10^{13}$
3,015	$189 \cdot 10^{13}$

2. Probe.

d. = 0,19 mm D. = 303 Th.
W. = $1037 \cdot 10^{15}$ S. E. t. = 23,4°

E	i	$\frac{i}{E}$
$\frac{1}{8}$	18	144
$\frac{1}{4}$	35,1	140,4
$\frac{1}{2}$	68,4	136,8
1	133,9	133,9

d. = 1,135 mm D. = 311 Th.
W. = $280 \cdot 10^{5}$ S. E. t. = 23,4°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	12	12
2	23	11,5
4	42,2	10,5
8	76,7	9,6

W. = $280 \cdot 10^{5}$ D. = 311 Th.

1	56,9	56,9
2	105	52,5
4	205,4	51,4

E. = 1 D. t. = 23,6°

d.	Sp. W.
0,19 mm	$236 \cdot 10^{12}$ S. E.
1,135	$211 \cdot 10^{12}$
7,49	$199 \cdot 10^{12}$

d. = 7,49 D. = 311 Th.
W. = $1031 \cdot 10^{5}$ S. E. t. = 23,6°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	7,2	7,2
2	14,2	7,1
4	27,1	6,8
8	50,3	6,3
nach 45 m		
8	50,3	6,3

	Sp. W.	t.
1. Probe	$250 \cdot 10^{13}$	24°
2. Probe	$211 \cdot 10^{12}$	23,4°

Der Widerstand änderte sich nicht merklich mit der Durchströmungsdauer.

10. Xylol.

1. Probe.

d. = 1,53 mm t. = 24°

E	Sp. W.
1	$250 \cdot 10^{14}$ S. E.
2	$255 \cdot 10^{14}$
4	$348 \cdot 10^{14}$
8	$459 \cdot 10^{14}$

2. Probe.

E = 1 D. t. = 20°

d.	Sp. W.
0,145 mm	$1380 \cdot 10^{13}$ S. E.
0,875	$846 \cdot 10^{13}$
3,015	$812 \cdot 10^{13}$

3. Probe.

d. = 0,19 mm D. = 303 Th.
W. = 179 · 10^7 S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
⅛	13	104
¼	25	100
½	46,3	92,6
1	80,7	80,7

d. = 0,19 mm D. = 303 Th.
W. = 179 · 10^7 S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	68,6	68,6
2	116,5	58,3
4	188,5	47,2
8	288,7	34,8
nach 1^h 15^m		
1	45,6	45,6
2	72,6	36,3
4	105,2	26,3
8	154	19,2

d. = 1,135 mm D. = 303 Th.
W. = 179 · 10^7 S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	14	14
2	25,1	12,6
4	39,2	9,8
8	59,4	7,4
nach 30^m		
8	50,3	6,3

d. = 7,49 mm D. = 303 Th.
W. = 179 · 10^7 S. E. t. = 24°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	76,6	74,6
2	148,5	74,6
4	282	70,5
nach 30^m		
4	123,6	30,9

Abnahme der Stromstärke mit der Durchströmungsdauer.

d. = 7,49 mm D. = 303 Th.
W. = 179 · 10^7 S. E. t. = 24°
E. = 8 D.

Vor Beginn des Versuches war die Probe schon 30^m von einem Strome von 4 Daniell durchflossen.

T.	i	$\frac{i}{E}$
2^m	253	31.6
30	207,6	25,9
1^h 55	178,3	22,4
13^h 55	15,4	1,9

E. = 1 D. t. = 24°

d.	Sp. W.	T.
0,19 mm	875 · 10^{14} S. E.	3^m
0,19	1706 · 10^{14}	1^h 15 „
1,135	1055 · 10^{14}	3 „
1,135	1244 · 10^{14}	30 „
7,49	26,3 · 10^{14}	3 „
7,49	1167 · 10^{14}	13^h

	Sp. W.	t.
1. Probe	250 · 10^{14} S. E.	24°
2. Probe	84,6 · 10^{14}	20°
3. Probe	1055 · 10^{14}	24°

Destillirtes Wasser, Alkohol und Aether.

Der Widerstand dieser Substanzen wurde in vorzüglicher Weise theils von Kohlrausch selbst, theils nach seiner Methode von anderen Physikern bestimmt. Ich verfolgte daher in meinen Untersuchungen nicht das Ziel, den numerischen Angaben neue hinzuzufügen, sondern war nur bestrebt, einige der bei Durchströmung von Isolatoren auftretenden Erscheinungen auch für diese viel besseren Leiter nachzuweisen.

Die getroffene Versuchsanordnung gestattete leider keine Variation der Potentialdifferenz der Condensatorplatten. Ich musste mich daher auf eine Untersuchung bei verschiedenen Elektrodendistanzen, — die indirect auch einen Schluss auf das Verhalten bei verschiedenen Spannungen gestattet, — und bei verschiedener Durchströmungsdauer beschränken. Als Vergleichswiderstand diente ein Siemens'scher Rheostat. Die galvanische Polarisation wurde durch Verwendung sehr sorgfältig amalgamirter Zinkelektroden vermieden. Mit Hilfe des Elektrometers konnte ich mich überzeugen, dass dies bei destillirtem Wasser vollkommen gelungen war; das ist aber weit schwieriger bei Alkohol, Aether, da die hier schon stärker auftretenden diëlektrischen Erscheinungen, als Condensatorladung und Rückstandsbildung, elektrometrisch von galvanischer Polarisation nicht zu unterscheiden sind, aber sicher betrug letztere nicht mehr als 0,025 Daniell und wäre nicht im Stande, alle auftretenden Erscheinungen zu erklären.

11. Destillirtes Wasser.

1. Probe.

$E = 1$ D. 1 = 24°

d.	Sp. W.	T.
1,135 mm	$109 \cdot 10^7$ S. E.	1m
1,135	$109 \cdot 10^7$	5
3,015	$80 \cdot 10^7$	1
3,015	$88 \cdot 10^7$	5
7,49	$58 \cdot 10^7$	1
7,49	$59 \cdot 10^7$	5
7,49	$59 \cdot 10^7$	30

2. Probe.

$E = 1$ D. t. = 24° T = 2 m

d.	Sp. W.
1,135 mm	$136 \cdot 10^7$ S. E.
3,015	$74 \cdot 10^7$
7,49	$51 \cdot 10^7$

12. Alkohol (sog. absoluter).

1. Probe.

t. = 24° $E = 1$ D. T. = 4m

d.	Sp. W.
1,135 mm	$251 \cdot 10^8$ S. E.
3,015	$123 \cdot 10^8$
7,49	$101 \cdot 10^8$

2. Probe.

$E = 1$ D. t. = 24°

d.	Sp. W.	T.
1,135 mm	$162 \cdot 10^8$ S. E.	1m
1,135	$302 \cdot 10^8$	30
3,015	$135 \cdot 10^8$	1
7,49	$84 \cdot 10^8$	1
7,49	$76 \cdot 10^8$ (?)	20

13. Aether.

1. Probe.

$E = 1$ D. t. = 20° T. = 1m

d.	Sp. W.
1,15 mm	160 · 10⁸ S. E.
3,015	118 · 10⁸
7,49	111 · 10⁸

2. Probe.

(Ueber Chlorcalcium getrocknet.)

$E = 1$ Dan. t. = 20° T. = 1m

d. = 1,135 mm Sp. W. = 342 · 10⁸ S. E

Das übereinstimmende Resultat einer grossen Reihe von Versuchen war, dass der scheinbare specifische Widerstand mit der Elektrodendistanz abnimmt. Diese Erscheinung konnte weder durch einen constanten Fehler (Uebergangswiderstand) noch durch galvanische Polarisation erklärt werden; wir dürften es daher auch hier mit diëlektrischen Vorgängen zu thun haben. Vergrösserung des Widerstandes mit der Durchströmungsdauer war selbst bei Wasser oft nachzuweisen; die entgegengesetzten Resultate, welche besonders leicht bei grosser Elektrodendistanz auftreten, erklären sich ungezwungen durch fortwährend zunehmende Verunreinigung der Probe, deren Einfluss ja aus den Untersuchungen Kohlrausch's bekannt ist.

Alle gebräuchlichen festen Isolatoren übertreffen die untersuchten Flüssigkeiten an Isolationsvermögen, oft aber auch in Bezug auf Rückstandsbildung; ja dieser Umstand ergibt geradezu eine Hauptschwierigkeit der Untersuchung, da es bei manchen Glassorten, bei Paraffin und anderen kaum gelingt, rückstandsfreie Proben zu erhalten.

14. Glas.

Glasröhren wurden an dem einen Ende zugeschmolzen, an dem anderen, um von oberflächlicher Leitung geschützt zu sein, mit Siegellack überzogen. Die auf diese Weise hergestellten Röhren wurden mit concentrirter Zinkvitriollösung gefüllt, und von derselben Flüssigkeit umgeben. Als Elektroden dienten amalgamirte Zinkdrähte.

Es kamen hauptsächlich 2 Glassorten zur Untersuchung:

1. Weiches, leichtschmelzbares Sodaglas (Thüringerglas).

2. Hartes, schwerschmelzbares Kaliglas, wie es zu Verbrennungsröhren benutzt wird.

Die Isolationsfähigkeit der verschiedenen Glassorten scheint besonders von der Höhe des Schmelzpunktes abzuhängen, indem alle untersuchten schwerschmelzbaren Gläser viel besser isolirten als leichtschmelzbare. Ja bei ersteren stieg nach langem Durchströmen der Widerstand regelmässig so hoch, dass er nicht mehr gemessen werden konnte, obwohl die Versuchsanordnung noch einen Widerstand von 10^{20} S. E. per Cubikcentimeter zu beobachten gestattet hätte.

Von der grossen Zähigkeit, mit welcher einige Gläser Rückstände festhalten und einer eigenthümlichen daraus entspringenden Eigenschaft ist schon früher die Rede gewesen.

Die vollkommene Entfernung von Rückständen stösst auf grosse Schwierigkeiten, da die letzten Reste desselben nur ungemein langsam aus dem Glase hervorkriechen und daher bei kurzer Untersuchungsdauer leicht übersehen werden können.

Schwerschmelzbares Kaliglas.

Von den Versuchen mit schwerschmelzbaren Gläsern führe ich jenen an, bei welchem die längste Zeit bis zur scheinbar vollkommenen Isolation verstrich, obwohl er eigentlich für das Verhalten dieser Glassorte wenig charakteristisch ist. Aber bei ihm allein liessen sich die Veränderungen mit der Zeit gut verfolgen, während in den meisten anderen Fällen nur ein sehr starker Schliessungstrom beobachtet wurde, welcher aber in weniger als fünf Minuten ganz verschwand. Auch eine Bestimmung bei verschiedenen elektromotorischen Kräften ist unter diesen Umständen unmöglich.

Den meisten schwerschmelzbaren Gläsern würde demnach ein intensiverer, aber viel kürzer dauernder Schliessungsstrom als der gewählten Probe entsprechen.

d. = 1,2 mm $E = 8$ D. t. = 23°

T.	Sp. W.
5m	$15 \cdot 10^{17}$ S. E.
1h 30m	$73 \cdot 10^{17}$
6h	$107 \cdot 10^{17}$
13h	nicht messbar

Nach langer Durchströmung war eine sehr eigenthümliche Veränderung eingetreten: Das Potentialgefälle im Vergleichswiderstande war nicht nur ganz verschwunden, sondern hatte sich in ein entgegengesetztes verwandelt, so dass sich der Verlauf des Potentiales in der Zweigleitung wie Fig. 5 zeigt darstellt.

aa' = Totales Potentialgefälle in der Zweigleitung,

$aa' + bb'$ = Potentialgefälle im Glase,

$-bb'$ = Potentialgefälle im Vergleichswiderstande.

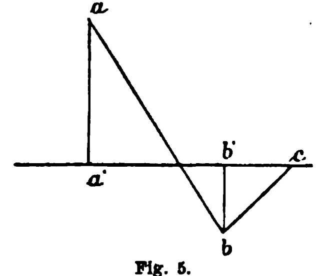


Fig. 5.

Eine verwandte Erscheinung beobachtet man bei der Abnahme der diesem Glase mitgetheilten disponiblen Ladung. Wurde eine der Belegungen mit negativer Elektricität geladen, hierauf die Verbindung mit der Batterie unterbrochen und jene mit dem Elektrometer hergestellt,

so konnte leicht die Abnahme der disponiblen Ladung beobachtet werden. Sie geht rasch vor sich, das Glas nähert sich aber hierbei nicht, wie man erwarten sollte, dem unelektrischen Zustande, sondern einer positiven Ladung, welche es durch lange Zeit festhält. Dieser Verlauf ist durch die untere Curve (Fig. 6) veranschaulicht. Wurde andererseits die mit der Batterie verbundene Belegung, ohne den Condensator zu entladen, zur Erde abgeleitet, die andere hingegen mit dem Elektrometer verbunden, so entspricht die obere Curve dem Verlaufe der nun beobachteten disponiblen Ladung.



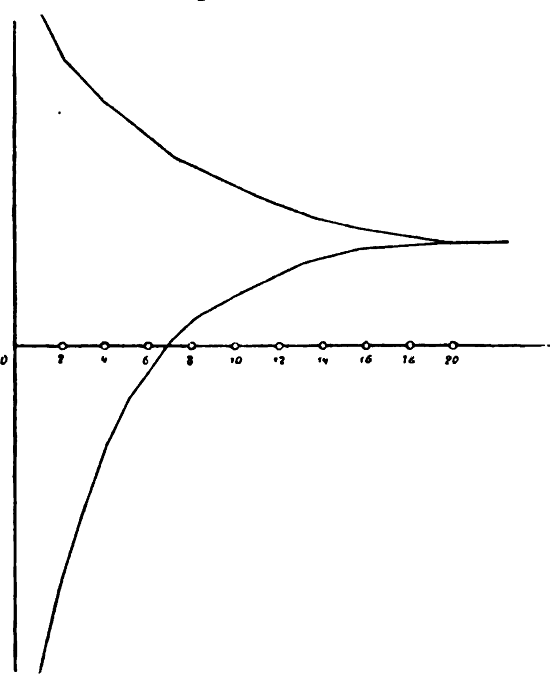


Fig. 6.

Nach der Abscissenaxe ist die Zeit vom Momente der Isolirung an in Minuten, nach der Ordinatenaxe die disponible Ladung gezählt.

Die Versuche wurden noch länger fortgesetzt und ergaben ein geringes Schwanken um den Werth der disponiblen Ladung, welchem sich beide Curven asymptotisch nähern.

Dasselbe Verhalten zeigt auch die Abnahme wieder zu Tage getretener Rückstände.

Wurden beide Condensatorbelegungen durch längere Zeit zur Erde abgeleitet, so stellte sich, wenn auch viel langsamer, doch immer wieder derselbe Ausschlag ein, ja er war selbst nach Ableitung durch 24 Stunden nur um ein Drittel seines Werthes kleiner geworden.

Der Unterschied zwischen dieser Ladung des Glases und einem Rückstande besteht darin, dass, während jener den Charakter eines Elementes zeigt, d. h. eine Potentialdifferenz der Condensatorplatten bedingt, diese sich als gleiche und gleichbezeichnete Potentialdifferenz beider Condensatorplatten gegen das Potential der Erde darstellt.

Eine ganz ähnliche Erscheinung beschrieb Hopkinson.[1])

1) Hopkinson, l. c. S. 603.

Leichtschmelzbares Sodaglas.

Für alle leichtschmelzbaren Gläser konnte eine bestimmte Leitungsfähigkeit angenommen werden; nie trat vollkommene Isolation ein. Die Rückstandsbildung hielt lange Zeit an, und auch die oben beschriebene Ladung wurde beobachtet. Diese Gläser sind es, welche selten rückstandsfrei gefunden werden, ja lange durchströmte Proben können nach Öttingen[1]) ganz wohl mit einem unerschöpflichen Rückstandsreservoir verglichen werden.

Aus einer Reihe von Versuchen ergab sich, dass der scheinbare specifische Widerstand dünner Röhren grösser war als der dicker, doch könnte diese Erscheinung immerhin auch durch verschiedene Zusammensetzung der Gläser bedingt sein.

Kurz nach Stromschluss konnten wegen der raschen Veränderlichkeit des Ausschlages keine Bestimmungen der Stromstärke bei verschiedenen elektromotorischen Kräften vorgenommen werden. Nach langer Durchströmungsdauer waren die Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze unbedeutend.

1. Probe.

d. = 0,5 mm t. = 23° T. = 2^h 1 D. = 310 Th.

E	i	$\frac{i}{E}$
1	5,4	5,4
2	10,6	5,3
4	21,4	5,35

Sp. W. = $135 \cdot 10^{16}$ S. E. T. = 2^h

Sp. W. = $142 \cdot 10^{16}$ S. E. T. = 24^h

2. Probe.

d. = 0,86 mm t. = 23° T. = 2^h 1 D. = 326 Th.

E	i	$\frac{i}{E}$
1	52	52
2	103	51,5
4	200	50
8	384	48

Sp. W. = $75 \cdot 10^{16}$ S. E.

Der Unterschied in dem Verhalten von schwer- und leichtschmelzbaren Gläsern ist derselbe, wie zwischen Petroleumäther und Terpentinöl. In den ersteren ist die Rückstandsbildung in wenigen Minuten vollendet, worauf nahezu vollständige Isolation eintritt, während in

1) Oettingen, Wied. Ann. Bd. 2, S. 305, 1877.

den letzteren die Rückstandsbildung lange anhält und allmählig in Leitung übergeht.

15. Guttapercha.

Guttapercha wurde in zwei Formen untersucht:

1. Als dünnes Blättchen.
2. Als dickere nicht ausgewalzte Platte.

Die erstere isolirte stets viel besser.

Die Guttaperchahäutchen wurden zwischen erwärmten Metallelektroden gepresst und so ein inniger Contact hergestellt, doch scheint der Widerstand nach dem Erwärmen etwas kleiner zu bleiben als vor demselben.

Die einzelnen Proben gaben sehr wenig übereinstimmende Resultate. Manche zeigten ausser der Vergrösserung des Widerstandes mit der Zeit ganz normale Eigenschaften, andere schienen bei grösserer Potentialdifferenz der Elektroden besser zu leiten, doch verlor sich die letzte Erscheinung gewöhnlich mit der Zeit.

1. Probe.

d. = 0,04 mm W. = $473 \cdot 10^8$ S. E. T. = 2^m
T. = 378 Th. t. = 23^0

E	i	$\frac{i}{E}$
1	9	9
2	19	9,5
4	45	11,25
8	117	14,6
T. = 40^m		
8	88	11

E	T.	Sp. W.
1	2^m	$166 \cdot 10^{18}$ S. E.
8	2	$101 \cdot 10^{18}$
8	40	$135 \cdot 10^{18}$

2. Probe.

d. = 0,04 mm W. = $147 \cdot 10^8$ S. E. T. = 2^m
D. = 360 Th. t. = 23^0

E	i	$\frac{i}{E}$
1	27	27
2	55	27,5
4	112	28
8	246	30,8
T. = 60^m		
8	146	18,2

Sp. W. = $120 \cdot 10^{17}$ S. E. T. = 1^h

Wie regelmässig andererseits die Erscheinungen sein konnten zeigt folgende Tabelle:

3. Probe.

d. = 0,07 mm W. = $473 \cdot 10^8$ S. E. T. = 2^m

E	i	$\frac{i}{E}$
1	15	15
2	30	15
4	60	15
8	120	15

T.	i	$\frac{i}{E}$
2^m	120	15
30^m	100	12,5
60^m	61	7,5
90^m	60	7,5

	Sp. W.	T.
1. Probe.	$519 \cdot 10^{17}$ S. E.	2^m
2. Probe.	$104 \cdot 10^{18}$ S. E.	$1^h\ 30^m$

Auch die dickere Guttaperchaplatte bot stärker gespannten Strömen geringeren Widerstand, doch sind alle angegebenen Zahlen mit grosser Reserve aufzunehmen, da aus unbekanntem Grunde der scheinbare Widerstand der untersuchten Platte von der Grösse des Vergleichswiderstandes, sobald derselbe eine gewisse Grenze überschritt, abhing. Allerdings wurde letztere in den angeführten Beobachtungen nicht erreicht.

Die Platte nahm so viel Rückstand auf, dass immer eine Potentialdifferenz ihrer Oberflächen beobachtet werden konnte.

d. = 2,6 mm D. = 378 Th.
W. = $276 \cdot 10^6$ S. E. t. = 24° T. = 2^m

E	i	$\frac{i}{E}$
1	6,6	6,6
2	13,4	6,7
4	33,6	8,4
8	75,9	9,4

T.	i	$\frac{i}{E}$
1^h	115	14,8
5^h	85	10,6

Sp. W. = $508 \cdot 10^{12}$ S. E. $E = 1$ D. T = 2^m

Bei längerer Durchströmung nimmt der Widerstand ab, erreicht ein Minimum und nimmt weiterhin zu.

16. Paraffinpapier.

Mit Paraffin getränktes Papier wurde zwischen erwärmten Elektroden fixirt und der so gebildete Condensator untersucht.

Paraffinpapier wurde nie rückstandsfrei getroffen. Die Probe, mit welcher die folgenden Resultate gewonnen wurden, zeigte vor der Durchströmung eine Potentialdifferenz der Belegungen von 45 Th. (1 D. = 315 Th.), nach derselben, obwohl beide Belegungen viele Stunden hindurch zur Erde abgeleitet worden waren, 56 Theilstriche.

d. = 0,14 mm D. = 315 Th.
W. = 282 · 10 S. E. T. = 2^m t. = 23°

E	i	$\frac{i}{E}$
1	18	18
2	38	19
4	86	21,5
8	191	23,9

T.	i	$\frac{i}{E}$
3^h 30^m	155	19,8
24^h	96	12

Sp. W. = 110 · 10^{11} S. E. E = 1 D. T. = 2^m

Man sieht, auch hier wächst, wie bei Guttapercha, die Stromstärke rascher als die elektromotorische Kraft. Vor allem fällt aber die scheinbar schlechte Isolationsfähigkeit des Paraffinpapieres auf. Mit diesem Verhalten steht dagegen gar nicht der langsame Ladungsverlust eines Paraffinpapiercondensators im Einklange. Während für etwas leitende Diëlektrica von demselben specifischen Widerstande die disponible Ladung in weniger als einer Secunde verloren worden wäre, nahm sie in dem Paraffincondensator auf folgende Weise ab.

T. = 1^h D. = 315 Th. E = 1 D.

Zeit, welche seit der Isolation verflossen ist:	Disponible Ladung:
0^m	315 Th.
1	252
2	222
5	182
20	149
30	136
35	132
55	116
1^h 35	103
3^h 25	87
15^h	56

Diese Erscheinung, zusammengehalten mit den beobachteten unerschöpflichen Rückständen, lässt uns vermuthen, dass das Verhalten des Paraffinpapiercondensators bei constanter Durchströmung, obwohl es einer Leitung sehr ähnlich sieht, doch nur auf Rückstandsbildung beruhe. Paraffinpapier bietet ja diesem Prozesse besonders günstige Verhältnisse in Folge seiner Inhomogenität dar; denn reines Paraffin nahm allerdings viel Rückstand auf, endete aber stets mit vollständiger Isolation.[1])

Die Art, wie diese grosse Elektricitätsmenge im Condensator aufgespeichert wird, bedarf noch weiterer Untersuchung.

Ich glaube ferner nicht zu irren, wenn ich einen grossen Theil der scheinbar viel besseren Leitung dicker als dünner Guttaperchaplatten auf Rückstandsbildung wie bei Paraffinpapier zurückführe.

17. Ebonit und Hartgummi.

Eine 0,4 mm dicke Ebonitscheibe wurde am Rande von einem erhöhten Paraffinwalle umgeben, und die beiden Condensatorbelegungen durch Quecksilber gebildet. Die Untersuchung wurde mit 1 — 8 D. und mit 100 Smee-Elementen vorgenommen und ergab nach 5 Minuten stets vollkommene Isolation, so dass der specifische Widerstand sicher 10^{12} S. E. übersteigt. Die Rückstandsbildung ist gering, doch manchmal zeigt sich positive Ladung.

Eine etwas dickere Hartgummiplatte verhielt sich ebenso wie Ebonit. Ihr specifischer Widerstand ist von derselben Grössenordnung, nur ihr Rückstand und ihre bleibende positive Ladung waren etwas bedeutender als bei Ebonit.

In der folgenden Tabelle sind der Grössenordnung nach die Mittelwerthe der für die untersuchten Substanzen gefundenen specifischen Widerstände zusammengestellt.

1) Ich halte die von Arons (Wied. Ann. Bd. 35, S. 545) gegen die Rückstandsbildung angeführten Gründe für nicht stichhaltig, da sie von der falschen Voraussetzung ausgehen, dass der nur einmal wieder zu Tage getretene Rückstand die ganze im Diëlektricum aufgespeicherte Rückstandsmenge repräsentire, eine Annahme, deren Unhaltbarkeit schon durch Kohlrausch's und Hopkinson's Versuche erwiesen ist



	Sp. W.
Petroleumäther	$2000 \cdot 10^{15}$ S. E.
Terpentinöl	$50 \cdot 10^{15}$
Ricinusöl	$2 \cdot 10^{15}$
Leinöl	$6 \cdot 10^{15}$
Mandelöl	$30 \cdot 10^{15}$
Olivenöl	$100 \cdot 10^{15}$
Schwefelkohlenstoff	$8 \cdot 10^{15}$
Vaselinöl	$2000 \cdot 10^{15}$
Benzol	$200 \cdot 10^{15}$
Toluol	$2 \cdot 10^{15}$
Xylol	$10 \cdot 10^{15}$
Wasser	$10 \cdot 10^{8}$
Alkohol	$200 \cdot 10^{8}$
Aether	$200 \cdot 10^{8}$
Glas { schwerschmelzbar	$100 \cdot 10^{18}$
Glas { leichtschmelzbar	$10 \cdot 10^{18}$
Guttapercha	$100 \cdot 10^{18}$
Ebonit, Hartgummi, Paraffin	über 10^{22}

Gehen wir endlich zur Beantwortung der Frage über, ob die Abweichungen der beobachteten Diëlektricitätsconstante von dem Quadrate des Brechungsexponenten mit der Leitung der betreffenden Diëlektrica zusammenhängt, so ist nach meinen Versuchen klar, dass eine directe Beziehung zwischen diesen beiden Grössen nicht bestehen kann, dass vielmehr hauptsächlich die Art der Rückstandsbildung auf die beobachtete Diëlektricitätsconstante von Einfluss ist. So dass z. B. einem der besten Isolatoren, schwerem Flintglase, die grösste Diëlektricitätsconstante entspricht. Nur bei den Ölen halten die Abweichungen der Diëlectricitätsconstante vom Quadrate des Brechungsexponenten dieselbe Reihenfolge, wie ihre Leitungsfähigkeiten ein.

Ueber Ostwald'sche Tropfelektroden.

Zweite Erwiderung.

Von

F. Exner und J. Tuma.

In zwei vorangegangenen Publicationen [1]) haben wir in ausführlicher Weise dargethan, dass die Methode Ostwald's zur Bestimmung des Potentials einer Flüssigkeit keineswegs einwurfsfrei ist; es basirt dieselbe auf der Voraussetzung, dass die Quecksilber-Tropfelektrode dasselbe Potential annehme wie die Flüssigkeit, eine Voraussetzung, die nicht mehr erfüllt ist, sobald die Flüssigkeit chemisch auf das Quecksilber einwirkt. Letzteren Umstand hat Herr Ostwald auch anerkannt, desgleichen, dass bei allen bisherigen Versuchen nach dieser Methode nur solche Flüssigkeiten — nämlich lufthaltige — zur Verwendung kamen, die das Quecksilber merklich angreifen, und consequenter Weise gibt Herr Ostwald schliesslich auch zu, dass alle bisherigen Messungen nach dieser Methode mit einem Fehler behaftet sind.

Was die Grösse dieses Fehlers anlangt, so sagt Herr Ostwald in seiner letzten Erwiderung [2]), er sei „der durch die Versuche am Capillarelektrometer begründeten Meinung, dass die etwaigen Störungen durch den Luftgehalt seiner Lösungen zu geringfügig sind, um einen merklichen Einfluss zu üben. Das schliesst nicht aus, dass durch Vorgänge, welche viel energischer erfolgen, als der erwähnte möglicherweise auch messbare Abweichungen bedingt werden."

Mit dem letzteren Satze meint Herr Ostwald offenbar seine frühere Verwendung von Quecksilber-Tropfelektroden in Salzsäure und Salpetersäure, und es freut uns, dass er wenigstens in diesem Falle die Möglichkeit „messbarer Abweichungen" zugibt; was aber die An-

1) „Studien zur chemischen Theorie des galvanischen Elementes", dieses Repert. Bd. 25. S. 142 und „Ueber Quecksilber-Tropfelektroden" ebenda S. 597.

2) Zeitschrift für phys. Chemie Bd. 4. S. 570.

wendung seiner Methode auf andere lufthaltige Flüssigkeiten z. B. H_2SO_4 betrifft, so hätten wir, mit Rücksicht darauf, dass es sich hier um die Richtigkeit oder Unrichtigkeit seiner Methode handelt, doch eine etwas ausführlichere Begründung seiner „Meinung" erwartet, derzufolge nach Versuchen am Capillar-Elektrometer sein Fehler ein verschwindend kleiner sein soll. Eine solche Begründung wäre aber nicht geglückt; denn der Meniscus des compensirten Capillarelektrometers hat sowenig das Potential der Flüssigkeit als die Tropfelektrode es hat — letztere Differenz beträgt nach unseren Messungen ca. 0,8 V — und aus der Gleichheit der nach beiden Methoden gewonnenen Werthe folgt somit für die Existenz oder Nichtexistenz dieser Potentialdifferenz gar nichts.

Herr Ostwald ist somit nicht im Stande, über die Grösse des von ihm zugestandenermaassen bei allen seinen Messungen begangenen Fehlers irgend eine begründete Angabe zu machen. Nach unseren Messungen beträgt derselbe ca. 0,8 Volt, ist also von derselben Grössenordnung wie die zu messenden Grössen selbst.

Dies nur vorläufig zur Orientirung; wir kommen nun zur genaueren Besprechung seiner letzten oben citirten Erwiderung[1]). In dieser betritt Herr Ostwald nur an einem einzigen, allerdings für die ganze Frage sehr wichtigen Punkte das Gebiet der Thatsachen.

Es handelt sich darum: woher stammt die Energie der (Lippmann'schen oder Quincke'schen) Ströme, welche man erhält, sobald man die Tropfelektrode durch ein Galvanometer mit dem abgetropften Quecksilber verbindet. Wir haben dieselbe in einer Oxydation der durch das Tropfen rein erhaltenen Quecksilberoberfläche nicht nur gesucht, sondern auch gefunden, denn selbst in ausgekochter H_2SO_4 hat sich — ganz in Uebereinstimmuug mit den seither erschienenen Versuchen Warburg's[2]) — eine zur Unterhaltung des beobachteten Stromes mehr als hinreichende Menge Quecksilber gelöst gefunden. Herr Ostwald dagegen bestreitet eine solche Lösung wenigstens in ausgekochter H_2SO_4 (mit welchem Rechte, darauf kommen wir später zurück) und sucht die Energiequelle der Ströme in der Schwerkraft; mit Bezug auf letztere haben wir uns dahin geäussert: „eine einfache Rechnung zeigt, dass sie nicht im Entferntesten zur Erzeugung der Stromenergie hinreicht." Herr Ostwald ist anderer Meinung, und sagt, unsere Rechnung wäre wohl einfach, wie es scheint aber nicht

1) Die maasslosen zum Theil ungeziemenden persönlichen Invectiven in dieser Erwiderung bedauern wir sehr, und zwar im Interesse des Herrn Ostwald selbst; im übrigen existiren sie für uns nicht und wir werden uns durch dieselben von dem einmal betretenen Wege des Thatsächlichen in keiner Weise abbringen lassen.

2) Wied. Ann. Bd. 38. S. 321 (1889).



richtig gewesen; er glaubte wahrscheinlich, dass wir obigen Satz leichtfertig niedergeschrieben haben. Um dessen Gegentheil zu zeigen, führt er folgende Rechnung: „Nehmen wir von S. 608 [1]) den grössten Werth für die Stromenergie, welchen die Herren beobachtet haben, 0,55 D oder 0,6 V bei 0,000008 Ampère. Da 1 $V = 10^8$ cm g. s. und 1 $A = 10^{-1}$ cm g. s. ist, so beträgt die Stromenergie 0,6·0,000008·10^7 = 48 cm g. s. Die verbrauchte Gravitationsenergie lässt sich nur schätzen, da keine Angaben vorliegen. Nimmt man an, was jedenfalls viel zu klein ist, dass in der Secunde 0,01 g Quecksilber unter einer Druckhöhe von 30 cm ausgeflossen sind, so beträgt die Gravitationsarbeit, in runder Zahl g = 1000 gesetzt, noch immer 300 cm g. s. also reichlich sechsmal mehr als die Stromenergie."

Wir müssen uns wundern, dass Herrn Ostwald beim Niederschreiben vorstehender Rechnung nicht sofort das Fehlerhafte derselben aufgefallen ist; bevor wir aber auf dasselbe eingehen, müssen wir zunächst die Zahlen, die wir seiner Zeit nicht mitgetheilt haben, soweit sie sich auf unseren Versuch beziehen, richtig stellen. Die Ausflussmenge betrug bei unseren Versuchen 0,04 g in der Secunde, bei einer Druckhöhe von 20 cm., die ganze Gravitationsenergie betrug somit 800 cm g. s.; dagegen war die grösste beobachtete Stromenergie nach unserer von Herrn Ostwald citirten Tabelle gleich 84 cm g. s. (nicht 48, wie Herr Ostwald irrthümlich angibt, da er einen der kleinsten Werthe der Tabelle gewählt hat). Die gesammte verfügbare Gravitationsarbeit war somit etwa zehnmal so gross als die beobachtete Arbeit des Stromes.

Welcher Theil dieser Gravitationsarbeit wird aber auf Reibung in der Capillare verbraucht? und welcher Theil derselben bleibt noch als lebendige Kraft der Tropfen bestehen? Das sind Fragen, die sich Herr Ostwald in der Eile gar nicht vorgelegt zu haben scheint und doch lehrt schon der Anblick einer Tropfelektrode ohne weiteres, dass diese Mengen sehr bedeutende sein müssen. Herr Ostwald führt seine Rechnung so, als würde das Quecksilber mit der der Druckhöhe entsprechenden Geschwindigkeit des freien Falles in die Flüssigkeit treten und dorten diese Geschwindigkeit — falls der Strom geschlossen wird — vollkommen verlieren.

Da es so einfach ist, aus der Ausflussgeschwindigkeit den Energieverlust in der Capillare zu bestimmen, so müssen wir uns wundern, dass Herr Ostwald nicht einmal diesen ersten Controlversuch gemacht hat; wir hatten diese Bestimmung natürlich ausgeführt und es ergab sich ein Verlust von 99% der von Herrn Ostwald in Rech-

1) Unserer ersten Erwiderung; dieses Rep. Bd. 25. S. 597.

nung gestellten Grösse.[1]) Es betrug somit die Gravitationsenergie des Quecksilbers in unserem Falle beim Eintritt in die Flüssigkeit nur mehr 8 cm. g. s., eine Grösse, von der wir wohl berechtigt waren zu sagen, dass sie nicht im entferntesten ausreiche, die Energie des beobachteten Stromes — 84 cm g. s. — zu erklären.

Aber auch diese restliche Energiemenge im Betrage von 8 cm. g. s. kann nicht ganz in Stromarbeit verwandelt werden, denn die Quecksilbertropfen kommen mit einer gewissen Geschwindigkeit unten an — ganz abgesehen von der Reibung in der Flüssigkeit. Wir haben auch diese Geschwindigkeit noch einer Prüfung unterzogen mit Rücksicht darauf, ob sie sich bei Schliessung des Stromes ändert oder nicht. Es konnte eine solche Aenderung absolut nicht constatirt werden, obwohl wir die Untersuchung nach zwei verschiedenen Methoden führten, die beide eine Aenderung um $1/2$ % hätten erkennen lassen. Wenn demnach, im Falle des Stromschlusses, von der kinetischen Energie des Quecksilbers überhaupt etwas zur Erzeugung des Stromes verwendet wird, so muss diese Menge unterhalb 1 % der ursprünglichen liegen. Nun betrug aber letztere nur mehr 8, so dass also höchstens 0,08 cm g. s. zur Erzeugung eines Stromes verfügbar wären, der selbst eine Energie = 84 cm g. s., das ist mehr als das 1000fache, repräsentirt.

Damit erledigt sich die Frage, welche Rechnung falsch war, die unsere oder die des Herrn Ostwald, von selbst.

Da wir auch in ausgekochter H_2SO_4, also in sogenannt luftfreier, unter denselben Umständen noch Ströme von der Energie 33 cm g. s. beobachtet haben, so wird man wohl auch hier die Quelle derselben nicht in der Gravitation suchen wollen, umsomehr als sowohl von uns wie von Warburg ein chemischer Angriff des Quecksilbers durch ausgekochte H_2SO_4 nachgewiesen wurde.

Wir glauben somit zur Genüge dargethan zu haben, dass die Schwere nicht die Ursache der beobachteten Ströme sein kann, und sind sehr gespannt darauf, zu erfahren, wo in Zukunft Herr Ostwald die Quelle derselben suchen wird; bei der Beharrlichkeit, mit welcher er bisher von dem Effekt eines chemischen Angriffes Umgang genommen hat, glauben wir kaum, dass er künftig denselben anerkennen wird, was allerdings einem Preisgeben seiner Methode gleich käme.

Wir haben die Grösse des Antheils, welchen eventuell die Schwere an den erzeugten Strömen haben kann, nicht umsonst mit thunlichster

1) Der mittlere Durchmesser der nahezu kreisförmigen Ausflussöffnung betrug 0,15 mm.



Genauigkeit bestimmt; es ergibt sich nämlich aus dieser Bestimmung die Grösse jenes Fehler's in der Methode des Herrn Ostwald, welchen dieser, ohne Angabe der Gründe, als verschwindend klein ansieht. Da die elektromotorische Kraft der von uns gemessenen Ströme mehrere Zehntel Volt betrug, die Schwere dazu aber nicht $\frac{1}{1000}$ beiträgt, so folgt daraus, dass durch letztere Ursache — wenn sie überhaupt existirt — bei der vorliegenden Versuchsanordnung nur absolut verschwindend kleine Potentialdifferenzen erzeugt werden könnten.

Nun haben wir aber Ströme von über 0,5 V gemessen[1]), und die äusserste Grenze betrug 0,8 V bei Einschaltung eines Galvanometers zwischen die Tropfelektrode und eine in die H_2SO_4 tauchende Platinelektrode. Da in letzterem Falle eine Oxydation nur an der Tropfelektrode stattfinden konnte — eine Wirkung der Schwerkraft aber, wie oben gezeigt wurde, ausgeschlossen ist — so folgt daraus, dass die durch Oxydation der Tropfelektrode erzeugte Potentialdifferenz zwischen letzterer und der H_2SO_4 den Betrag von 0,8 V erreichte. So gross ist demnach der Fehler in Herrn Ostwald's Methode, und so gross ist auch thatsächlich die constante Differenz in unseren beiderseitigen Messungen; aber verschwindend klein ist dieser Fehler nicht, wie Herr Ostwald meint, denn die zu messenden Grössen betragen selbst nur Zehntel, oft nur Hundertel Volt, er ist vielmehr gross genug, um die Methode des Herrn Ostwald absolut unbrauchbar zu machen. —

Wir müssen nun noch einige Punkte in Herrn Ostwald's Erwiderung berühren, die das Gebiet des Thatsächlichen wenigstens noch streifen.

Da ist zunächst die Frage, ob das Quecksilber auch von ausgekochter H_2SO_4 noch chemisch angegriffen wird oder nicht. Herr Ostwald leugnet dies mit Hinblick auf einen Versuch, welchen er gemacht hat und bei welchem — der gemessenen Stromstärke entsprechend — viermal soviel Quecksilber hätte in Lösung gehen sollen, als eben noch erkennbar war. Wir haben dagegen eingewendet, dass nicht viermal soviel, sondern nur zweimal soviel hätte in Lösung gehen sollen, wobei wir — wie dies auch von Warburg geschieht — die Bildung von $HgSO_4$ vorausgesetzt haben. Herr Ostwald geht aber von der Bildung von Hg_2SO_4 aus; ob dies bei den Spuren, um welche es sich hier handelt, berechtigt ist, vermögen wir nicht zu entscheiden, wollen es aber zu unseren Ungunsten annehmen. Unser Einwand, dass Herr Ostwald sich bei seinem Versuche an der Grenze des Erkennbaren befunden hat, bleibt dessenungeachtet

1) Vergl. unsere „Studien“.



bestehen; denn wenn auch die vierfache Menge Quecksilber oxydirt wurde, so ist es doch fraglich, wie viel davon in der kurzen Zeit seines Versuches auch in Lösung gegangen ist. Gewiss ist dies nur ein Bruchtheil, wahrscheinlich aber ein sehr kleiner, denn das Oxydationsprodukt haftet stark an der glatten Oberfläche des Quecksilbers. Eine Beweiskraft kann man daher dem Versuche Ostwald's durchaus nicht zuschreiben. Nun haben wir aber schon in unserer ersten Erwiderung gezeigt, dass bei mehrstündiger Einwirkung sich nicht nur weit mehr als die zur Unterhaltung des Stromes nothwendige Menge Quecksilbers in Lösung nachweisen lässt, sondern dass auch an der Stelle des unteren Quecksilbers, wo die Tropfen niederfallen, sich ein deutlicher Oxydationsfleck zeigt, somit noch eine unbestimmte Menge oxydirten Quecksilbers nicht in Lösung gegangen war. Ausserdem hat fast gleichzeitig Warburg[1]) nachgewiesen, dass in ausgekochter H_2SO_4, wenn sie längere Zeit mit Quecksilber geschüttelt wird, sich deutlich gelöstes Quecksilber nachweisen lässt.

Wir hätten erwartet, dass diese Umstände Herrn Ostwald veranlasst hätten, seinen Versuch mit längerer Wirkungszeit zu wiederholen, wodurch er ja am einfachsten, und wirksamer als durch persönliche Bemerkungen, unsere Einwände hätte widerlegen können; dem ist jedoch nicht so. Herr Ostwald hat diesen Versuch — nebenbei bemerkt den einzigen, durch welchen er noch seine Ansicht zu stützen sucht — nicht wiederholt.

Wir kommen nun zu einem anderen Punkte. Herr Ostwald behauptet, dass wir mit einem Satze von v. Helmholtz in Widerspruch stünden; obwohl wir dies schon einmal dahin berichtigt haben, dass sich unser Widerspruch nicht auf den Helmholtz'schen Satz, sondern auf eine experimentelle Consequenz bezieht, welche Herr Ostwald aus demselben gezogen hat, glaubt letzterer doch daran festhalten zu müssen, indem er sich auf den König'schen Versuch beruft. Dieser Versuch besteht darin, dass ein übrigens isolirter Quecksilbertropfen unter H_2SO_4 auf das Potential der letzteren gebracht werden soll, indem man ihn mit einer in derselben Flüssigkeit tropfenden Quecksilberelektrode metallisch verbindet. Herr Ostwald hält an der Richtigkeit dieses Versuches — ohne Angabe der Gründe — fest, obwohl wir schon in unseren „Studien“ auf die Unhaltbarkeit der König'schen Ansicht hingewiesen haben.

Wir haben das König'sche Experiment galvanometrisch nach allen Richtungen untersucht; da jedoch Herr Ostwald für seine Ansicht von demselben keine Gründe vorbringt, so halten wir uns nicht

1) l. c.

für verpflichtet, hier des Näheren darauf einzugehen. Sollte er die Richtigkeit dieses Experimentes, respective die daraus gefolgerte Gleichheit der Potentiale von Quecksilber und Flüssigkeit nicht nur behaupten, sondern auch zu begründen versuchen, so werden wir nicht zögern, durch das ausführliche Beobachtungsmateriale das Gegentheil zu beweisen. Hier genügt es, die folgenden experimentellen Thatsachen kurz mitzutheilen.

Verbindet man die Tropfelektrode mit dem isolirten Quecksilbertropfen durch ein Galvanometer, so circulirt ein constanter Strom; dessen elektromotorische Kraft hat einen hohen Werth (bis ca. 0,7 *V*), solange der Tropfen noch nicht desoxydirt ist, sinkt aber bei Verringerung des Widerstandes in dem Maasse, als die Reinheit des Tropfens steigt. Bei Kurzschluss wird dieselbe fast Null, d. h. die Tropfelektrode und der Tropfen haben fast das gleiche Potential. Zwischen den Quecksilbermassen und der H_2SO_4 besteht aber jetzt das Maximum der Potentialdifferenz, das sich durch galvanometrische Messung zu ca. 0,8 *V* ergibt; von einer Gleichheit dieser Potentiale, wie sie Herr Ostwald voraussetzt, ist daher nicht die Rede, und wenn er für seine Ansicht keine bessere Stütze hat als diesen Versuch, so steht dieselbe auf etwas schwachen Füssen. —

Herr Ostwald ist der Ansicht, dass man die Potentialdifferenz zwischen der Flüssigkeit und dem Meniscus des Capillarelektrometers durch Compensation auf Null bringen könne; wir haben dem gegenüber eingewendet, dass, sofern diese Potentialdifferenz ihren Grund in einem chemischen Angriff des Quecksilbers habe, von einer solchen Compensation derselben nicht die Rede sein könne, und dass wir keinen Satz der Elektricitätslehre kennen, der zur Annahme einer solchen berechtigen würde. Herr Ostwald ist anderer Meinung, er glaubt einen solchen zu kennen, und wirft uns direct das „Beschämende“ der Unkenntniss des Satzes vor, „dass die elektromotorische Kraft der Polarisation, so lange das Maximum nicht erreicht ist, von der Flächendichte der Ionen auf den Elektroden abhängt.“ Was sollen wir dazu sagen? Weiss Herr Ostwald nicht, dass dieser Satz zuerst von einem von uns klar und deutlich aufgestellt, durch eine Reihe von Experimentaluntersuchungen verificirt und bereits im Jahre 1878 in den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien publicirt wurde?[1])

---

1) Exner, Sitzungs-Bericht d. k. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien. Bd. 78 S. 347 (1878).

Wir erlauben uns hier eine der diesbezüglichen Stellen ihrem Wortlaute nach mitzutheilen. Es heisst daselbst [1]): „Die ausgeschiedene Menge von Ionen beginnt mit dem Werthe Null — nämlich nach Stromschluss — und wächst allmählich bis zum vollen Werthe an. Irgend eine Function dieses Anwachsens muss nun auch das Wachsthum der Polarisation bis zum Schlusse des Grenzzustandes — d. h. bis zum Polarisationsmaximum — sein. Aus meinen diesbezüglichen Versuchen am Platin lässt sich diese Function auch entnehmen; ich habe dort [2]) gezeigt, dass bei allmählich von Null anwachsender elektromotorischer Kraft, also auch Intensität des primären Stromes, unterhalb einer gewissen Grenze die Polarisation stets gleich ist der primären elektromotorischen Kraft; derselben Grösse, weil der Intensität proportional, ist aber auch die absolute Menge der ausgeschiedenen Ionen und daraus folgt unmittelbar, dass für die Dauer des Grenzzustandes — d. h. unterhalb des Polarisationsmaximums — die Polarisation der Menge der ausgeschiedenen Ionen direct proportional sein muss." Wir glauben eines weiteren Commentars bedarf die Sache nicht. —

Der obige, uns sattsam bekannte Satz gilt aber nur für Elektroden, welche von der Flüssigkeit nicht angegriffen werden; andernfalls treten Erscheinungen auf (die in der schon citirten Arbeit [3]) des Einen von uns gleichfalls des Genaueren untersucht wurden) die durch die Wechselwirkung der ausgeschiedenen Ionen und des Elektrodenmetalles bedingt sind. Auf den Meniscus des Capillarelektrometers hat daher dieser Satz auch keinerlei Anwendung; polarisirt man denselben durch äussere elektromotorische Kräfte, so kann seine Potentialdifferenz mit der Flüssigkeit nur wachsen, nicht abnehmen, wie sich aus der oben citirten Arbeit ergibt. Eine Compensation dieser Potentialdifferenz zu Null ist daher ausgeschlossen, und wir sind nach wie vor der Meinung, dass dieselbe im compensirten Zustand ca. 0,8 V beträgt.

Wir haben Herrn Ostwald schon einmal die Frage vorgelegt, ob er glaubt, die Potentialdifferenz zwischen Zink und Schwefelsäure in einem Daniell'schen Elemente dadurch auf Null compensiren zu können, dass er einem solchen ein zweites Daniell entgegenschaltet; Herr Ostwald hat darauf nicht geantwortet.

In einem Referate [4]) über eine Arbeit J. Brown's — auf dessen übrigen Inhalt wir nicht näher eingehen, da er uns nicht direct be-

1) l. c. pag. 386.

2) Exner, Sitz.-Ber. d. k. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien Bd. 77. S. 231 (1878).

3) Sitz-Ber. d. Wiener Akad. Bd. 78 S. 347.

4) Zeitschrift für phys. Chemie Bd. 4. S. 577.

rührt — stellt Herr **Ostwald** die Behauptung auf, es müsse die elektromotorische Kraft der **Lippmann**'schen Ströme zwischen tropfendem und abgetropftem Quecksilber constant und vom Widerstand der Leitung unabhängig sein. Diese Behauptung, zu welcher er wohl auch von seinem Standpunkte aus genöthigt ist, steht in grellem Widerspruch mit den beobachteten Thatsachen und beweist, dass Herr **Ostwald** diese Ströme, für welche er eine Theorie gibt, niemals untersucht hat. Von uns ist dieses geschehen, und wir haben bereits in unserer ersten Erwiderung die folgende Tabelle der zusammengehörenden Werthe von elektromotorischer Kraft und Widerstand mitgetheilt:

Widerstand in S. E.	Elek. Kraft in D.
100	0,003
1000	0,03
5000	0,18
10000	0,28
33000	0,46
66000	0,55
∞	0,65

Es ändert sich also hier die beobachtete elektromotorische Kraft innerhalb der Grenzen der verwendeten Widerstände um das 200fache ihres Anfangswerthes; wie Herr **Ostwald**, der diese unsere Tabelle in seiner letzten Erwiderung selbst citirt, trotzdem weiter von einer Constanz der elektromotorischen Kraft sprechen kann, bleibt unbegreiflich. Aber das ist gewiss, wenn Herr **Ostwald** von uns sagt: „Auch habe ich aus den 18 Seiten ihrer Abhandlung an objectiver Belehrung nur den Nachweis des Druckfehlers in meiner Notiz gewinnen können“ — so beweist schon das vorstehende Beispiel allein dass die Schuld dieses bedauerlichen Umstandes nicht an uns lag.

Im vorstehenden haben wir die letzte Erwiderung des Herrn **Ostwald**, soweit sie Thatsächliches bietet, erledigt; es hat sich ergeben, dass Herr **Ostwald** das Vorhandensein eines Fehlers bei allen nach seiner Methode angestellten Messungen zugesteht, über die Grösse dieses Fehlers jedoch keine Auskunft zu geben vermag; sie beträgt nach unseren Beobachtungen thatsächlich 0,8 Volt, ist also bedeutender als die meisten zu messenden Grössen. Ferner vermag Herr **Ostwald** nicht — da er den chemischen Angriff bestreitet — für die **Lippmann**'schen Ströme eine Quelle anzugeben; die Gravitation, welche er dafür angesehen hat, ist um mindestens das 1000fache zu schwach.

Seinen mit negativem Erfolge ausgefallenen Versuch über die Oxydirbarkeit des Quecksilbers in ausgekochter H_2SO_4 hat Herr Ostwald trotz der entgegenstehenden Versuche von uns und von Warburg mit positivem Erfolge, nicht mehr wiederholt. Die von Herrn Ostwald aus seiner Theorie gefolgerte Constanz der elektromotorischen Kraft des Lippmann'schen Stromes, besteht auch nicht angenähert; wir haben Änderungen derselben um das 200fache bereits in unserer ersten Erwiderung nachgewiesen, ohne dass Herr Ostwald davon Notiz genommen hätte.

Wir haben ferner schon früher Herrn Ostwald eine Reihe von Thatsachen vorgelegt, die mit seinen Ansichten nicht in Einklang zu bringen sind; so haben wir darauf hingewiesen, dass in den von Richarz untersuchten Elementen Hg [H_2SO_4] Pt elektromotorische Kräfte von 0,1 bis 0,3 *V* auftreten; hier ist jede Gravitationsenergie ausgeschlossen und die Ströme können augenscheinlich nur in der Oxydation des Quecksilbers ihr Aequivalent finden. Der Effect von einigen Zehntel Volt ist aber keineswegs ein verschwindender. Desgleichen erhält man, wie wir schon früher gezeigt haben, Ströme von ca. 0,7 *V*, wenn man die Tropfelektrode durch einen blanken Kupferdraht ersetzt. Woher stammen diese Ströme?

Gegen die Ansicht des Herrn Ostwald, dass die Ströme durch einen Transport von Doppelschichten an den Tropfen unterhalten werden, haben wir den Versuch angeführt, dass die Ströme ganz gleicher Weise bestehen bleiben, wenn man die Spitze der Tropfelektrode nach oben umbiegt und die Tropfen im Bogen aus der Flüssigkeit austreten lässt, so dass sie mit ihren Doppelschichten gar nicht zum unten ruhenden Quecksilber gelangen.

Herr Ostwald ist nicht Anhänger der Contacttheorie; wir haben ihn deshalb gefragt, woher nach seiner Meinung die Potentialdifferenz zwischen ruhendem Quecksilber und der H_2SO_4 stamme, da ein chemischer Angriff ja ausgeschlossen sein soll? Auf alle diese Fragen hat Herr Oswald nicht geantwortet.

Gegen unsere Methode — bei welcher wir die Elektrode nicht in der Flüssigkeit, sondern in einem aus derselben gebildeten Hohlcylinder tropfen lassen — hat Herr Ostwald bisher nur den einzigen Einwand gehabt, dass wir eine eventuelle Potentialdifferenz zwischen dem Quecksilber und der Luft vernachlässigen; nachdem wir aber Herrn Ostwald darauf aufmerksam gemacht haben, dass wir diesen Einwand schon im vorhinein in unserer ersten Arbeit durch Versuche mit verschiedenen Gasen beseitigten, ist derselbe auch nicht weiter auf ihn zurückgekommen. Die constante Differenz in den Werthen, die unsere beiderseitigen Methoden liefern, ist 0,8 *V* und

fällt genau mit dem von uns nachgewiesenen Fehler in Ostwald's Methode zusammen.

Weitere Details, an denen es nicht fehlen würde, dem schon Vorgebrachten noch hinzuzufügen, halten wir für überflüssig; wir können nur wiederholen, was wir schon am Schlusse unserer ersten Erwiderung gesagt haben: „Durch das Vorstehende ist die Frage nach der Anwendbarkeit der Tropfelektroden nach jeder Richtung hin erledigt; sollten Ostwald oder Moser, wider Erwarten, von der Unrichtigkeit ihrer Methode nicht überzeugt sein, so werden wir auch fernerhin die Mühe nicht scheuen, denselben ihre Irrthümer nachzuweisen".

Experimentelle Untersuchungen über das Thomson'sche Gesetz der Wellenbewegung auf Wasser.

Von

O. Riess.

Die im Anfang dieses Jahrhunderts von Franz Gerstner aufgestellte Hypothese von der trochoidalen Wellenoberfläche brachte zuerst das Experiment mit der Theorie in annähernde Uebereinstimmung, wie die Gebrüder Weber durch eingehende Untersuchungen nachgewiesen haben[1]). Aus den letzteren ging indessen hervor, dass eine absolute Deckung der berechneten Resultate mit den beobachteten nicht zu erzielen war. Die Art der Versuche erlaubte nicht die erforderliche Genauigkeit, um die Grösse der Abweichungen mit Schärfe festzustellen, und die beiden genannten Physiker schreiben die Differenzen einerseits Mängeln der Theorie, andrerseits den Schwierigkeiten der exacten Messung zu. Bis in die Neuzeit behauptete sich die Gerstner'sche Ansicht, und sie wurde in den Einzelheiten besonders von Stokes, Scott Russell, M. J. Rankine u. A. weiter ausgeführt. Rankine[2]) kommt zu den bekannten Formeln der Gerstner'schen Hypothese durch die Annahme, dass die Wellenform aus der gleichzeitigen Wirkung von Centrifugal- und Schwerkraft resultirt. Ferner nimmt er an, dass die Theilchen, welche sich in einer unendlich dünnen Schicht zwischen zwei Wellenprofilen befinden, stets in derselben bleiben. Die Wellenfläche bildet daher eine Continuitätsfläche, wie auch die neuesten Untersuchungen voraussetzen.

Aber selbst die scharfsinnigsten theoretischen Betrachtungen mussten so lange zu mangelhaften Resultaten führen, als die Unabhängigkeit der Wellenbewegung von der Natur der verschiedenen Flüssigkeiten angenommen wurde. Wenn auch von einigen Forschern bereits auf die Unzulässigkeit dieser Annahme hingedeutet wurde, so war doch

---

1) Wellenlehre. Leipzig 1825.

2) Philosophical Transactions. 1863 p. 127.

Sir. W. Thomson der erste, welcher im Jahre 1871 den Einfluss der Oberflächenspannung auf die Wellenbewegung in mathematischer Form darlegte [1]), nachdem kurz vorher L. Matthiessen mittels des Experimentes zuerst den Beweis für die Einwirkung molecularer Kräfte erbracht hatte [2]).

I. Das Thomson'sche Gesetz.

Sowohl die Gerstner'sche, als auch die anderen Hypothesen führten als Ausdruck für die Wellengeschwindigkeit auf die Formel:

$$v^2 = n^2 \lambda^2 = g \frac{\lambda}{2\pi}, \tag{1}$$

worin v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, n die Wellenzahl pro Secunde, λ die Wellenbreite und g die beschleunigende Kraft der Schwere bedeutete.

Thomson fand

$$v^2 = n^2 \lambda^2 = g \left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda} T \right), \tag{2}$$

worin v, n, λ dieselbe Bedeutung haben, und T die specifische Oberflächenspannung darstellt.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v ist also eine Function von zwei, voneinander unabhängigen, Kräften g und T.

Eine ausführlichere Ableitung obiger Formel, als von Thomson selbst gegeben, scheint mir angemessen, da die rechnerischen Operationen in dem angeführten Briefe in sehr condensirter Form mitgetheilt sind.

Bei der Ableitung der Gleichung der Wellenlinie gehen wir davon aus, dass eine Molekülreihe unter Einwirkung von Kräften, die jedes Molekül auf die benachbarten ausübt, im Gleichgewicht sei. Die Gleichgewichtslage sei die x-Axe. Es möge dann ein Molekül, z. B. das im Coordinatenanfang befindliche, in der Zeit $\frac{T}{4}$ um die Strecke a aus seiner Gleichgewichtslage verschoben werden, in der Richtung der positiven y-Axe, so wird die Folge sein, dass sich wegen der zwischen den einzelnen Molekülen wirkenden Molecularkräfte nach und nach auch die übrigen Moleküle verschieben; es wird eine Wellenbewegung entstehen. Ist die Kraft, mit der ein Molekül seiner Gleichgewichtslage

1) The influence of wind on waves in water supposed frictionless. (Letter to Prof. Tait.) Phil. Mag. 1871 p. 368.

2) Pogg. Ann. Bd. 134 S. 107, 1868. Pogg. Ann. Bd. 141 S. 375, 1871.

wieder zustrebt, proportional dem Abstand von derselben, so ist die Gleichung der Wellenlinie

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \tag{3}$$

worin bezeichnet: a die Amplitude, y die Elongation, t die vom Beginn der Bewegung verflossene Zeit, T die Schwingungsdauer, x die Entfernung des beobachteten Moleküls vom Ausgangspunkt der Bewegung und λ die Wellenlänge.

Thomson nimmt die x-Axe vertical nach unten, die y-Axe horizontal, setzt

$$\lambda = \frac{2\pi}{n}, \qquad \alpha = \frac{\lambda}{T},$$

und findet bei Verschiebung des Coordinatenanfangs um $\frac{\lambda}{2}$

$$x = h \sin n\,(y - \alpha t). \tag{4}$$

Weiter macht er die Voraussetzung, dass die Amplitude unendlich klein gegen die Wellenlänge sei, und erhält die x-Componente der Moleculargeschwindigkeit durch Differentiation nach x

$$-n\alpha h \cos n\,(y - \alpha t). \tag{5}$$

Wir nehmen nun die Flüssigkeit als nur von ebenen Wellen durchzogen an, d. h. die Verschiebung der Theilchen nach der z-Axe sei gleich Null.

Allgemein lauten die Differentialgleichungen der Hydromechanik:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon d^2 x}{dt^2} &= \varepsilon X - \frac{dp}{dx}, \\ \frac{\varepsilon d^2 y}{dt^2} &= \varepsilon Y - \frac{dp}{dy}, \\ \frac{\varepsilon d^2 z}{dt^2} &= \varepsilon Z - \frac{dp}{dz}, \end{aligned} \tag{6}$$

worin ε die Dichte und p den Druck bezeichnet.

Versteht man unter der Continuitätsgleichung den Ausdruck, welcher die Beziehungen von Dichtigkeit und Volumen zu jeder beliebigen Zeit angibt, so ist

$$\frac{d\,(\varepsilon d V)}{dt} = 0. \tag{7}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} d V + \frac{d\,(d V)}{dt} \cdot \varepsilon = 0. \tag{8}$$

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{d(dV)}{dV} = 0. \tag{9}$$

Das zweite Glied stellt die räumliche Dilatation dar. Im allgemeinen wird bei homogener Deformation aus einer infinitesimalen Kugel ein infinitesimales Ellipsoid entstehen; und zwar an jeder Stelle im Körper dasselbe Ellipsoid.

Also

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \text{räumliche Dilatation} = 0.$$

Bezeichnen $u_1 v_1 w_1$ die Componenten der Verrückungen der unendlich kleinen Kugel, so ist

$$\text{die räumliche Dilatation} = \frac{\delta u_1}{\delta x} + \frac{\delta v_1}{\delta y} + \frac{\delta w_1}{\delta z}$$

und die Continuitätsgleichung wird

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\delta u_1}{\delta x} + \frac{\delta v_1}{\delta y} + \frac{\delta w_1}{\delta z} = 0 \tag{10}$$

worin $u_1 = u\,dt$, $v_1 = v\,dt$, $w_1 = w\,dt$.

Auch ist

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + dt\left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z}\right) = 0$$

ein Ausdruck für die Unveränderlichkeit der Masse.

Im gegebenen Fall, d. h. für Wasser nehmen wir die Dichtigkeit ε überall als constant an, deshalb

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = 0 \tag{11}$$

Daraus folgt

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} = 0. \tag{12}$$

Setzt man die Bewegungen der Flüssigkeitstheilchen als rotationslos voraus, so ist ein Geschwindigkeitspotential Φ zulässig. Dann sind die Geschwindigkeitscomponenten eines Moleküls nach der x- und y-Axe bezüglich die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\delta \Phi}{\delta x} \text{ und } \frac{\delta \Phi}{\delta y}$$

Die Bedingung der rotationslosen Bewegung drückt sich aus durch die Gleichungen [1]):

1) Rausenberger, Analytische Mechanik. Bd. 2 §§ 82 und 83.

$$\frac{\delta v}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta y},$$
$$\frac{\delta w}{\delta y} = \frac{\delta v}{\delta z},$$
$$\frac{\delta u}{\delta z} = \frac{\delta w}{\delta x},$$

und es ist

$$u = \frac{\delta \Phi}{\delta x},$$
$$v = \frac{\delta \Phi}{\delta y}, \qquad (13$$
$$w = \frac{\delta \Phi}{\delta z},$$

Wird Gl. 12 in Gl. 13 eingesetzt und berücksichtigt, dass $\frac{\delta w}{\delta z}$ verschwindet, so kommt

$$\frac{\delta^2 \Phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \Phi}{\delta y^2} = 0. \qquad 14)$$

Φ ist eine periodische Function von y und x. Sie wird Null für $x = \infty$, und hat die Form. $P \cos (ny - e) \varepsilon^{-nx}$, wo P und ε unabhängig sind von x und y.

Differenzirt nach x_1, und x gleich Null gesetzt gibt

$$-Pn \cos (ny - e) = -n\alpha h \cos (ny - n\alpha t). \qquad (15$$

Hiermit ist die Gleichsetzung der aus Wellengleichung und Geschwindigkeitspotential folgenden Geschwindigkeitscomponenten nach der x-Axe erfolgt.

$$P = \alpha h, \ e = n\alpha t,$$

so dass

$$\Phi = \alpha h \varepsilon^{-nx} \cos n (y - \alpha t). \qquad (16$$

Diese Gleichung setzt voraus, dass das Wasser reibungslos ist, sich in der durch Gl. 1 gegebenen Weise bewegt und im Anfang in Ruhe war. Für die bewegte Luft erhält man eine ähnliche Function

$$\psi = (V - \alpha) h \varepsilon^{nx} \cos n (y - \alpha t) + Vy \qquad (17$$

worin V die constante Windgeschwindigkeit über dem Wasser bedeutet. Wie beim Wasser wird vorausgesetzt, dass die Luft reibungslos und ohne Drehung der Moleküle sich fortbewegt. Ihre Geschwindigkeit soll grösser als die Wellengeschwindigkeit sein.

$$\frac{\delta \psi}{\delta x} = (V - \alpha) n h \varepsilon^{nx} \cos n (y - \alpha t)$$

$$\frac{\delta \psi}{\delta y} = -(V-\alpha)\, n h \varepsilon^{nx} \sin n(y-\alpha t) + V.$$

Ist q die resultirende Windgeschwindigkeit an irgend einem Punkt, so findet man unter Fortlassung unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung

$$^{1}/_{2}\, q^2 = {}^{1}/_{2} \left[\left(\frac{\delta \psi}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta \psi}{\delta y}\right)^2\right]$$

$$= \frac{V^2}{2} - V(V-\alpha)\, n h \varepsilon^{nx} \sin n(y-\alpha t). \tag{18}$$

Bezeichnet p den Druck in irgend einem Punkt der Luft, und σ die Dichtigkeit derselben, so findet man für den Druck in einer rotationslosen Flüssigkeit mit Hülfe der Gl. 6, wenn $\varepsilon = \sigma$, $x = g$, $y = 0$

$$\begin{aligned} \sigma \frac{d^2 x}{d t^2} &= \sigma g - \frac{dp}{dx}, \\ \sigma \frac{d^2 y}{d t^2} &= -\frac{dp}{dy}, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\sigma \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\, dx + \frac{d^2 g}{dt^2}\, dy\right) = \sigma g\, dx - dp$$

$$\sigma \int \left(\frac{du}{dt}\, dx + \frac{dv}{dt}\, dy\right) = \sigma g x - p + C, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\delta u}{\delta t} + \frac{\delta u}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta t}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\delta v}{\delta t} + \frac{\delta v}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta v}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta t}. \end{aligned} \tag{21}$$

Hierin ist

$$u = \frac{\delta \psi}{\delta x}, \qquad v = \frac{\delta \psi}{\delta y}.$$

$$\frac{du}{dt}\, dx + \frac{dv}{dt} \cdot dy = \frac{\delta \frac{\delta \psi}{\delta t}}{dx}\, dx + \frac{\delta \frac{\delta \psi}{\delta y}}{dy}\, dy =$$

$$= d\left\{\left(\frac{\delta \psi}{\delta t}\right) + {}^{1}/_{2} \left[\left(\frac{\delta \psi}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta \psi}{\delta y}\right)^2\right]\right\},$$

$$\sigma \left(\frac{\delta \psi}{\delta t} + {}^{1}/_{2}\, q^2 - g x\right) = C - p. \tag{22}$$

Mit Bezug auf Gl. 17 und 18 geht diese Gleichung für $C = {}^1/_2\, \sigma V^2$ über in

$$-p = \sigma\,[-n h\,(V - \alpha)^2\, \varepsilon^{nx} \sin(y - \alpha t) - g x]. \tag{23}$$

Ist p^1 der Druck in einem Punkt des Wassers, so ist, da $\sigma = 1$ und q^2 unendlich klein,

$$-p^1 = -n h \alpha^2 \varepsilon^{-nx} \sin n\,(y - \alpha t) - g x. \tag{24}$$

Allgemein ist nun die Krümmung einer Oberfläche

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{\frac{d^2 x}{d y^2}}{\left[1 + \left(\frac{d x}{d y}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$\left(\frac{d x}{d y}\right)^2$ nach unserer Annahme als unendlich klein der zweiten Ordnung vernachlässigt, gibt als Ausdruck für die Krümmung

$$\frac{d^2 x}{d y^2} = -n h^2 \sin n\,(y - \alpha t), \tag{25}$$

und für jeden Punkt gilt, wenn T^1 die Spannung in der Trennungsschicht von Luft und Wasser bedeutet

$$\frac{p - p^1}{T^1} = n^2 h \sin n\,(y - \alpha t) \tag{26}$$

$$p - p^1 = h\,\{n\,[\sigma\,(V - \alpha)^2 + \alpha^2] - g\,(1 - \sigma)\} \sin n\,(y - \alpha t). \tag{27}$$

Aus Gl. 26 und 27 folgt

$$n\,[\sigma\,(V - \alpha)^2 + \alpha] - g\,(1 - \sigma) = T^1 n^2.$$

Es war $\alpha = \frac{\lambda}{T} = n \lambda.$

α bedeutet also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, wenn $V =$ Null gesetzt wird.

Für α gleich v wird

$$v^2 = \frac{g\,(1 + \sigma) + T^1 n^2}{(1 + \sigma)\, n}. \tag{28}$$

Hierin ist für gewöhnliche Temperatur $\sigma = 0{,}00122$.

Es sei

$$g^1 = g\left(\frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}\right) \sim g$$

und da

$$n = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ und } T^1 = g\,T,$$

so folgt

$$v^2 = g\left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda} T\right),$$

d. h. der mit Gl. 2 bezeichnete Werth.

T ist nach Versuchen von Gay-Lussac[1]) = 0,074 in Centimetergrammen.

II. Discussion des Thomson'schen Gesetzes und der experimentellen Untersuchungsmethoden desselben.

Es ist ersichtlich, dass nach Thomson die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v einen Minimalwerth hat, welcher sich durch Differentiation nach λ ergibt

$$\frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi g}{\lambda^2} T = 0.$$

$$\lambda = 2\pi\sqrt{T} = 1{,}709 \text{ cm und}$$
$$v = 23{,}11 \text{ cm}$$
$$n = 13{,}52 \text{ cm}$$

23,11 cm ist hiernach die kleinste Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wasserwelle. Wellen, deren Breite unter 1,709 cm bleibt, nennt Thomson „ripples", während dieselben von Scott Russell[2]) „Capillarwellen" oder „Wellen dritter Ordnung", und die, welche wesentlich von dem ersten Theil des Formelwerthes abhängen, „Wellen zweiter Ordnung" genannt wurden. Klarer noch scheint die Eintheilung der Wellen nach den wirkenden Kräften, dargestellt durch die Constitution der Formel. Danach hängen ab: Wellen dritter Ordnung wesentlich von der Oberflächenspannung, und ihre Wellenlänge erstreckt sich bis etwa 0,5 cm, Wellen zweiter Ordnung von Oberflächenspannung und Schwere mit der oberen Grenze $\lambda = 10$ cm, und Wellen erster Ordnung wesentlich von der Schwere mit λ grösser als 10 cm. Scott Russell hat die Bildung der „Capillarwellen" im Freien sorgfältig beobachtet und den tiefgehenden Unterschied zwischen ihnen und grossen Wellen treffend dahin charakterisirt, dass eine Welle dritter Ordnung sich nur unter dem continuirlich wirkenden Einfluss einer rein äusseren Kraft erhalten könne und sofort erlischt, wenn die letztere zu wirken aufhört, während die Welle zweiter Ordnung, wenn einmal erregt, unter dem Einfluss der Schwere allein fortschreitet.

---

1) Die Versuche finden sich in Laplace, Mécanique céléste. Supplement à tome X.

2) Report on waves. British Association. York 1844.

Thomson hatte Gelegenheit im Sound of Mull in Gegenwart von v. Helmholtz die Richtigkeit seines Gesetzes zu prüfen [1]). Der Versuch soll kurz mitgetheilt werden, weil die Art desselben die durch eingehendere Untersuchung gefundenen Differenzen nicht klar zu Tage treten lassen konnte.

Für λ ergibt die Formel eine quadratische Gleichung; es müssen daher für jede Geschwindigkeit — das Minimum derselben ausgenommen — zwei verschiedene λ, den beiden Wurzeln entsprechend, existiren. Thomson zog zur Demonstration dieses analytischen Resultates eine am Ende beschwerte Angelschnur durch das Wasser. Vor der Schnur bildete sich eine Gruppe kleiner Wellen aus, welche hyperbelartig verliefen und in ihrer Länge die kleinere Wurzel darstellten; hinterher lief, die grössere Wurzel verkörpernd, eine längere Welle. Die Schnur wurde seitwärts von einem Boot ausgebracht, um die Wellenbildung nicht zu stören. Gleichzeitig mass Thomson die Bootsgeschwindigkeit durch ausgeworfene, angefeuchtete Papierschnitzel, welche eine durch am Boot befestigte Visirlatten markirte Entfernung von 912 cm in gewisser Zeit passirten. Die Bootsgeschwindigkeit wurde derartig regulirt, dass die zwischen den beiden Wellensystemen sich ausbildenden Wellen der Minimalgeschwindigkeit deutlich hervortraten. Dieselben breiten sich nahezu parallel in schiefer Richtung zur Bootslängenaxe aus. Die Geschwindigkeitscomponente v_0 des Bootes, parallel zu dem Wellenstrahl dieses Systems, musste die gesuchte Fortpflanzungsgeschwindigkeit v sein. Denn $v_0 = v \sin \alpha$, wenn α der Winkel ist, welchen der Wellenzug mit der Fahrrichtung macht. Thomson schätzte denselben durch Einvisiren in die Schenkel eines mit der Hand gehaltenen, durch Scharniere verbundenen Zollstabes. Die graphische Darstellung gab folgende Resultate, nachdem zwei Versuche als misslungen verworfen wurden.

Bootsgeschwindigkeit v	Berechnetes Minimum der Wellengeschwindigkeit v_0
51 cm per Secunde	23,0 cm per Secunde
38 „ „ „	23,8 „ „ „
26 „ „ „	23,2 „ „ „
24 „ „ „	22,9 „ „ „
	Mittel 23,22 cm per Secunde

1) Waves under motive power of gravity and cohesion jointly, without wind. Phil. Mag. 1871 p. 374.

Vergleicht man dieses Resultat mit dem theoretischen Werth, so ist die Uebereinstimmung überraschend. Die geschilderte Messungsmethode kann selbstverständlich auf wissenschaftlichen Werth keinen Anspruch machen, und es schien daher erwünscht, das wichtige Problem auf strengerem Wege in seine Einzelheiten zu verfolgen.

L. Matthiessen hatte mit Hilfe von schwingenden Platten bereits Wellenmessungen vorgenommen und dann im weiteren Verfolg seiner Forschungen den erfolgreichsten Weg eingeschlagen, indem er stehende, durch Stimmgabeln erregte Wellen beobachtete [1]). Lord Rayleigh versuchte ebenfalls durch schwingende Platten dasselbe zu erreichen [2]). Eine Platte wurde mit einer dünnen Flüssigkeitsschicht bedeckt und in der Mitte an einem schwingenden Stab befestigt. Durch die grosse Reibung wurden jedoch die Abmessungen der stehenden Wellen bedeutend modificirt. Um dies zu umgehen, beobachtete er fortschreitende Wellen. Die Resultate waren zwar besser und gaben hinreichende Uebereinstimmung mit der Formel, aber die Beobachtung setzt voraus, dass das Auge dem schnell fortschreitenden Wellenzuge zu folgen hat, was bei der Kleinheit der Wellen hohe Anforderungen an die Geschicklichkeit des Experimentirenden stellt. Lord Rayleigh äussert sich selbst in diesem Sinne.

Auf Veranlassung des Herrn Prof. Dr. Matthiessen suchte A. Ahrendt [3]) genauere Daten zu gewinnen auf einem Wege, den schon Matthiessen selbst beschritten hatte [4]).

In einem austretenden Flüssigkeitsstrahl erregt eine eingetauchte scharfe Spitze ein deutliches System feiner, stehender Wellen, die sich nach der Ausflussöffnung hin erstrecken. Die Länge der Wellen ist eine Function der Ausflussgeschwindigkeit.

Ist h die Höhe der Flüssigkeitssäule im Gefäss, so ist

$$h\lambda = \text{const.}$$

Die Resultate bestätigten wohl dieses Gesetz, jedoch weichen die erhaltenen Wellenlängen wesentlich von den aus Thomson's Formel berechneten ab, da die Verzögerung in der Bewegung der Flüssigkeitstheilchen innerhalb des Ansatzstückes der Ausflussöffnung sich als beträchtlich erwies.

In einer soeben veröffentlichten Arbeit [5]) kommt daher Matthiessen wieder auf die Messung der von einer Stimmgabel erregten, stehenden Wellen zurück. Diese Versuche beschäftigen sich im allgemeinen mit

1) Pogg. Ann. Bd. 134 S. 107, 1868.
2) Phil. Mag. 16 S. 50, 1883.
3) Exner's Repert. d. Phys. S. 318, 1887.
4) Pogg. Ann. Bd. 141 S. 385, 1871.
5) Wied. Ann. N. F. Bd. 38, 1889.

Wellen dritter Ordnung auf verschiedenen Flüssigkeiten und zielen darauf hin, durch den Beweis der Richtigkeit des Thomson'schen Gesetzes ein Mittel zur Berechnung der Oberflächenspannung zu geben.

Die Erforschung des wichtigen Gebietes um das Minimum herum von v, und darüber hinaus, war eine dankbare Aufgabe. Gab die Formel im kritischen Punkt genau mit den Experimenten übereinstimmende Resultate, so war ihre Unanfechtbarkeit praktisch wie theoretisch gesichert, denn jede Fehlerquelle musste an der Stelle am deutlichsten zu Tage treten.

Bei der Wahl der Untersuchungsmethode wurden die bisher angewandten einer strengen Kritik unterzogen. Ausser den schon angeführten kamen folgende in Betracht.

Die Gebrüder Weber erhielten stehende Wellen durch gleichzeitigen Fall von Flüssigkeitssäulen in die Enden der von ihnen benutzten Wellenrinne [1]).

M. C. Decharme bediente sich bewegter Luft, welche durch Röhren geblasen wurde, deren untere Oeffnung dicht über der Oberfläche der Flüssigkeit sich befand. Die Reinheit der entstehenden Wellenzeichnung hing nach seiner eigenen Aussage von sehr vielen Factoren ab [2]).

Auch schwingende Membranen hat man zur Wellenbewegung gebraucht. Ihre Kraftleistung ist jedoch zu gering, um bei Constanz der Schwingungszahl grössere Wasserwellen zu erzeugen.

Stimmgabeln scheinen zur Untersuchung am besten geeignet, hauptsächlich weil die Constanz der Schwingungszahl gewährleistet ist. Da aber die Abmessungen der Gabeln mit der sinkenden Schwingungszahl schnell wachsen, konnte nur eine beschränkte Zahl von Gabeln angefertigt werden, und die Herstellung eines Apparates, welcher innerhalb gewisser Grenzen jede beliebige Schwingung hergab, war nothwendig. Die Beschreibung desselben und die durch ihn gewonnenen Resultate folgen in einem andern Kapitel.

III. Versuche mit Stimmgabeln.

Für die Messung der durch schwingende Stimmgabeln hervorgerufenen Wellen gibt es zwei Methoden:

1. Beobachtung der stehenden Inferenzwellen,
2. Beobachtung der primären, fortschreitenden Wellen.

1) Wellenlehre. Leipzig 1825.
2) Journal de physique. S. 207, 1875.



Da die zweite Methode nur für kleinere Geschwindigkeiten sichere Resultate gibt, war die Beschränkung auf die erstere gerechtfertigt, nachdem Controlversuche die Uebereinstimmung beider dargethan hatten.

Zur Erzeugung der Wellen wurden an den Zinken mittels Wachs Erregungsstifte aus Aluminium befestigt. Fig. 1 zeigt die Form der Stifte *s*. Die Diagonalstrebe dient dazu, dem System grössere Steifheit zu geben. Bei längeren Wellen wird die mit dem Stiel eingeklemmte Gabel tiefer in das Wasser gesenkt, so dass die Platten etwa 2—4 mm tauchen. Versetzt man die Gabel in Schwingungen, so erblickt man auf der Wasseroberfläche das bekannte Bild zweier interferirender Kreiswellensysteme, welche auf der Verbindungslinie der Erregungscentra die stehenden Wellen als scharf ausgeprägte Rippungen zeigen.

Um einwurfsfreie Beobachtungen zu erhalten, handelt es sich um eine möglichst genaue Bestimmung der Schwingungszahlen, wenn sich die Stifte im Wasser befanden.

Fig. 1.

Für die Versuche standen fünf von Appunn in Hanau gefertigte Stimmgabeln zur Verfügung. Dieselben waren abgestempelt mit den Schwingungszahlen 64, 32, 31, 16 und 8. Bei diesen niedrigen Werthen war die graphische Bestimmungsmethode die geeignetste, um die Angaben zu controliren.

Nachdem im physiologischen Institut der Universität Rostock eine Präliminarbestimmung vorgenommen war, wurden diese Versuche in eingehender Weise wiederholt, und zwar mit einem vom Mechaniker H. Westien angefertigten Kymographen, dessen Construction für die Zwecke dieser Untersuchungen besonders angepasst war.

Auf der folgenden Seite ist in Fig. 2 der Kymograph in Grundriss und Seitenansicht dargestellt. In der Zeichnung sind einige sich entsprechende Theile fortgelassen, um die Uebersichtlichkeit nicht zu stören.

Der Apparat besteht aus einer starken, gusseisernen Platte *F*, welche durch eine Libelle und die Stellschrauben *Q* horizontal eingestellt wird. Darüber lagert ein gusseiserner Rahmen *R*, der durch die drei Säulen *W* fest mit *F* verbunden ist. Zwischen beiden Rahmen befinden sich fünf hohle Messingcylinder *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, welche vorzüglich centrirt sind, um die Reibung bei der Rotation auf ein Minimum herabzudrücken. Die Cylinder *B*, *C*, *D*, *E* haben an der unteren Fläche zur Führung des Papiers einen 5 mm vorstehenden Rand, welcher bei *A* auf 45 mm wächst, um einer Papierrolle ohne

Ende als Unterlage zu dienen. Werden die fünf Cylinder in der durch die Pfeile angegebenen Richtung in Rotation versetzt, so wickelt sich das Papier von A ab, läuft über B und C nach D, erhält zwischen

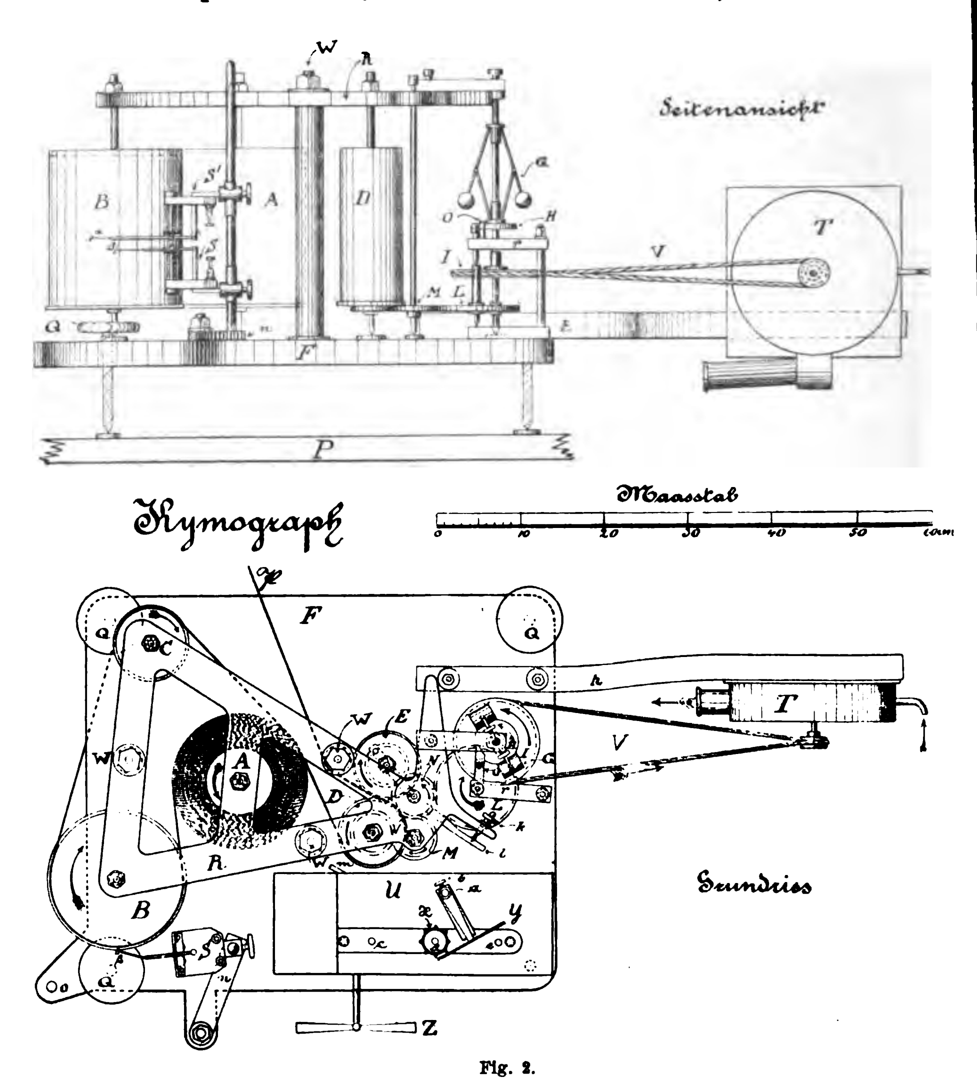


Fig. 2.

D und E durch einen einfachen Apparat die nöthige Spannung und fällt dann in einen unter dem Tische 𝔓 aufgestellten Kasten.

Die Spannung des Papiers 𝔓 wird erzielt dadurch, dass E mit seiner Achse durch den an der festen Achse des Zahnrades N befestigten Hebel l beweglich ist. Je nachdem man die Schraube K anzieht, presst die daran befindliche kleine Feder den Cylinder E mehr oder weniger gegen D. Im letzteren Falle kann das Papier 𝔓

der kleineren Reibung wegen schneller durchlaufen und erhält geringere Spannung.

Die Betriebskraft lieferte die Wasserleitung, welche die an dem Arm *h* befestigte Turbine *T* in Drehung versetzte. Der Schnurlauf *V* dreht dann die Scheibe *J*; dadurch wird ein an derselben Achse befindliches kleines Zahnrad ebenfalls gedreht, dies nimmt das Rad *Z* mit, welches seinerseits mit *N* in Eingriff ist. Durch *N* erfolgt die Rotation von *E, M* und *D*, wie die Zeichnung veranschaulicht. Sollte die Rotation zu schnell erfolgen, so hebt der Regulator *G* die Platte *H*, und presst sie gegen die am Arm *r* befestigte Frictionsbremse *O*, wodurch der Gang sofort verlangsamt wird.

Vor dem Schreibcylinder *B* befindet sich auf einer durch den beweglichen Eisenschuh *n* verschiebbaren, senkrechten Achse ein Elektromagnet *S*, welcher auf seiner Ebonitplatte zwei Klemmschrauben trägt. *S* lässt sich auf der Achse beliebig in verticaler Richtung verschieben. Der Anker besteht aus einer eisernen Telephonmembran, welche einen sehr zierlichen, aus Aluminium hergestellten langen Hebel mit in Schwingungen versetzt. Der Hebel trägt vorn eine Westien'sche Feder β, welche sich ausgezeichnet bewährt hat [1].

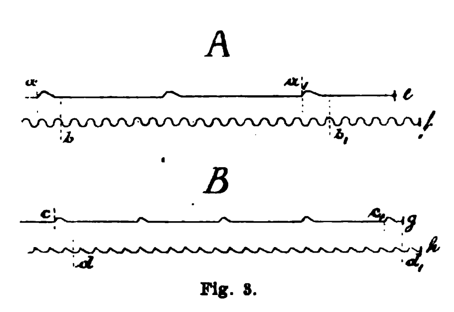


Fig. 3.

Der Elektromagnet *S* stand in Verbindung mit einer astronomischen Uhr, deren Pendel durch einen Quecksilbercontact schlug. Ein Daniell genügte, um durch β auf den rotirenden Cylinder *B* eine Figur zu schreiben, wie die Skizzen *A* und *B* (Fig. 3) für $a a_1$ und $c c_1$ zeigen. Aus beiden geht hervor, dass im ersteren Falle das Papier sich schneller abwickelte, da die Strecke zwischen zwei Unterbrechungen grösser ist.

Will man nun die Schwingungszahl einer in der Luft schwingenden Stimmgabel bestimmen, so klemmt man dieselbe derart ein, dass die breite Seite der Zinke horizontal liegt, und befestigt mit Wachs an einer der Zinken ein dünnes Aluminiumblech, welches vorn eine Westien'sche Feder trägt. Die angeschlagene Gabel wird in zarten Contact mit dem sich abrollenden Papier gebracht und beschreibt dann unter oder über dem Schreibstift β eine Curve, wie in Skizze *A*, wo beispielsweise 8,43 Schwingungen in der Secunde wiedergegeben

1) Eine neue Schreibfeder zum Aufzeichnen genauer und feinster Curven. Pflüger's Archiv für die gesammte Physiologie, 1881 S. 571.

sind. Hört die Gabel sichtlich auf zu schwingen, so wird die Turbine T abgestellt.

Bei diesen Versuchen ist zweierlei zu beachten. Erstens muss man stets $2n$ Secunden zählen, um jeden Fehler in den Längen zweier auf einander folgender Secunden auszugleichen, da der Contactstift des Pendels die Kuppe des Quecksilbers auf einem Hin- und Hergang nicht ganz symmetrisch durchschlägt. Zweitens ist immer von dem Schlusspunkt ab die Zählung zu rechnen. Denn da sich der Schreibstift der Gabel im Anfang des Versuches nicht in einer Senkrechten mit β befindet, so wird diese relative Verschiebung sich bei dem Aufhören der Papierabwicklung durch die noch immer stattfindenden kleinen verticalen Hin- und Hergänge der Federn auf dem Papier als dickere Streifen markiren. Diese Striche sind in Skizze A durch e und f bezeichnet. Als sich die Feder der Gabel in f befand, war β in e. Zählt man also volle Secunden, so wird in a_1 begonnen und nach links fortgeschritten. Für die Gabel beginnt die Zählung in b, da die horizontale Differenz von a_1 und b_1 genau so gross wie die von e und f ist.

Es ist ersichtlich, dass es theoretisch gleichgültig ist, ob das Papier schnell oder langsam läuft. Denn wird die Schreiblänge der Secunde weiter aus einander gezerrt, so geschieht dasselbe für die gleichzeitige Wanderung der Gabelfeder. Für Stimmgabeln mit höherer Schwingungszahl wird der Apparat in schnellere Rotation versetzt, damit sich die Wellen auf einer Secundenstrecke deutlich zählen lassen.

Sollen die Schwingungen einer mit den Stiften im Wasser schwingenden Gabel constatirt werden, so wird ein zweiter Elektromagnet S^1 umgekehrt auf die Säule geschoben (siehe Seitenansicht), der Papierersparnis wegen, da sich dann die Feder α dicht bei β befindet. Die Gabel steht mit einem Quecksilbercontact in Verbindung. Durch diesen und S^1 geht der Strom von zwei Daniell. Es beschreibt α eine Zeichnung wie dd_1 in Skizze B zeigt (5,5 Schwingungen in der Secunde). Die numerische Auswerthung geschieht wie vorher. In der Zeichnung sind möglichst genau die der Wirklichkeit entsprechenden Grössenverhältnisse festgehalten.

Mittels eines Boxchronometers des hiesigen Observatoriums wurde die Verzögerung constatirt, welche die astronomische Uhr durch die Befestigung des Platinstiftes und die Contactvorrichtung erlitten hatte. Dieselbe betrug zwei Secunden auf 72 000 Secunden. Da sich aber eine Zählung nur über 20 Secunden ausdehnte, konnte die Correction der Secunde vernachlässigt werden.

Zur Berücksichtigung von Temperatureinflüssen wurden im April 1889 einige Versuche kurz nach Sonnenaufgang angestellt. Die Zimmertemperatur betrug 5° C. Am Nachmittag wurde das Zimmer

sehr stark geheizt und bis auf 30° C gebracht. Die Bestimmung für die Differenz von 25° C musste genügen, da ein besonderer Apparat zur Erwärmung der Gabeln nicht zur Verfügung stand. Aus einer gütigen Mittheilung der physikalisch-technischen Reichsanstalt konnte ich jedoch ersehen, dass die Aenderung der Schwingungszahlen proportional der Temperatur erfolgt. Mit Hilfe der Zahlen für die obige Temperaturdifferenz sind die Schwingungszahlen bis 80° C bestimmt. Die Nothwendigkeit dieser Rechnung wird sich später ergeben.

In den folgenden Tabellen finden sich diese Resultate zusammengestellt, und ist dabei zu bemerken, dass für jede Gabel das Mittel aus 2000—10000 gezählten Schwingungen gewonnen ist.

Tabelle I.

Schwingungszahl in Luft von 20° C	Gewichte der Erregungsstifte in g	Schwingungszahlen mit befestigten Stiften in		
		Luft von 20° C	Wasser b. 20°C Lufttemp.	Wasser b. 0°C Lufttemp.
8,443 (8)	1,05	8,425	8,410	8,430
16,350 (16)	0,65	16,310	16,200	16,260
36,937 (32)	0,77	36,807	36,647	36,767
37,267 (31)	0,14	37,163	37,100	37,250
64,720 (64)	0,65	64,630	64,580	64,800

Mit Hilfe der für 25° C Temperaturdifferenz erhaltenen Schwingungszahlen ist noch folgende Tabelle berechnet.

Tabelle II.

Temperatur der Luft	Schwingungszahlen der Gabeln mit Stiften im Wasser				
0°	8,430	16,260	36,767	37,250	64,800
20°	8,410	16,200	36,647	37,100	64,580
40°	8,390	16,140	36,527	36,950	64,360
60°	8,370	16,080	36,407	36,800	64,140
80°	8,350	16,020	36.287	36.650	63,920

Aus Tabelle I geht hervor, dass die von Appunn mit 31 bezeichnete Stimmgabel eine höhere Schwingungszahl als 32 hat.

Eine von Rayleigh gefundene und von L. Mathiessen [1]) auf anderem Wege hergeleitete Formel gibt ein Mittel an die Hand, kleinere Schwingungsdifferenzen sofort bestimmen zu können.

1) Wied. Ann. N. F. Bd. 32, 1887 S. 630.

Schwingen zwei Gabeln isochron, so erregen sie zwei sich durchdringende Wellensysteme, deren Interferenzwellen feststehende Hyperbeln sind. Schwingt jedoch eine Gabel schneller, so wandern nach Lissajous diese Interferenzlinien von der höherschwingenden Gabel zur tiefer schwingenden und zwar mit einer Geschwindigkeit

$$w = \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda + \lambda_1} (n - n_1),$$

wo λ und λ_1 die Wellenlängen, $n - n_1$ die Anzahl der Stösse bedeuten.

Beobachtet man die in einer gewissen Zeit eine feine Marke passirenden Rippungen, so ist damit die Anzahl der Stösse, d. h. der Unterschied in der Schwingungszahl gefunden.

Aus Tabelle I, Spalte 4 ergibt sich die Schwingungsdifferenz

$$37{,}100 - 36{,}647 = 0{,}453.$$

Bei dem Controlversuch auf Wasser und Quecksilber erhielt ich

$$(n - n_1) = 0{,}44.$$

Hierin zeigt sich nicht allein der Grad der Genauigkeit in der graphischen Bestimmungsmethode, sondern es ist zugleich nachgewiesen, dass die Gabeln isoperiodische Wellen erzeugen. Denn würden beispielsweise den Schwingungen eine grössere Wellenzahl entsprechen, so wäre

$$w = \alpha \cdot \frac{\lambda \lambda_1}{\lambda - \lambda_1} (n - n_1),$$

was durch das Experiment ausgeschlossen ist.

Die Messung der stehenden Wellen zwischen den Stiften geschah in der Weise, dass die scharfen Spitzen eines geöffneten Stellzirkels mittels einer Universalklemme dicht über den Wasserspiegel gebracht und auf zwei Knotenpunkte genau eingestellt wurden.

Die Einstellung geschah zuerst auf directem Wege, da bei sehr kleinen Wellen das Interferenzbild scharf ausgeprägt ist. Wachsen die Wellen, so wird die Fixirung der Knoten schwieriger.

Ein Kunstgriff half mir über diese Schwierigkeit hinweg. Dicht über der Oberfläche und beinahe die Zirkelspitzen berührend, hielt eine Klemme einen dünnen, metallenen Compensationsstreifen. Die Kante desselben gab ein in der Amplitude vergrössertes, deutliches Spiegelbild der Wellen; die Einstellung der Spitzen konnte so mit grosser Genauigkeit vorgenommen werden.

Eine dritte Methode besteht nach Matthiessen darin, die auf dem Boden des Porzellangefässes in directem Sonnenlicht sich mit überraschender Deutlichkeit zeigenden Wellen zu messen. In diesem Fall müssen die Spitzen die Wasseroberfläche eben berühren. Diese Methode macht aber eine weiter hinten beleuchtete Correctur nothwendig.

Bei Stimmgabel (8) geschah die Erregung durch Auseinanderspreitzen der Zinken, bei den anderen mittels Anschlaghammers, und zwar am unteren Zinkenende zur Verhütung von Obertönen. Besser noch ist eine continuirliche Erregung durch den elektrischen Strom oder nach der Methode von Ewald[1]). Ersteres ist bekannt. Nach der zweiten Methode zieht ein continuirlicher Luftstrom einen an einer der Zinken befindlichen kleinen Kolben in eine Röhre hinein. Die Zinke folgt nur so weit, bis ihre Elasticität die Luftdruckdifferenz überwindet, schnellt etwas zurück, und das Spiel beginnt von neuem. Durch einige Uebung ist es indessen möglich, auch mit Hammererregung bei gleichen Amplituden zu beobachten.

Tabelle III.

n	λ in cm		$\Delta\lambda$	v berechnet in cm		Mittlerer Fehler	
	berechnet	beobachtet		nach Thomson	aus Beobachtung	ein. Beobachtung f	des Resultates F
8,415	2,947	2,764	0,183	24,80	23,26	0,029	0,004
16,215	1,435	1,321	0,114	23,27	21,42	0,009	0,001
36,677	0,739	0,675	0,064	27,10	24,76	0,020	0,009
37,140	0,732	0,670	0,062	27,19	24,88	0,011	0,008
64,635	0,493	0,450	0,043	31,87	29,09	0,005	0,000

Zu diesen ersten Serien von Experimenten wurde destillirtes, ausgekochtes Wasser von 20° C benutzt. Die Lufttemperatur betrug circa 15° C.

Aus der Thomson'schen Formel ergibt sich für die Berechnungen von λ

$$\lambda^3 - 981{,}4\,\frac{\lambda_2}{2\pi n^2} - 981{,}4\cdot\frac{2\pi T}{n^2} = 0$$

oder

$$\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)^3 + \frac{1}{4\pi^2 T}\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{n^2}{981{,}4\cdot 2\pi T} = 0.$$

Am einfachsten erhält man die Lösung dieser cubischen Gleichung auf trigonometrischem Wege.

Man setzt

$$tg\,\alpha = \frac{981{,}4}{6\pi n^2}\sqrt{\frac{1}{3\pi^2 T}}$$

1) Pflüger's Archiv für die gesammte Physiologie. Bd. 44 S. 555.

$$tg\,\beta = \sqrt[3]{tg\,\alpha/_2},$$

so ist

$$\lambda = \sqrt{3\,\pi^2\,T} \cdot tg\,2\,\beta.$$

Bezeichnen $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ . . . die Differenzen der Einzelbeobachtungen gegen den Mittelwerth, so ist

$$f = \sqrt{\frac{\varDelta_1^2 + \varDelta_2^2 + \dots}{x - 1}}$$

und

$$F = \sqrt{\frac{\varDelta_1^2 + \varDelta_2^2 + \dots}{x\,(x - 1)}},$$

wo x die Anzahl der Beobachtungen bezeichnet.

Aus der Tabelle III geht hervor, dass die Thomson'sche Formel nicht genau mit dem Experiment übereinstimmende Werthe liefert. Die Differenzen sind so bedeutend, dass sie durch Beobachtungsfehler allein nicht zu erklären sind.

Weiter zeigte sich bei einer hellen Sonnenbestrahlung, dass die Wellenlängen sich unter dem erwärmenden Einfluss ändern. Um die Grösse der Veränderung zu bestimmen, wurde die Oberfläche des Wassers einer wenige Secunden dauernden Bestrahlung ausgesetzt, während die Gabel abgeblendet war. Das Thermometer in der Luft dicht über dem Wasser zeigte 32° C. Es ergab sich für $n = 36{,}677$, $\lambda = 0{,}652$ cm.

Die consequente Durchführung dieser Versuche war für die Augen so anstrengend, dass ich davon absah. Bei späteren Gelegenheiten ist der Einfluss der Sonnenbestrahlung in einzelnen Fällen immer wieder constatirt worden. Während das Wasser als Ganzes keine messbare Erwärmung erfährt, kann auf diesem Wege die fast momentane Wärmeabsorption des Oberflächenhäutchens nachgewiesen werden. Daher wurde auf Messung der durch die Sonne am Boden hervorgerufenen Bilder der Wellen verzichtet.

Der Vorgang führte mich auf die Vermuthung, dass der Einfluss der Temperatur auf die Bildung der Wellen beträchtlich ist. Eine umfassende Reihe von Versuchen mit erwärmtem Wasser bestätigte die Annahme.

Das Wasser wurde siedend in das vorgewärmte Gefäss gegossen und die Gabel vorher mit Oel abgerieben, um die Menge des Niederschlagwassers zu reduciren. Wie die folgende Tabelle zeigt, findet bei hohen Temperaturen eine starke Verkleinerung der Wellenlängen statt, die eher um ein Geringes grösser anzuschlagen ist, da sich nicht alle

die Schwingungen der Gabel etwas verlangsamenden, niedergeschlagenen Wassertropfen entfernen lassen.

Zugleich mit der Messung der Wassertemperatur ging die der Gabelumgebung Hand in Hand. Ein Thermometer war am Ende der Zinken, ein zweites am Stiel aufgehängt. Auf das aus beiden gewonnene Mittel beziehen sich die Schwingungszahlen in Tabelle II.

Durch Einbetten des Gefässes in zerstampftes Eis und Kochsalz konnte andrerseits die Wassertemperatur bis auf 0° C herabgedrückt werden.

In Tabelle IV sind die Werthe nach um 20° C steigenden Wassertemperaturen geordnet. Die Temperaturen der Gabeln schwankten von 12° bis 36° C.

Tabelle IV.

Temperatur des Wassers in Celsiusgraden.									
0		20		40		60		80	
n	λ	n	λ	n	λ	n	λ	n	λ
8,418	2,848	8,415	2,764	8,411	2,701	8,405	2,656	8,394	2,628
16,224	1,384	16,215	1,328						
36,695	0,715	36,677	0,675	36,653	0,645	36,617	0,623	36,551	0,608
37,160	0,709	37,140	0,670						
64,668	0,477	64,635	0,450	64,591	0,430	64,525	0,415	64,404	0,404

Wie ersichtlich, sind diese Versuche nur für drei Gabeln vollständig durchgeführt, und zwar an Serien von durchschnittlich 200 Messungen.

Es war mir nicht möglich zu constatiren, ob bei 4° C, dem Zustand der grössten Dichtigkeit, auch das Maximum der Wellenlänge liegt, denn von diesem Punkt bis 0° war der Unterschied zu gering.

Für den in Bezug auf die Rechnungsresultate der Formel günstigsten Vergleichungsfall, dass T sich auf Null Grad bezieht, gibt Tabelle V eine Uebersicht bezüglich der gefundenen Differenzen.

Tabelle V.

berechnet λ	beobachtet	$\Delta\lambda$
2,947	2,848	0,099
1,435	1,384	0,051
0,739	0,715	0,024
0,732	0,709	0,023
0,493	0,477	0,016

Unverkennbar zeigt die Grösse und Regelmässigkeit der Abnahme dass in der Formel irgendwo eine Ergänzung nothwendig ist.

Da im ersten Theil der Thomson'schen Formel keine durch die Temperatur beeinflusste Grösse vorkommt, so war der Grund der Abweichungen in einer Aenderung der Oberflächenspannung T zu suchen.

Unter dieser Voraussetzung und der weiteren, dass die Entwickelungsprincipien der Formel richtige sind, berechnete ich mit Hilfe der gefundenen Grössen von n und λ aus der Formel die Spannung T und erhielt die in Tabelle VI zusammengestellten Werthe, worin T_0, T_{20} etc. die den Temperaturen entsprechenden Spannungen bedeuten.

Tabelle VI.

λ	T_0	λ	T_{20}	λ	T_{40}	λ	T_{60}	λ	T_{80}
2,848	0,0600	2,764	0,0490	2,701	0,0413	2,656	0,0360	2,628	0,0324
0,715	0,0669	0,675	0,0557	0,645	0,0479	0,623	0,0429	0,608	0,0393
0,477	0,0678	0,450	0,0566	0,430	0,0491	0,415	0,0439	0,404	0,0402

Die graphische Wiedergabe dieser Werthe von T ergab die überraschende Thatsache, dass die darstellende Curve mit grosser Regelmässigkeit verlief.

In Fig. 4 stellen die Ordinaten die verschiedenen Oberflächenspannungen dar, welche sich für Stimmgabel (8) ergaben. Für die beiden

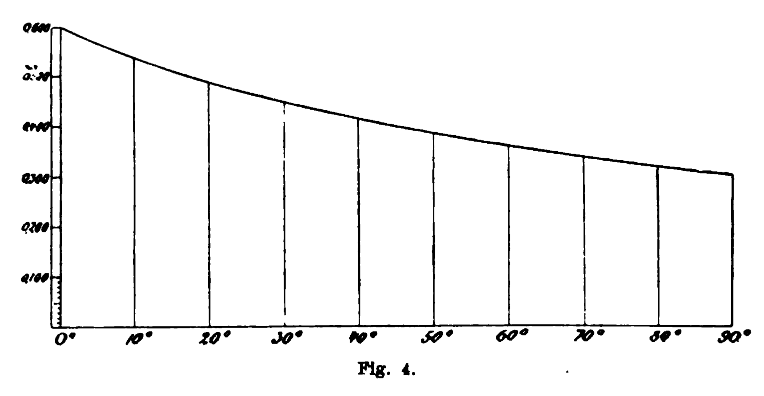


Fig. 4.

anderen Gabeln erhält man fast genau parallele Curven, deren constante Entfernung die Differenz zweier Spannungswerthe bei verschiedenen Temperaturen ist.

Da die Curven keine geraden Linien sind und gegen Null Grad hin verhältnismässig stärker ansteigen, so wurde als Abhängigkeitsgesetz angenommen

$$T_t = T_0 - \alpha t + \beta t^2. \qquad (30$$

Zur Berechnung der Constanten sind für jede Stimmgabel und die Temperaturintervalle 0°, 40° und 80° drei Gleichungen vorhanden.

Man erhält schliesslich

$$T_t = T_0 - 0{,}000591\, t + 0{,}0000031\, t^2. \tag{31}$$

Brunner[1]) hat den Einfluss der Temperatur auf die Steighöhen des Wassers in Capillarröhren untersucht, und da die Steighöhe von der Oberflächenspannung abhängt, konnten seine Ergebnisse mit den meinigen zu einem Vergleich herangezogen werden.

Er findet die Steighöhe in einer Röhre von 1 mm Radius für Wasser

$$15{,}33215 - 0{,}0286396\, u,$$

wo u die Temperatur des Wassers in Celsiusgraden bedeutet. Da die Oberflächenspannung für Wasser gleich der halben Steighöhe in Röhren von 1 mm Radius ist, so drückt die Formel, bezogen auf Centimetergramm aus

$$T_t = T_0 - 0{,}000143198\, t.$$

Die Abnahme von T ist also hiernach eine bedeutend geringere, als von mir gefunden.

Brunner's Experimente beziehen sich jedoch auf ruhendes und mit Luft erfülltes Wasser.

Es ergab sich eine beträchtliche Differenz in den Wellenlängen und geringere Abnahme der Spannung mit steigender Temperatur, wenn das Wasser lufthaltig war. Hagen[2]) weist ebenfalls auf diesen Punkt hin und betont, dass ausgekochtes, abgekühltes Wasser eine geringere Capillarität besitzt.

Hiermit stimmen folgende Resultate vollständig überein.

In Tabelle III und IV entspricht

$n = 64{,}635$ $\lambda = 0{,}450$ und
$n = 36{,}677$ $\lambda = 0{,}675$

wenn sich das ausgekochte Wasser ohne Umrühren langsam bis auf 20° C abkühlt. Erwärmt man jedoch vollkommen mit Luft gesättigtes Wasser bis auf 20° C,

so gibt

$n = 64.635$ $\lambda = 0{,}458$ und
$n = 36{,}677$ $\lambda = 0{,}685$

---

1) Untersuchungen über die Cohäsion der Flüssigkeiten. Pogg. Ann. Bd. 70 S. 518.

2) Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten. Abhandlungen d. kgl. Akad. d. Wissenschaften. Berlin 1845.

ein Beweis, dass die Spannung erheblich zugenommen hat. Wenn das Wasser ruhig im Freien stand, so dauerte es ca. 24 Stunden, ehe die Wellenlängen die angeführten Werthe erreichten. Die Lösung der Luft erfolgt also sehr langsam bei dickeren Wasserschichten.

Nach Tabelle VI ist T_0 für alle Wellenlängen nicht constant, sondern scheint sich mit $\lambda = 0$ einem Maximum zu nähern. Wird T als eine Function von λ allein angesehen und folgende Relation angenommen

$$0{,}0600 = T_0 - \alpha \cdot 2{,}848^x$$
$$0{,}0669 = T_0 - \alpha \cdot 0{,}715^x$$
$$0{,}0678 = T_0 - \alpha \cdot 0{,}477^x$$

so kann man T_0, α und x bestimmen und findet

$$T_0 = 0{,}070 - 0{,}00411 \cdot \lambda^{0{,}84}. \quad (32$$

Für 0° C würde daher innerhalb dieses Bereiches die Thomson'sche Formel lauten

$$v^2 = g \left\{ \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda} (0{,}070 - 0{,}00411\, \lambda^{0{,}84}) \right\} \quad (33$$

und für jede Temperatur

$$v^2 = g \left\{ \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda} (T_0 - 0{,}000591\, t + 0{,}0000031\, t^2) \right\} \quad (34$$

Ist in Gl. 33 $\lambda = 28$ cm, so verschwindet die innere Klammer. Nach Thomson würde der Einfluss der Oberflächenspannung bei dieser Wellenlänge nur noch 0,1 cm, d. h. etwa 1/3 Procent betragen.

Für ein unendlich kleines λ wird $T_0 = 0{,}070$. Gewöhnlich wird diese Zahl für Wasser etwas grösser, nämlich 0,074 angegeben; Beer in seiner Theorie der Elasticität und Capillarität hat jedoch denselben Werth.

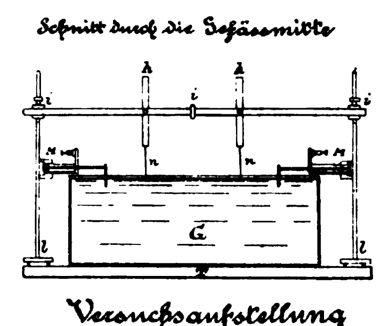
Der Schwerpunkt für die weiteren Untersuchungen lag darin, wie die Formel mit auf verschiedenen Wegen erhaltenen Wellen, besonders grösserer Länge, übereinstimmte.

III. Versuche mit elektrischen Unterbrechern.

Ausser den im Anfang discutirten Methoden stehende Wellen auf Wasser zu erzeugen, können die periodischen Unterbrechungen eines elektrischen Stromes zur Schwingungserregung nützlich gemacht werden. Dieser Zweck liess sich mit Hilfe simultan schwingender Anker zweier Elektromagneten in folgender Weise erreichen.

Es handelte sich nicht allein darum, Wellenlängen von mehr als 3 cm zu erzielen, sondern vor allen Dingen jede beliebige Schwingungszahl festhalten und registriren zu können. Besonders wünschenswerth war die Untersuchung um das Minimum von v herum, und eine Controle der durch die Stimmgabeln erzeugten Wellen.

Zur Vermeidung erheblicher Beeinflussungen der Wellen durch die Tiefe, wurde das Wassergefäss gross gewählt. Dasselbe ist aus Zinkblech gefertigt und hat bei 32 cm Tiefe einen Durchmesser von 81 cm. Es ist in Fig. 5 mit G bezeichnet. Ueber dies Gefäss kann ein schwerer eiserner Rahmen R, welcher sich durch Stellschrauben f horizontal einschrauben lässt, geschoben werden. Der Rahmen hat bei g eine Einklemmungsvorrichtung für Stimmgabeln und dient gleichzeitig als Träger zweier beliebig verschiebbarer Elektromagneten M. An den Ankern der letzteren ist eine leichte Aluminiumröhre befestigt, die zwischen den Drahtspiralen durch die Ebonitgrundplatte führt. Am unteren Ende derselben werden verschieden geformte Korkplatten als Erreger befestigt. In der oberen Figur ist gezeigt, dass sich die Elektromagneten auch in horizontaler Lage verwenden lassen. Sie werden dann von den Stativen l gehalten, welche gleichzeitig zwei durch Schrauben i beliebig festzuhaltende Messlatten mit den Marken h tragen. Diese Marken h haben unten Stahlspitzen n, welche auf die Knotenpunkte eingestellt werden.



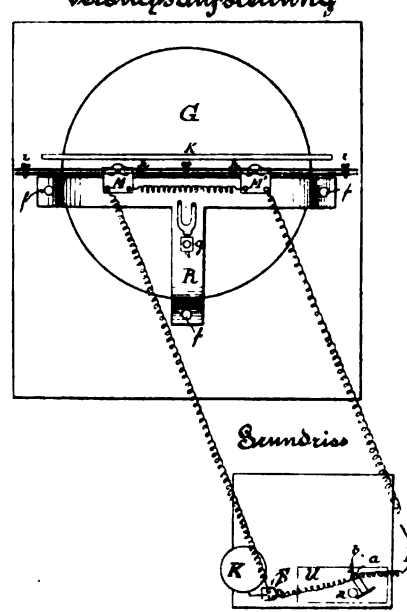


Fig. 5.

Auf den Kymographen K wird ein durch aufgelegte Gewichte regulirbares Uhrwerk U geschraubt. Dasselbe hat drei Achsen c d, e, (siehe Fig. 2) deren Rotationen sich wie 25 : 5 : 1 verhalten. Auf diese Achsen kann ein Elfenbeinscheibchen x, welches mit acht metallenen Contactzähnchen versehen ist, gesetzt werden. Gegen die Zähnchen presst eine

verschiebbare, und mit zwei Klemmschrauben *a*, *b* versehene Contactfeder *Y*. *Z* ist der Hebel zum Aufziehen des Uhrwerks.

Der Betrieb ist leicht zu übersehen. Von einer Batterie *B*, aus 4 Bunsen bestehend, geht ein Strom zur Klemmschraube *a*, durch die Feder *Y* zur Klemmschraube *b* und Uhrwerk *U*. Von diesem zu dem Schreibelektromagneten *S* und weiter zu *M* und M^1, von wo der Strom wieder zur Batterie zurückkehrt. S^1 (Fig. 2) schreibt unabhängig davon die Secunden der astronomischen Uhr. Wird das Uhrwerk in Gang gesetzt, so rotirt *x*, bewerkstelligt die gewünschte Unterbrechungszahl und setzt *M* und M^1 in Bewegung. Die Excursionen der Anker, und damit die Wellenamplituden lassen sich beliebig variiren. Der Leitungswiderstand für S_1 S^1, *M* und M^1 ist gleich gewählt.

Sobald das Uhrwerk sich nach einigen Secunden auf eine bestimmte Tourenzahl eingelaufen hat, wird die Turbine in Gang gesetzt, und während *S* und S^1 die Figur *B* aufzeichnen, wird zwischen den Spitzen *n* beobachtet.

Geringe Differenzen in der Schwingungszahl lassen sich am besten durch sanftes Andrücken der Feder *Y*, grössere durch Auflegen von Gewichten erreichen. Beobachtungen einer und derselben Serie, welche in den Schwingungszahlen in der zweiten Decimale abweichen, wurden verworfen.

Die Tabelle VII gibt die Werthe für *n* und λ und die Wassertemperatur von 20° C.

Tabelle VII.

Beobachtete Schwingungszahl n	Beobachtete Wellenlänge λ	$v = n\lambda$	Mittlerer Fehler einer Beobachtung f	T_{20} berechnet	T_0 berechnet aus T_{20} nach $T_{20}+\alpha t-\beta t^2$	T_0^1 berechnet aus 0,070 — 0,00411 $\lambda^{0,81}$	$T_0 - T_0^1$
21,77	1,020	22,21	0,008	0,0552	0,0657	0,0656	+ 0,0001
16,93	1,268	21,47	0,013	0,0543	0,0649	0,0648	+ 0,0001
14,95	1,427	21,33	0,009	0,0538	0.0644	0,0642	+ 0,0002
13,33	1,600	21,33	0,010	0,0532	0.0638	0,0637	+ 0,0001
12,52	1,709	21,40	0,003	0.0529	0,0635	0,0633	+ 0,0002
11,93	1,800	21,47	0,020	0,0526	0.0632	0,0630	+ 0,0002
9,65	2,310	22,29	0,019	0,0510	0,0616	0,0615	+ 0,0001
7,98	2,983	23,80	0,007	0,0489	0,0595	0,0595	—
6,59	4,004	26,39	0,001	0,0459	0,0565	0,0566	— 0,0001
5,63	5,230	29,44	0,028	0,0428	0,0534	0,0533	+ 0,0001
5,33	5,766	30,73	0,029	0,0411	0,0518	0,0519	— 0,0001
5,19	6,044	31,37	0,007	0,0403	0,0510	0,0512	— 0,0002
5,00	6,732	33,66	0,017	0,0391	0,0498	0,0495	+ 0,0003

T_c^1 ist mit Hilfe von λ_1 aus Tabelle VIII berechnet worden.

Die letzte Spalte zeigt eine überraschende Uebereinstimmung mit den aus den Versuchen mit Stimmgabeln gewonnenen Resultaten.

In der Tabelle VIII stellte ich die auf T_0 reducirten Wellenlängen λ_1 d. h. diejenigen, welche man in Wasser von 0° C erhalten würde, den nach Thomson berechneten λ für dasselbe n und $T = 0{,}074$ gegenüber.

Tabelle VIII.

n	λ berechnet nach Thomson cm	λ_1 wahrschein. beobachtet bei 0° C cm	$\lambda - \lambda_1$ cm	$v = n\lambda$ cm	$v_1 = n\lambda_1$ cm	$v - v_1$ cm
21,77	1,111	1,073	0,038	24,19	23,36	0,83
16,93	1,378	1,331	0,047	23,33	22,53	0,80
14,95	1,549	1,496	0,053	23,16	22,37	0,79
13,33	1,734	1,672	0,062	23,11	22,29	0,82
12,52	1,848	1,783	0,065	23,14	22,32	0,82
11,93	1,955	1,878	0,077	23,32	22,40	0,92
9,65	2,476	2,381	0,095	23,89	22,98	0,91
7,98	3,166	3,064	0,102	25,26	24,45	0,81
6,59	4,195	4,079	0,116	27,65	26,88	0,77
5,63	5,416	5,297	0,119	30,49	29,82	0,67
5,33	5,952	5,828	0,124	31,72	31,06	0,66
5,19	6,228	6,105	0,123	32,32	31,68	0,64
5,00	6,908	6,788	0,120	34,54	33,94	0,60

Mit absoluter Sicherheit in der Regelmässigkeit der Bewegungen konnten die Schwingungen der Elektromagneten nicht über $n =$ ca. 23 forcirt werden, da die in Bewegung gesetzten Massen des Ankers und Erregers immerhin so bedeutend waren, dass die Trägheit einen unbequemen Einfluss zu äussern begann. Andrerseits liessen sich längere Wellen als 7 cm auch nicht erzeugen, denn bei der dazu nothwendigen, stärkeren Erregung machten sich die von den Gefässwänden reflectirten Wellen in sehr störender Weise geltend.

Vergleicht man die Tabelle VIII mit IV und V, so geht zur Evidenz die Gleichartigkeit der Resultate hervor, da in ähnlichen Fällen sich nahezu gleiche Differenzen gegen das theoretische Resultat ergeben.

Weiter sieht man aus den Spalten für v und v_1 in VIII, dass es um das Minimum herum, d. h. etwa für Wellenlängen von 1 cm bis 2,5 cm sehr schwierig ist, auf die Wellenlängen nach beobachteten Geschwindigkeiten zu schliessen, da dieselben sich für dies Gebiet

wenig voneinander unterscheiden, obwohl unverkennbar das Minimum an der von Thomson bezeichneten Stelle liegt.

Thomson's Beobachtungen, welche auf Geschwindigkeitsmessungen basirten, können daher kein absolut verlässliches Material abgeben, um so mehr als sich selbst in den von ihm als glücklich bezeichneten Versuchen für v Unterschiede von 0,9 cm finden. Gerade dieser Unterschied deckt aber vollkommen die von mir auf dem beschriebenen Wege gefundene genaue Differenz.

Um jeden Zweifel auszuschliessen, habe ich im Freien Messungen an noch grösseren Wellen angestellt.

IV. Versuche im Freien.

Die Verwaltung der Wasserwerke in Rostock stellte in liebenswürdiger Weise die grossen Filterbassins für die Untersuchungen zur Verfügung.

Dieselben bilden drei gemauerte, quadratische Bassins von 21,7 m Seitenlängen im Lichten und 3 m Tiefe. Wenn dieselben frisch gefüllt sind, bildet das Wasser eine reine, ruhige Fläche, zu Beobachtungen besonders geeignet, da bei der grossen Tiefe die Wellen durch den Boden fast garnicht beeinflusst sind.

Eine Wellenerregung durch Hineinfallenlassen von schweren Körpern erwies sich als unbrauchbar für den vorliegenden Zweck, da die entstehenden Wellen fortwährend in Länge und Geschwindigkeit wechselten[1]. Am besten schien continuirliche Erregung, indem ein passend befestigter Stab, der in dem Niveau des Wassers eine kleine Platte trug, in Schwingungen versetzt wurde. Es bildeten sich Kreiswellensysteme von grosser Reinheit, welche letztere jedoch nur so lange andauerte, bis der Wellenzug die anderen Seiten des Bassins erreicht hatte; die dann von allen Richtungen reflectirten Wellen störten die Uebersichtlichkeit. Da aber drei Bassins zur Disposition standen, war die Möglichkeit gegeben, ohne auf die gänzliche Beruhigung des einen zu warten, auf der ruhigen Fläche der anderen weiter zu operiren.

Zuerst wurde constatirt, dass jeder ganzen Schwingung thatsächlich eine Welle entsprach. Darauf wurde über die ganze Länge des Bassins ein starker Eisendraht, auf dem an Korkstückchen befestigte kleine, bis unter das Niveau des Wassers hinabreichende Lothe verschiebbar waren, gespannt. Mittels der letzteren liess sich jede beliebige Strecke genau fixiren.

---

1) E. und W. Weber. Wellenlehre.

Die Schwingungszahlen waren auf Grenzen von $n = 2{,}5$ bis 4,5 beschränkt. Denn für die Ausbildung grösserer Wellen sind selbst diese Bassins noch zu klein, und ferner wird die genaue Beobachtung grösserer Geschwindigkeiten sehr schwierig; endlich liessen sich mit der skizzirten Vorrichtung nur in den angegebenen Grenzen isochrone Schwingungen erzeugen.

Die Beobachtung der Zeiten und Schwingungen geschah mittels Tertienuhren.

Nach mehreren verunglückten Versuchen gelang es durch die Uebung und Einführung einiger Kunstgriffe recht zufriedenstellende Resultate zu erreichen. Herr Cand. Walcker unterstützte mich dabei in dankenswerther Weise.

Aus der Reihe von Versuchen sind analog den Tabellen VII und VIII zwei kleinere zusammengestellt worden.

Die Wassertemperatur schwankte von 17 bis 21° C, wofür der Einfachheit wegen durchgängig 20° C angenommen ist.

Tabelle IX.

Beobachtete Schwingungszahl n	Beobachtete Wellenlänge λ	$v = n\lambda$	Mittlerer Fehler einer Beobachtung f	T_{20} berechnet	T_0 berechnet aus T_{20} nach $T_{20} + \alpha t - \beta t^2$	T_0^1 berechnet aus $0{,}070 - 0{,}00411\,\lambda^{0{,}84}$	$T_0 - T_0^1$
4,26	8,790	37,45	0,012	0,0333	0,0440	0,0444	— 0,0004
3,72	11,391	42,37	0,007	0,0267	0,0373	0,0382	— 0,0009
3,48	12,944	45,05	0,009	0,0228	0,0335	0,0346	— 0,0011
3,00	17,384	52,15	0,012	0,0129	0,0235	0,0247	— 0,0012
2,67	21,915	58,51	0,019	0,0030	0,0138	0,0150	— 0,0012

Tabelle X.

n	λ berechnet nach Thomson (cm)	λ_1 wahrschein. beobachtet bei 0° C (cm)	$\lambda - \lambda_1$ (cm)	$v = n\lambda$ (cm)	$v_1 = n\lambda_1$ (cm)	$v - v_1$ (cm)
4,26	8,938	8,815	0,123	38,08	37,55	0,53
3,72	11,547	11,427	0,120	42,95	42,51	0,44
3,48	13,095	12,978	0,117	45,57	45,16	0,41
3,00	17,520	17,408	0,112	52,56	52,22	0,34
2,67	22,042	21,935	0,107	58,85	58,57	0,28

Zwar sind in Tabelle IX die Differenzen $T_0 - T_0^1$ grösser als in Tabelle VII, dennoch ist die Uebereinstimmung verhältnismässig gut.

Jedenfalls befinden sich diese Versuche in vollkommener Harmonie mit den vorhergehenden. Aus den abnehmenden Differenzen von $\lambda - \lambda_1$ und $v - v_1$ geht hervor, dass bei längeren, vollkommen freien Wellen der theoretische Werth nahezu erreicht werden wird. Dieser theoretische Werth, also wesentlich der erste Theil der Formel, ist zwar nicht ganz genau, da von dem Einfluss der Tiefe vollkommen abgesehen wird.

Giesen[1]) findet

$$v^2 = g\,\frac{\lambda}{2\pi}\left(\frac{e^{\frac{2\pi}{\lambda}h} - e^{\frac{-2\pi}{\lambda}h}}{e^{\frac{2\pi}{\lambda}h} + e^{\frac{-2\pi}{\lambda}h}}\right),$$

wo h die Tiefe des Gefässes bedeutet. Ist die Tiefe h sehr gross zur Wellenlänge und Amplitude, so kann der Klammerausdruck allerdings vernachlässigt werden.

Kolacek[2]) hat in ähnlicher Weise wie Thomson den Einfluss der Oberflächenspannung entwickelt und sein Endergebnis so ausgedrückt:

$$4\pi^2 v^2 = \left|\frac{e^{\frac{2\pi}{\lambda}h} - e^{\frac{-2\pi}{\lambda}h}}{e^{\frac{2\pi}{\lambda}h} - e^{\frac{2\pi}{\lambda}h}}\right| \cdot 2\pi\lambda\left(g + \frac{p_1}{\varrho}\cdot\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right).$$

Hierin bedeutet p_1 das Gewicht der durch die Oberflächenspannung gehobenen Wassersäule, und ϱ die Dichtigkeit des Wassers. Der Einfluss der Oberflächenspannung ist nach ihm gleich einer Vermehrung der Schwerebeschleunigung um $\frac{p_1}{\varrho}\,\frac{4\pi^2}{\lambda^2}$ zu setzen.

Sieht man in dieser Formel auch von dem Werth der eckigen Klammer ab, so wird nach Kolacek unter Einführung der Thomson'schen Bezeichnung

$$v^2 = g\left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda^2}\,T\right).$$

Zur Prüfung dieser Formel wurde eine Wellenlänge in der Nähe des Minimums herausgegriffen, nämlich $\lambda = 1{,}672$.

Für diese Wellenbreite ist nach

Thomson $n = 13{,}83$
direktem Versuch $n = 13{,}33$
Kolacek $n = 12{,}33$

1) Zeitschrift für Mathematik. 1877 S. 138.
2) Pogg. Ann. 1878 S. 428.

Die Oberflächenspannung scheint daher, abgesehen vom Temperatureinfluss, weder der ersten, noch der zweiten Potenz von λ umgekehrt proportional zu sein.

Thomson und Kolacek gehen von der Annahme aus, dass die Amplituden sehr klein zur Wellenlänge sind, und dass die Oberflächenspannung constant ist. Es liegt aber auf der Hand, dass bei verhältnismässig grossen Amplituden, also bei starker Krümmung der Oberfläche die Oberflächenspannung von Punkt zu Punkt momentanen Aenderungen unterworfen ist; diese Aenderungen rufen die Differenz von Formel gegen Beobachtung hervor. Der Schlüssel für die definitive Lösung ist in einer minutiösen Messung der Amplituden zu suchen; die Ueberwindung der sich darbietenden Schwierigkeiten wird keine leichte sein, aber vielleicht einen Einblick in die Mechanik der Bewegung der Flüssigkeitstheilchen gewähren. Durch directe Messung habe ich bei einigen Wellenlängen die Amplitude festzustellen versucht, beispielsweise für $\lambda = 2{,}848$ cm, wo als Mittel 1,2 mm sich ergab. Verlässlich kann jedoch nur eine mit optischen Mitteln operirende Methode sein, mit welcher sich die photographische Aufnahme der stehenden Wellen verbinden lässt.

Einige, auf der die Stadt Rostock durchfliessenden Warnow, angestellte Versuche an noch grösseren Wellen mögen hier einen Platz finden.

Jeder das Wasser durchschneidende längere Körper, etwa ein Dampfschiff, erregt zwei schief zu seiner Cursrichtung nach beiden Seiten hin verlaufende Wellensysteme. Das Eine derselben besteht aus langen, weniger zahlreichen Wellen und wird vom Bug des Schiffes hervorgerufen. Das Zweite hat kürzere Wellen und rührt vom Hinterschiff her. Auf dieses System beschränkten sich die Messungen.

Die Richtung dieses Wellensystems wurde bestimmt durch Einvisirung zweier Marken, deren Entfernung 89 m betrug. Die Verbindungslinie dieser Marken war daher ein Wellenstrahl für die durchschnittliche Bewegungsrichtung eines Wellenzuges. Um die von Thomson eingeschlagene Methode zu verwerthen, fand zugleich mit der Beobachtung der Wellen auch die der Dampfergeschwindigkeit statt. Zu diesem Zweck wurde die Entfernung von drei in einer Gerade liegenden Schiffspfähle (D'Alben) gemessen. Sie betrug 269,5 m.

Während zwei Beobachter die Zeit bestimmten, welche der Dampfer zum Passiren der Pfähle gebrauchte, stellten zwei andere die Geschwindigkeit und Zahl der Wellen pro Secunde fest.

Nach einigen werthlosen Beobachtungen, glückten zwei Versuche bei absoluter Windstille und spiegelglattem Wasser in befriedigender Weise.

Tabelle XI.

Versuch	Dampfergeschwindigkeit v	Geschätzter Winkel der Wellen gegen die Cursrichtung α	$\sin\alpha$	Aus der Dampfergeschwindigkeit berechnete Wellengeschwindigkeit $v_1 = v \sin\alpha$	n pro Secunde beobachtet	λ beobachtet	Beobachtete Geschwindigkeit $v_2 = n\lambda$	λ_1 berechnet aus $\lambda_1 = \frac{2\pi n^2}{g}$	Berechnete Geschwindigkeit $v_3 = n\lambda_1$
	cm	α				cm	cm	cm	cm
1	391,5	34°	0,56	219	0,754	264,4	199,4	274,7	207,2
2	486,0	25°	0,42	204	0,629	379,7	238,8	394,8	248,3

Die aus dem Dampferfortgang berechneten Wellengeschwindigkeiten gaben einmal ein zu grosses, das andere Mal ein zu kleines Resultat. Der Fehler liegt in der Ungenauigkeit der Winkelschätzung, obgleich ziemlich ferne Objecte zur Peilung der Wellenrichtung benutzt wurden.

Beide Wellenlängen λ blieben nicht erheblich hinter den berechneten λ_1 zurück. Der Grund der Abweichung muss in der mangelnden Tiefe gesucht werden, denn Lothungen ergaben für den Weg der Welle nur eine Durchschnittstiefe von 132 cm, und da die Welle bei der zweiten Beobachtung an den Marken eine Amplitude von 8 cm zeigte, ist die Störung in dem Verhältnis $\frac{8}{132}$ zu suchen.

Nach Beobachtungen von Duhil de Benazé, und besonders von Antoine, scheinen die im Ocean auftretenden Wellen ebenfalls kürzer als die berechneten zu sein. Zu einem Vergleich können hier ihre Messungen nicht herangezogen werden, da sich dieselben auf Wellen von sehr grossen Dimensionen beziehen.

Zum Schluss ist noch zu bemerken, dass die Wellenerregung mittels schwingender Gabeln einen vergleichenden Untersuchungsweg bietet, zu den interessanten Forschungen van der Mensbrugge's [1]) über Spannungen in der Berührungsschicht zweier Flüssigkeiten. Die Auswerthung dieser Forschungsergebnisse würde von grosser Tragweite für die Probleme der Molecularphysik sein.

An dieser Stelle fühle ich mich gedrängt, meinem hochverehrten Lehrer Herrn Professor Dr. Matthiessen für seine bei der Ausführung der Versuche ertheilten Rathschläge meinen ehrerbietigsten Dank auszusprechen.

1) La Nature. 1888.

V. Literatur.

1804. **Franz Gerstner.** Neue Wellentheorie.
1809. **Bremontoir.** Recherches sur le mouvement des ondes. Paris.
1818. **Poisson.** Mémoire sur la théorie des ondes. Paris.
1820. **Plana.** Notes sur la théorie des ondes, donnée par Mr. de Poisson. (Accad. di Torino.)
1820. **Bidone.** Expériences sur la remous et sur la propagation des ondes. (R. Accad. di scienca.) Vol. 25.
1823. **Poleni.** Del moto misto dell' aqua. Bologna.
1825. **E. und W. Weber.** Wellenlehre auf Experimente gegründet. Leipzig. Gerhard Fleischer. Dies Werk enthält noch die Theorien und Arbeiten von Newton, Gravesande, d'Alembert, La Place, La Grange, Flauvergues und Brandes.
1827. **Cauchy.** Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide, Mém. pris par div. savants à l'Acad. de Sc. Paris.
1831. **Emy.** Du mouvement des ondes et des travaux hydrauliques. Paris.
1831. **Faraday.** Pogg. Ann. Bd. 26 S. 193.
1838. **Virla.** Du mouvement des ondes. (Ann. d. ponts et chaussées.)
1841. **Siau.** De l'action des vagues à des grandes profondeurs (Acad. de Sc.) Paris.
1843. **Cauchy.** Théorie de la propagation des ondes (Rec. de l'Acad. de Sc.)
1843. **Caligny.** Expériences ayant pour but etc. (Comptes rendus.)
1844. **Scott Rusell.** Report on waves. British Association. York 1844.
1845. **Laurent.** Observations sur les ondes liquides etc. (Comptes rendus.)
1845. **Earnshaw.** Cambridge Transactions.
1845. **Lang.** Height of Waves. (Nautical Magazine).
1845. **Hagen.** Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten. Abh. d. kgl. Akad. d. Wissensch. Berlin.
1846. **Piddington.** On the storm waves and storm currents of hurricanes. (Nautical Mag.)
1846. **Stevenson.** Account of the experiments upon the forces of waves. Report on the labours in Dover bay.
1846. **Walker.** Ocean Waves. (Naut. Mag.)
1847. **Conti.** Del moto undulatorio (Gior. E. di Scienza). Padova.
1847. **Stokes.** Theory of Waves. Phil. Mag. Bd. 30 p. 129 und 138.
1850. **Moorsom.** Wave gauge. Naut. Mag.
1850. **Robertson.** On the theory of waves (Abstr. Rog. Soc.)
1850. **Stokes.** On waves. Cambridge Transactions.
1850. **Poppe.** Zur Darstellung der Interferenzen in Flüssigkeiten. Pogg. Ann. Bd. 79 S. 437.

1853. Poppe. Zur Darstellung der Interferenzen in Flüssigkeiten. Pogg. Ann. Bd. 19 S. 223.

857. Lissajous. Zusammenstellung von Schwingungen verschiedener Wellenlängen. Ann. der Chemie und Physik. (3) S. 51.

858. Holtzmann. Ueber die Wellenbewegung tropfbarer Flüssigkeiten. (Einladungsschrift der polytechnischen Schule. Stuttgart.)

1859. Hagen. Zur Theorie der Meereswellen. Pogg. Ann. Bd. 107 S. 283.

1860. Hirst. On ripples and their relation to the velocity of currents. Phil. Mag. (4) vol 21. p. 1—188.

1860. Hagen. Die Wellenform in einem Strom von unendlicher Breite und Tiefe. Berl. Monatsberichte S. 51.

1861. Hagen. Wellen auf Gewässern gleichförmiger Tiefe. Berl. Monatsberichte S. 1—79.

1862 u. 63. Bazin. Mémoire sur le remous et sur la propagation des ondes. Comptes rendus vol. 55 p. 353. ibid. Clapeyron vol. 57 p. 302.

1862. Froude. Transactions of the institution of naval architects vol. 3.

1863. Rankine. On the exact form of waves near the surface of deep water. Phil. Trans. of the Roy. Soc. vol. 153 p. 127.

1863. Rankine. Phil. Mag. (4) vol. 24 p. 420.

1866. Cialdi. Sul moto endoso del mare. Roma.

1868. Matthiessen Ludw., Akustische Versuche, die kleinsten Transversalwellen von Flüssigkeiten betr. Pogg. Ann. S. 107.

— Lissajous. Ueber die Interferenz von Flüssigkeitswellen. Compt. rend. Bd. 67 S. 1887 und Phil. Mag. (4) Bd. 36 S. 240.

— Maury. Fluth und Erdbebenwellen. Phil. Mag.

— Rankine On waves in liquids. Roy. Soc. vol. 16 p. 344. Phil. Mag. (4) vol. 36 S. 52.

1870. Poppe. Ueber die Interferenzerscheinungen und primären Gebilde freier und regelmässiger Wellensysteme tropfbarer Flüssigkeiten. Programm der höheren Gewerbeschule. Frankfurt a. M.

— Boussinesq. Théorie des ondes liquides périodiques. Mem. d. Sav. étrang. Bd. 20.

1871. Matthiessen Ludw., Ueber die Transversalschwingungen tönender, tropfbarer und elastischer Flüssigkeiten. Pogg. Ann. Bd. 141 S. 385.

— Thomson. Letters to Prof. Tait. Phil. Mag. p. 368—374.

— Boussinesq. Allgemeine Theorie der Wellen längs eines rechtwinkeligen Kanals. C. R. Bd. 72 S. 755. Bd. 73 S. 226. Liouv. Journ. Bd. 21, 13 S. 55 bis 108. Bd. 18 S. 47.

1873. Lissajous. Methode, um die Fortpflanzung der Wellen zu studiren Journ. de phys.

— Bertin. The experimental study of waves. Trans. of the Inst. of Nav. Arch.

1874. Bertin. Les Vagues et les Roulis. Mém. de Cherbourg, vol. 17 p. 209. vol. 15. p. 5 und 313. C. R. (78) p. 676.

— Imray. Ueber die gleichmässige Oscillationswelle. Proc. Roy. Soc. Bd. 22. S. 350.

— Tylor. On tides and waves. Phil. Mag. vol. 48 p. 204.

1875. Guieyesse. Ueber die Fortpflanzung der Fluthwellen in den Flüssigkeiten. Liouv. Journ. (3) S. 399.

— Decharme. Nouveau moyen de produire des vibrations et des interférences sur le mercure. Journ. de phys. p. 207. Pogg. Ergänzungsband 7 S. 176.

1876. **Rayleigh.** On waves. Phil. Mag. vol. 51 p. 257. vol. 52 p. 430.

1877. **Giesen.** Versuch einer mathematischen Darstellung der Flüssigkeitswellen. Zeitschrift für Mathematik. 1877 S. 138.

1878. **Dubois.** Transversalschwingungen von Flüssigkeiten. C. R. Bd. 86 S. 295 453. 652.

— **Boussinesq.** Wasserwellen. Liouv. Journal. (3) Bd. 4 S. 335.

1878. **Rayleigh.** Ueber fortschreitende Wellen. Proc. of. Lond. Math. Soc. Bd. 9 S. 21.

— **Kolacek.** Ueber den Einfluss des capillaren Oberflächendrucks auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wasserwellen. Pogg. Ann. (2) Bd. 5 S. 425.

— **Woolley.** On the theory of deep sea or oscillating waves. Trans. of the Inst. of Nav. Arch. vol. XIX.

1879. **Franck.** Ein Problem aus der Wellentheorie. Dissert. Rostock.

— **Giesen.** Oscillation einer homogenen Flüssigkeitsmasse infolge ihrer Oberflächenspannung. Zeitschr. für Mathematik.

1880. **Lechat.** Des vibrations à la surface des liquides. Ann. de chem. et phys. (5) vol. 19 p. 289. C. R. vol. 19 p. 1543.

— **Kolacek.** Ueber die Wellenbewegung schwerer Flüssigkeiten, welche in einem senkrechten Kreiscylinder eingeschlossen sind. Arch. mat. a fys. Bd. 2. S. 4. Beiblätter von **Wiedemann** S. 177.

— **Bazzi.** Ueber Flüssigkeitswellen. N. Cim. (3) Bd. 6 S. 98. Beiblätter Bd. 4 S. 14.

— **Eustis.** Methode, Wellen auf Quecksilber zu erregen. Proc. Boston Soc. (2) Bd. 7. Vergl. Fortschritte der Mathem. 1880 S. 270.

1883. **Fehrmann.** Ueber die Wellenbewegung einer tropfbaren Flüssigkeit. Dissert. Göttingen.

— **Rayleigh.** On the crispations of fluid resting upon a vibrating support. Phil. Mag. (16) p. 50.

— **Kirchhoff.** Vorl. über mathemat. Physik. Bd. 25 §§ 3 und 4.

1886. **Tompson.** On stationary waves in flowing water. Phil. Mag. (5) vol. 22 p. 353.

1887. **Matthiessen Ludw.** Ueber die Wanderung der Interferenzcurven. Wied. Ann. Bd. 32 S. 626.

1888. **Ahrendt.** Experimentelle Untersuchungen über das Thomson'sche Gesetz. Rep. d. Phys. Bd. 23 S. 318.

1889. **Matthiessen Ludw.** Experimentelle Untersuchungen über das Thomson'sche Gesetz der Wellenbewegung auf Flüssigkeiten unter der Wirkung der Schwere und Cohäsion. Wied. Ann. Bd. 38 S. 1.

Rostock, 14. August 1889.

O. Riess.

Bezugsquellen.

XXVI. Band. 3. Heft.

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 3. Heftes.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1890.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in München und Leipzig ist erschienen:

Der siebente Jahrgang 1890

des

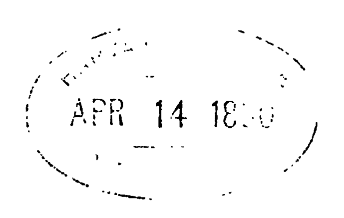
Kalender für Elektrotechniker.

Herausgegeben von

F. Uppenborn.

In Brieftaschenform in Leder elegant gebunden Preis 4 M.

Inhaltsverzeichniss des Taschenbuches:



Entstehungsursache des Tones, welcher unter dem Einflusse der intermittirenden Magnetisirung in magnetischen Metallen erzeugt wird.

Von

P. Bachmetjew.

Es ist bekannt, dass bei Magnetisirung eines Eisenstabes mittels intermittirenden Stromes ein Ton hervorgerufen wird. Diese Erscheinung wurde zum ersten Mal im Jahre 1838 von Page [1]) beobachtet.

Spätere Untersuchungen [2]) dieser Erscheinung haben gezeigt, dass die Intensität des Tones mit der Stärke des magnetisirenden Stromes wächst, wobei aber die Tonhöhe unverändert bleibt (Matteucci). Ebenso übt die Dicke der Stäbe keinen Einfluss auf den Ton aus. Stahlstäbe verhalten sich gerade so wie Eisenstäbe und Stäbe aus diamagnetischen Metallen erzeugen gar keinen Ton (Wertheim) [3]).

Wertheim fand weiter, dass die Tonhöhe auch dann unverändert bleibt, wenn zwei Ströme — ein constanter und ein intermittirender — durch die magnetisirende Spule fliessen. Daraus zieht er u. A. den Schluss, dass die Elasticitätsänderung der Eisenstäbe unter dem Einflusse der Megnetisirung zu klein ist, um irgend welche merkliche Aenderung in der Tonhöhe hervorrufen zu können.

Wertheim ist nun der Ansicht, dass Stäbe, welche eine verschiedene Elasticität besitzen, beim Magnetisiren verschiedene Tonhöhen erzeugen müssen. Die Versuche von Matteucci haben jedoch gezeigt, dass sich die Tonhöhe eines einer intermittirenden Magnetisirung unterworfenen und mit 14 kg auf Zug beanspruchten Stabes auch nicht ändert.

---

1) Page, Pogg. Ann. Bd. 43 S. 411. 1838.

2) Delezenne, Pogg. Ann. Bd. 63 S. 530. 1838. Marrian, Pogg. Ann. Bd. 63 S. 530. 1838. Matteucci, Archives Vol. 5 pag. 389. 1838.

3) Wertheim, Pogg. Ann. Bd. 77 S. 43. 1848.

Beatson[1]) beobachtete, als er einen intermittirenden Strom durch einen Eisenstab durchgehen liess, dass, obwohl die Tonhöhe dabei unverändert blieb, seine Intensität dennoch wuchs.

Trowbridge[2]) fand, dass die Eigenschaft des Tones nicht nur dem Eisen, sondern unter gleichen Umständen auch dem Kobalt und Nickel zukommt. Bei seinen Versuchen haben unter gleichen Umständen am stärksten Eisen, dann Kobalt und Nickel getönt.

De-la-Rive[3]), der diese Erscheinung einem besonderen Studium unterwarf, behauptet auf Grund seiner Untersuchungen, dass nicht nur Fe, sondern auch Pb, Zn, Bi, Pt und Au-Stäbe einen Ton erzeugen, wenn sie mit den Polen eines starken Elektromagneten in Berührung sind, welcher durch einen intermittirenden Strom magnetisirt wird. Dasselbe geschieht auch dann, wenn die angeführten Metalle in eine Magnetisirungsspule eingefasst sind. Auch bei pulverisirtem, Cu Bi, Zn, und Sb wie bei Hg sind ähnliche Töne vernommen worden, wobei Hg eine Oberflächenvibration erlitt. Die Tonhöhe entspricht der Anzahl der Unterbrechungen des magnetisirenden Stromes. De-la-Rive machte auch die Beobachtung, dass der Ton intensiver werde, wenn Cu, Pt, Neusilber und Messing stark und *Pb* Sn, Zn schwach gezogen werden.

De-la-Rive bestreitet die Möglichkeit, dass die Entstehungsursache des Tones bei den angeführten metallischen Pulvern die elektromagnetische Anziehung der Theilchen sei. Er sucht seine Behauptung dadurch zu bekräftigen, indem er sagt, dass sowohl gezogene als auch nicht gezogene Stäbe (sogar Pb) einen der Anzahl der Stromunterbrechungen entsprechenden Ton erzeugen und erklärt die Erscheinung durch eine gewisse Umlagerung der Moleküle, welche beim intermittirenden Magnetisiren im Stabe vor sich geht.

Ferguson[4]) ist derselben Ansicht.

Bei einer Untersuchung über Veränderungen der Magnetisirbarkeit des Eisens, Nickels und Kobalts durch Comprimiren und Dehnen beobachtete ich, dass der bei der Magnetisirung oder Entmagnetisirung hörbare Ton eine verschiedene Intensität bei comprimirten und gedehnten Stäben besitzt, wobei diese Aenderung bei Nickel und Eisen nicht parallel vor sich geht.

Das veranlasste mich, die Erscheinung näher zu untersuchen, und durch eine Reihe von Versuchen gelang es mir, die Ursache dieser Erscheinung zu erforschen, wie folgt:

---

1) Beatson, Arch. de Genève Vol. 2 pag. 113. 1846.
2) Trowbridge, Beibl. Bd. 3 S. 289. 1879.
3) De-la-Rive, Pogg. Ann. Bd. 65 S. 637; Bd. 76 S. 270; Bd. 128 S. 452.
4) Ferguson, Beibl. Bd. 3 S. 205. 1878.

Beobachtungen und Resultate.

Die Magnetisirung der Stäbe wurde durch eine hölzerne Spule, welche mit isolirtem Kupferdraht (4 Lagen zu je 100 Windungen) umgewickelt war, bewirkt. In die Spule wurde der zu untersuchende Stab hineingesteckt; falls er aber der Belastung unterworfen wurde, wurde er zunächst in ein hölzernes Rohr, dessen Oeffnung der Dicke des Stabes entsprach, hineingeschoben. Die Länge des Rohres war etwas kleiner als die des Stabes selbst, um dadurch auf die Enden des letztern die Ausübung des Druckes zu ermöglichen. Das Comprimiren oder Dehnen geschah mit Hilfe des als Fig. 1 gezeichneten Apparates. Die Spule

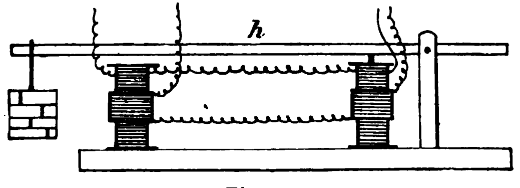
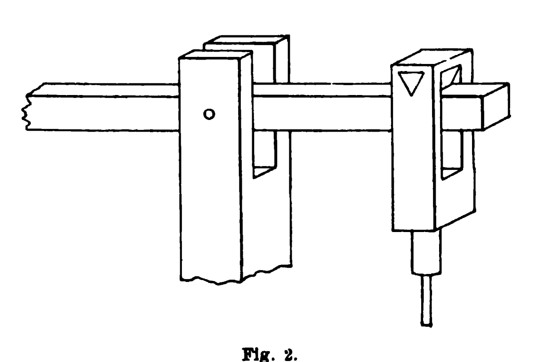


Fig. 1.

wurde unter den Hebel (*h*) gestellt, dann wurden in die Magnetisirungsspule von oben und unten zwei dicke Messingstäbe hineingeschoben, zwischen welchen sich auch der Eisen- oder Nickelstab befand. Wurde dann mittels des Hebels ein Druck auf den obern Messingstab ausgeübt, so wurde das Metallstäbchen in der Spule comprimirt.

Um die Drähte zu dehnen, wurde die Spule auf die andere Seite der Unterstützungstange des Hebels gestellt. Um das zu erreichen, musste man den Hebel mit einer Kappe versehen, die in der Mitte ausgehöhlt war (Fig. 2).


Fig. 2.

Die zu untersuchenden Drähte wurden an ihren Enden mit den Messingstäben zusammengelötet (ausserdem war der Draht in die Messingstäbe etwas eingeschraubt), von welchen einer in die eben genannte Kappe eingeschraubt, der andere aber mit einer Mutterschraube an das Brett festgeschraubt war. Die starke Dehnung oder Compression wurde mittels der am Hebel aufgehängten Gewichte erreicht. Der Hebel allein übte einen Druck von 14 kg aus. Das Verhältnis des Kraftarmes zum Widerstandsarme war 9,47.

Die Stärke des magnetisirenden und Inductionsstromes, der durch den Magnetismus des Stabes erzeugt wurde, wurde mittels zweier Gal-

vanometer (nach der Methode von Gauss) bestimmt. Der Einfluss der Magnetisirungsspule auf den Inductionsstrom wurde mit Hilfe einer andern gleichen Spule compensirt. Den magnetisirenden Strom lieferten drei Daniell.

Die durch die Magnetisirung in den Stäben hervorgerufenen Töne wurden mittels eines Tele- und Mikrophons aufgefangen; letzteres bestand aus drei Kohlenplatten und wurde beim Comprimiren unter den Stab placirt.

Beim Ziehen der Stäbe wurde das Mikrophon oben an die Kappe, welche auf den Hebel *h* angezogen war, befestigt. Auf diese Weise berührte der zu untersuchende Stab das Brett des Mikrophons sowohl bei der Compression als auch bei der Dehnung und in Folge dessen konnten die Fibrationen der Kohlenplatte entstehen. In die Kette wurden ein Telephon und ein Element eingeschaltet. Vermittels dieser Einrichtung konnte man die Töne, die mit blossem Ohre kaum zu vernehmen waren, ganz gut unterscheiden.

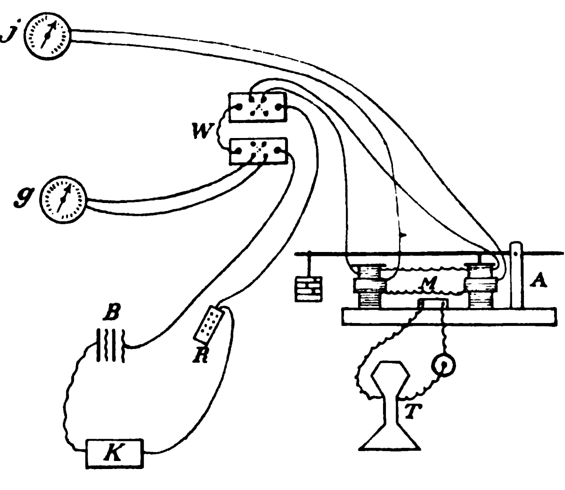


Fig. 3.

Um den magnetisirenden Strom zu unterbrechen gebrauchte man eine Stimmgabel mit Elektromagneten. Der dadurch entstandene Ton machte 128 Schwingungen in der Sekunde: folglich wurde der Strom auch soviele Male in der Sekunde unterbrochen. Die Stimmgabel befand sich auf einer Kautschuckplatte im nächstliegenden Zimmer.

Fig. 3 zeigt schematisch die Aufstellung der Apparate; es bedeutet: *B* Batterie, *K* Stimmgabel, *A* Apparat zum Comprimiren und Dehnen der Stäbe, *J* Galvanometer für Inductionsströme, *g* dasselbe für den Magnetisirungsstrom, *W* zwei Wippen, mit Hilfe der einen wurde der Strom im Galvanometer *g*, mit der andern hingegen der in der Magnetisirungsspule umgekehrt, *R* Rheostat, *M* Mikrophon, *T* Telephon.

Der allgemeine Gang der Versuche war folgender: zuerst mass man die Stärken des Magnetisirungs- und Inductionsstromes, dann wurde die Stimmgabel in Vibration versetzt, worauf man den vom Stabe erzeugten Ton beobachtete. Alsdann wurde der Stab durch ein

gewisses Gewicht gezogen oder comprimirt, der Iuductionsstrom wieder gemessen, die Stimmgabel in Bewegung versetzt u. s. w.

Die untersuchten Stäbe waren:

Aus weichem Eisen:

$2r = 2{,}35$ mm, $l = 230$ mm (zum Dehnen).
$2r = 3{,}95$ „ $l = 225$ „ (zum Comprimiren).

Aus Nickel:

$2r = 2{,}48$ mm, $l = 225$ mm } (zum Dehnen).
$2r = 3{,}90$ „ $l = 225$ „ }
$2r = 3{,}90$ „ $l = 225$ „ (zum Comprimiren).

Als specifisches Gewicht für Eisen fand man 7,745, für Nickel 8,787. Der Elasticitätsmodul für ausgeglühtes Nickel, welcher mittels Spiegel, Scala und Fernrohr bestimmt und gefunden wurde, ergab 13600.

Es bedeutet in den unten angeführten Tabellen:

g die Belastung in kg (schon berechnet).

J die Stärke des magnetisirenden Stromes.

M_t temporärer Magnetismus.

M_p permanenter Magnetismus.

t die Intensität des Tones (wurde mit dem Ohre annähernd bestimmt) [1]).

Alle Grössen sind in relativen Einheiten ausgedrückt.

Tabelle I.

Ni · $2r = 3{,}90$; $l = 255$ · $J = 98$ · Comprimiren.			
g	M_t	M_p	t
0	86	47	40
42	132	72	30
76	163	57	40
97	177	48	40
127	194	41	30
145	205	37	15
163	211	35	5
191	218	30	3
0	88	47	40

Aus der Tabelle ersieht man, dass die Intensität des Tones beim Nickel mit zunehmender Compression anfangs langsam, dann immer rascher abnimmt, woraus man schliessen darf, dass t bei noch grösserer Compression auf Null herabsinkt, jedoch war mir letzteres zu beobachten nicht möglich, da sich der Draht unter starker Compression krümmte.

1) Die Werthe für einen Draht sind mit denen eines andern nicht zu vergleichen.

Tabelle II.

$Ni \cdot 2r = 3{,}90,\ l = 255 \cdot J = 55 \cdot$ Dehnen.			
g	M_t	M_p	t
0	40	18	10
42	24	5	10
63	19	3	9
97	15	1	7
127	12	0,5	4

Diese Tabelle zeigt das Nämliche für gezogenes Nickel.

Tabelle III.

$Ni \cdot 2r = 2{,}48,\ l = 255 \cdot J = 60 \cdot$ Dehnen.			
g	M_t	M_p	t
0	22	12	10
42	8	1	3
63	6	0,5	4
84	5	0,2	4
110	4	0,5	3
127	4	0,5	2

Tabelle III bestätigt vollkommen das oben Gefundene.

Tabelle IV.

$Fe \cdot 2r = 3{,}95,\ l = 225 \cdot J = 70 \cdot$ Compression.			
g	M_t	M_p	t
0	266	22	10
14	258	17	10
63	225	25	10
97	209	25	8
127	195	25	6
191	173	31	4

Tabelle IV zeigt, dass das Comprimiren des Eisenstabes die Intensität des von ihm unter dem Einfluss der intermittirenden Magnetisirung erzeugten Tones vermindert.

Tabelle V.

$Fe \cdot 2r = 2{,}35,\ l = 230 \cdot J = 66 \cdot$ Dehnen.			
g	M_t	M_p	t
0	60	22	10
42	96	30	10
63	105	27	3
84	109	27	1
97	106	26	4
109	105	25	5
127	99	25	6

Tabelle VI.

Fe · $2r = 2{,}35$, $l = 280$ · $J = 32$ · Dehnen.			
g	M_t	M_p	t
0	19	6	10
42	31	10	5
63	34	12	5
84	37	12	0
97	36	12	0
110	35	10	2
127	35	10	3

Aus den ebenso angeführten zwei Tabellen ist ersiehtlich, dass durch Dehnen der Eisenstäbe die Intensität des Tones vermindert wird; bei einem gewissen Zuggewichte gibt der Stab keinen Ton von sich, um später bei Zunahme des Gewichtes wieder zum Vorschein zu kommen und stärker und stärker zu werden.

In Anbetracht dessen, dass letzteres Resultat sehr wichtig zur Erklärung der Ursache des von den Stäben erzeugten Tones ist, habe ich noch einige Versuche mit Dehnen der Eisenstäbe angestellt, wobei ich dieselben Resultate erzielte.

Die Tonhöhe, welche bei der Magnetisirung der Stäbe entstand, variirte weder mit der Aenderung der Stärke des magnetisirenden Stromes, noch mit der Compression oder Dehnung der Stäbe. Es stellte sich sogar heraus, dass die Tonhöhen bei Nickel- und Eisenstäben dieselben waren.

Schluss.

Es fragt sich nun, wie diese Erscheinung des Tones in magnetischen Metallen zu erklären sei, wodurch ferner die Intensitätsänderungen des Tones in Nickel- oder Eisenstäben unter dem Einflusse der Compression und des Dehnens hervorgerufen werden. — Klar ist, dass hier kein Zusammenhang der Stärke des Tones mit der Grösse des magnetischen Momentes bestehen kann, wie Aehnliches aus der Hypothese De-la-Rive's zu vermuten wäre, dass vielmehr der Zusammenhang in andern, unmittelbar auf die Tonstärke wirkenden Factoren zu suchen sei.

Und in der That, wenn in einer Eisen- oder Nickelmasse bei Magnetisirnng durch eine gewisse Umlagerung der Moleküle ein Ton hervorgerufen wird, wie dies bereits erklärt wurde, warum wird dann die Tonstärke beim Zuge eines Eisenstabes nicht vergrössert, da doch im gezogenen Eisen der Magnetismus und somit auch die Umlagerung der Moleküle im grössern Maassstabe vor sich gehen? Dieselbe Frage könnte man auch bezüglich comprimirten Nickels stellen.

Um genannte Erscheinung zu erklären, muss ich auf eine frühere Arbeit: „Magnetismus als Function des Molecularvolumens“ [1]) hinweisen, worin meine Vermuthungen über Erscheinungen des Magnetismus im allgemeinen ausgesprochen sind. Dort wurde gezeigt, dass die physikalischen Molecüle der Nickelmasse relativ weiter von einander entfernt sind als im Eisen, so dass man Nickel als ausgedehntes Eisen (vom magnetischen Standpunkt aus) betrachten kann. Auf dieselbe Art lässt sich erklären, warum die Aenderung in der Magnetisirbarkeit des Nickels unter dem Einfluss der Compression und der Dehnung sich entgegengesetzt zu der des Eisens verhält. Weiter lässt sich dadurch erklären, warum Nickelstäbe unter dem Einflusse der Megnetisirung sich verkürzen und Eisenstäbe sich verlängern [2]).

Stellen wir jetzt die Erscheinungen der Längenänderung und Tonstärke, welche man beim Magnetisiren beobachtet, zusammen.

Längenänderung.	**Aenderung der Tonstärke.**
Ein Eisenstab verlängert sich beim Magnetisiren. (Joule).	Beim Magnetisiren eines Eisenstabes entsteht ein Ton. (Page).
Je grösser das magnatische Moment, desto grösser die Verlängerung, (Joule).	Die Tonstärke wächst mit der Zunahme der magnetisirenden Kraft. (?)
Ein stark ausgedehnter Eisenstab verlängert sich beim Magnetisiren nicht mehr. (Joule),	Ein stark ausgedehnter Eisenstab gibt beim Magnetisiren keinen Ton mehr von sich. (d. Verf).
Bei stärkerer Dehnung des Eisenstabes tritt eine Verkürzung bei der Magnetisirung zum Vorschein. (Joule).	Bei stärkerer Dehnung des Eisenstabes wird der Ton wieder hörbar. (d. Verf).
Beim Magnetisiren eines Nickelstabes verkürzt er sich. (Barrett).	Beim Magnetisiren eines Nickelstabes erzeugt er einen Ton. (Trowbridge).

Die Analogie zwischen der Längenänderung und Tonstärke bei Compression und Dehnung ist somit evident.

Dieser Umstand berechtigt uns, den Schluss zu ziehen, dass die Tonstärke eine Function der Längenänderung der Stäbe ist. Wenn der Stab seine Länge nicht ändert, so entsteht auch kein Ton. Darum hat ein Kupferstab in den Versuchen von Wertheim

1) „Elektricität“, Journ. der russ. k. techn. Gesellsch. No. 7, 8, 9—10, 1885.
2) Joule, Phil. Mag. Bd. 30 S. 225. 1847.

keinen Ton erzeugt, und darum tönt auch ein sehr stark gezogener Eisenstab nicht, weil er sich nicht mehr verkürzen und verlängern kann; bei weiterer Dehnung jedoch findet beim Magnetisiren eine Verkürzung statt und der Ton kommt in Folge dessen wieder zum Vorschein (wie auch beim Nickel unter gewöhnlichen Umständen).

Wenn also der Ton beim Magnetisiren eine Function der Längenänderung ist, so muss seine Höhe auch der Anzahl der Unterbrechungen des magnetisirenden Stromes entsprechen, was auch in der Wirklichkeit mit früheren, von andern Forschern angestellten Versuchen bestätigt wird. Ebenso ist es eine natürliche Folge, dass durch Dehnung und Compression nur die Intensität, nicht aber die Tonhöhe geändert wird. Klar ist weiter, warum die Tonhöhe von dem Durchmesser der Stäbe nicht abhängt und schliesslich, warum sie bei Eisen, Nickel und Kobalt dieselbe ist.

Zürich, November 1889.

Universitätslaboratorium.

Vom Stosse.

Eine didaktische Mittheilung.

Von

A. Kurz.

Das eine Lehrbuch schreibt sofort, ohne Ableitung, die bekannte Gleichung

$$m(v - x) = m'(x - v'),$$

ein anderes citirt dagegen zu deren Begründung einen früheren Paragraphen von vier Seiten Länge und darin stehen noch drei andere citirt. Das erstere Buch ist Pfaundler's noch nicht ganz erschienene Neuauflage (3 Bände), das zweite ist Poisson's Traité de mécanique.

Einen mittleren Standpunkt nimmt da Henrici ein, der den Leitfaden des v. Beetz neu herausgab und dabei wirklich eine Aenderung vornahm, die aber verunglückt ist durch die „Stosskraft $k = mv$“, die doch obige Gleichung auch nicht erklärt; die frühere Auflage reichte näher an eine Erklärung hin mit den Worten „weil keine neue Kraft hinzukommt“; ferner bringt Münch darüber zwei Paragraphe mit je einem „Beweise“, deren erster nicht zur Behauptung passt und zweiter nur eine rechnerische Umformung bedeutet.

Diese Bemerkungen sollten mir nun das Recht verschaffen, über jene elementare Gleichung noch das Folgende vernehmen zu lassen.

Man schreibt gewöhnlich

$$kt = mv,$$

möge aber das allgemeiner gültige

$$kt = m(v - x)$$

dafür setzen und dieses zu obigem Zwecke gleich noch für den andern Körper anwenden.

$$k't' = m'(v' - x').$$

Nun ist beim Stosse selbstverständlich $t = t'$, und nach dem Princip der gleichen Wirkung und Gegenwirkung $k = -k'$, und end-

lich beim sog. unelastischen Stosse („wo keine neue Kraft hinzukommt" s. oben) $x = x'$, also folgt das zu Beweisende. —

Stoss (vollkommen) elastischer Körper: Da wird gewöhnlich die Gleichung der kinetischen Energie vor und nach dem Stosse ohne Einschränkung hingestellt, die man wegen der Erwärmung doch stets machen sollte (abgesehen von partieller Zertrümmerung und von elektrischer Energie). Ich habe darauf bereits im Jahrgange 1883 dieser Zeitschrift S. 338 u. 339 Bezug genommen [1]). Daselbst sind auch zwei Versuche mit einer Elfenbeinkugel beschrieben zu beiderlei Stossarten.

1) Welche Notiz durch den allgemeinen Titel „drei Mitteilungen" für den Nachschlagenden verborgen wurde. Auch darum wurde obige Gelegenheit zu diesem Hinweise ergriffen.

Der Calcul des schädlichen Raumes bei der Luftpumpe.

Von

A. Kurz.

Nur in Eisenlohr-Zechs Physikbuch ist wenigstens die Formel für die Verdünnungsgrenze

$$\delta = d \cdot \frac{\gamma}{c + \gamma}$$

angegeben, welche der schädliche Raum γ des Stiefels c aus der gewöhnlichen Luftdichte d herstellt. Daselbst steht im Nenner $(\gamma + c)$, den ich in c abzukürzen als eine Forderung der Physik gewissermassen betrachte.

Wir haben also

$$\delta = d \cdot \frac{\gamma}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

Die neueste Auflage von Müller-Pfaundler gibt den Gedanken, welcher der Gleichung (1) zu Grunde liegt, nur im Worttexte (ein Absatz von 21 Zeilen, S. 524 und 525).

Ich will jetzt auch die durch den Babinet- wie den Grassmann'schen Hahn erlangte höhere Verdünnungsgrenze calculieren.

Zu diesem Zwecke denke ich δ bereits erreicht und die Luft (d) von γ durch Verbindung der beiden Stiefel verdünnt auf den Mittelwerth δ', der sich ergibt aus

$$(\gamma + c)\ \delta' = \gamma \cdot d + c \cdot \delta,$$

Lässt man links wieder γ weg und berücksichtigt (1), so kommt

$$\delta' = 2\,\delta.$$

Dieser Werth ist nunmehr, wenn man die neue Verdünnungsgrenze δ'' kennen lernen will, in (1) statt d einzusetzen, so dass

$$\delta'' = 2\,\delta\,\frac{\gamma}{c} = 2\,d \cdot \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (2$$

In Marbachs physikalischem Lexikon vom Jahre 1856 findet sich bei dem Artikel „Luftpumpe“ eine solche Berechnung für den Babinet'schen Hahn (der Grassmann'sche ist wohl damals noch weniger bekannt gewesen), welche aber an einem Fehler leidet, so dass im Resultat der Faktor 2 meiner Gleichung nicht steht.

Pfaundlers neueste Auflage spricht schon vor der Erwähnung der zwei Hähne von der Minderung des δ (auch für einstiefelige Pumpen) durch Deckel, Stopfbüchse und Ventil, so dass im schädlichen Raum nicht Luft von der Dichte d sondern von geringerer Dichte bleibt. Alsdann werden auf Seite 525 und 526 der Babinet'sche und Seite 528 der Grassmann'sche Hahn wiederum ohne Rechnung oder Formel besprochen. Es empfehlen sich also (1) und (2) sehr wegen ihrer Kürze und Uebersichtlichkeit.

Ueber einen Fall von variabler Temperaturvertheilung in einem Stabe.

Von

O. Chwolson.

Um die äussere Wärmeleitungsfähigkeit eines Stabes zu studiren, kann man denselben der ganzen Länge nach bis zu einer gewissen Temperatur erwärmen und dann die allmähliche Abkühlung desselben beobachten. Die gleichförmige Erwärmung eines langen Stabes ist nicht so ganz leicht zu erreichen und ich stellte mir daher die Frage, ob dieselbe nicht durch eine künstlich erzeugte, genau bekannte, stationäre, aber ungleichförmige Wärmevertheilung ersetzt werden könnte? Die anfängliche Vertheilung müsste sich, wenn der Stab sich selbst überlassen wird, schnell der Gleichförmigkeit nähern, sodass nach einiger Zeit die fernere Abkühlung sich nur verschwindend wenig von derjenigen unterscheiden würde, welche bei anfänglich gleichförmiger Erwärmung stattfindet.

Als anfängliche Wärmevertheilung soll nun diejenige genommen werden, welche erhalten wird, wenn die beiden Enden des Stabes bei einer Temperatur T und die Mitte bei einer Temperatur T_0 solange erhalten werden, bis der stationäre Zustand erreicht ist. Hierauf werden die drei Wärmequellen entfernt und der Stab sich selbst überlassen. Nach Ablauf einer gewissen Zeit, auf deren Berechnung es hier eben vor Allem ankommen soll, findet die fernere Abkühlung nach demselben Gesetze statt, das für den Fall der anfänglich gleichförmigen Erwärmung gilt.

Der Stab sei rund.

Es sei:

l die ganze Länge des Stabes, R der Radius des Querschnittes; $s = \pi R^2$; $p = 2\pi R$.

k der innere, h der äussere Wärmeleitungscoëfficient.

$$n^2 = \frac{p\,h}{s\,k} = \frac{2\,h}{R\,k}; \tag{1}$$

das specifische Gewicht des Stabes δ, die specifische Wärme c;

$$\bar{k} = \frac{k}{\delta c} \tag{2}$$

der sog. Temperaturleitungscoëfficient; x die Entfernung eines Querschnittes von der Stabmitte; es variirt als x von $-\frac{l}{2}$ bis $+\frac{l}{2}$; T die Temperatur an den beiden Stabenden und T_0 in der Stabmitte bei der anfänglichen Wärmevertheilung; alle Temperaturen sind als Ueberschüsse über die der umgebenden Luft anzusehen.

y_0 die anfängliche Temperatur in der Entfernung x von der Stabmitte; es ist für positive x:

$$y_0 = \frac{1}{1 - e^{nl}} \left\{ \left(Te^{n\frac{l}{2}} - T_0 e^{nl} \right) e^{-nx} + \left(T_0 - Te^{n\frac{l}{2}} \right) e^{nx} \right\} \tag{3}$$

und für $T = T_0$

$$y_0 = \frac{T}{1 + e^{n\frac{l}{2}}} \left\{ e^{n\left(\frac{l}{2} - x\right)} + e^{nx} \right\}. \tag{4}$$

Θ die Zeit von dem Momente an gerechnet, wo der Stab sich selbst überlassen wird;

y die variable Temperatur, als Function von Θ und x;

ϑ_0 der obenerwähnte Werth der Zeit Θ (nach deren Verlauf die anfängliche Ungleichförmigkeit als verschwunden zu betrachten ist) für $x = 0$;

ϑ_1 derselbe für

$$x = \pm \frac{l}{4} \text{ (Mitte der Stabhälfte)};$$

ϑ_2 derselbe für

$$x = \pm \frac{l}{8}.$$

T' die anfängliche Mitteltemperatur des Stabes, d. i. der Mittelwerth aller y_0; es ist

$$T' = \frac{4}{nl} \frac{e^{n\frac{l}{2}} - 1}{e^{n\frac{l}{2}} + 1} \cdot \frac{T + T_0}{2} \tag{5}$$

und

$$T' = \frac{4}{nl} \frac{e^{n\frac{l}{2}} - 1}{e^{n\frac{l}{2}} + 1} \cdot T \tag{6}$$

für $T = T_0$.

Zerlegen wir y_0 in eine Reihe von der Form

$$y_0 = \tfrac{1}{2} c_0 + \sum_{p=1}^{\infty} c_p \cos \frac{2\pi p}{l} x, \tag{7}$$

so gibt uns dieselbe die Werthe der Anfangstemperaturen für alle Punkte des Stabes von $x = -\frac{l}{2}$ bis $x = +\frac{l}{2}$.

Es ist

$$\tfrac{1}{2} c_0 = T' \tag{8a}$$

$$c_p = \frac{4nl}{4\pi^2 p^2 + n^2 l^2} \cdot \frac{e^{n\frac{l}{2}} + 1}{e^{n\frac{l}{2}} - 1} (T_0 - T) \tag{8b}$$

für $p = 1, 3, 5 \ldots\ldots$ und

$$c_p = \frac{4nl}{4\pi^2 p^2 + n^2 l^2} \cdot \frac{e^{n\frac{l}{2}} - 1}{e^{n\frac{l}{2}} + 1} (T_0 + T) \tag{8c}$$

für $p = 2, 4, 6 \ldots\ldots$

Die Temperatur y genügt der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = n^2 y + \frac{1}{\bar{k}} \frac{dy}{d\Theta} \tag{9}$$

und hieraus

$$y = e^{-n^2 \bar{k}\Theta} \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p e^{a_p^2 \bar{k}\Theta} \cos a_p x \tag{10}$$

Die Sinus-Reihe fällt weg, da y eine gerade Function von x sein muss. Für den Anfangszustand erhalten wir

$$y_0 = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p \cos a_p x \tag{11}$$

Durch Vergleich von (11) und (7) erhält man

$$\alpha_0 = \tfrac{1}{2} c_0; \; \alpha_p = c_p; \; a_p = \frac{2\pi p}{l}. \tag{12}$$

Dies in (10) eingesetzt, gibt, s. (5)

$$y = T' e^{-n^2\bar{k}\Theta} \left\{ 1 + 2n^2 l^2 \sum_{p=2,4,6\ldots} \frac{e^{-\frac{4\pi^2 \bar{k}}{l^2} p^2 \Theta}}{4\pi^2 p^2 + n^2 l^2} \cos \frac{2\pi p}{l} x + \right. \tag{13a}$$

$$\left. + 2n^2 l^2 \frac{T_0 - T}{T_0 + T} \left(\frac{e^{n\frac{l}{2}} + 1}{e^{n\frac{l}{2}} - 1} \right)^2 \sum_{p=1,3,5\ldots} \frac{e^{-\frac{4\pi^2 k}{l} p^2 \Theta}}{4\pi^2 p^2 + n^2 l^2} \cos \frac{2\pi p}{l} x \right\}$$

und für $T = T_0$:

$$y = T\, e^{-n^2 \bar{k} \Theta} \left\{ 1 + 2n^2 l^2 \sum_{p=2,4,6..} \frac{e^{-\frac{4\pi^2 \bar{k}}{l^2} p^2 \Theta}}{4\pi^2 p^2 + n^2 l^2} \cos \frac{2\pi p}{l} x \right\}. \quad (13b$$

Mit Hilfe der Formeln

$$\sum_{p=1,3,5..} \frac{1}{p^2 + k^2} = \frac{\pi}{4k} \cdot \frac{e^{\pi k} - 1}{e^{\pi k} + 1}$$

$$\sum_{p=2,4,6..} \frac{1}{p^2 + k^2} = \frac{\pi}{4k} \cdot \frac{e^{\pi k} + 1}{e^{\pi k} - 1} - \frac{1}{2k^2}$$

kann man leicht verificiren, dass bei $\Theta = o$ und $x = o$ . . . . . . $y = T_0$ und bei $x = \pm \frac{l}{2}$ . . . . $y = T$ erhalten wird.

Für $x = \frac{l}{4}$ (Mitte der Stabhälften) verschwindet die zweite Summe in (13a); für die betreffenden Querschnitte ist also y die gleiche Function von Θ sowohl wenn $T = T_0$, als wenn T nicht gleich T_0 ist. Es findet sogar völlige Identität statt, wenn im letzteren Falle $\frac{T + T_0}{2}$ gleich dem T im ersteren ist.

Man sieht ohne Weiteres, dass die Formeln (13 a) und (13 b) unter der stillschweigenden Voraussetzung entwickelt wurden, das der Stab nach beiden Seiten unendlich lang sei und aus unendlich vielen gleichen Theilen bestehe, deren Länge l ist und in deren jedem die anfängliche Wärmevertheilung durch die Function (3) ausgedrückt ist, wo x jedesmal die Entfernung von der Mitte des betreffenden Theiles bedeutet. Zwischen den einzelnen Theilen kann offenbar kein Wärmeaustausch stattfinden.

Bei experimenteller Anwendung der obigen Formeln für Stäbe von endlicher Länge, kann man die Berücksichtigung der Endflächen umgehen, indem man den Stab um etwa soviel verlängert denkt, dass die „cylindrische Oberfläche um den Inhalt der Endfläche vergrössert wird und die neue Endfläche der verlängerten Stange als für die Wärme undurchdringlich angenommen wird“ (L. Lorenz Wied. Ann. XIII, 1881, S. 593).

Die Gl. (13) zeigen, dass für genügend grosse $\Theta = \vartheta$ das Gesetz der weiteren Abwechslung durch

$$y = T' e^{-n^2 \bar{k} \Theta} \quad (14$$

dargestellt werden kann, also ebenso, als wäre der ganze Stab ursprünglich bis zu der mittleren Temperatur T' erwärmt worden

Man kann nun ϑ auf zweierlei Weise bestimmen: entweder als denjenigen Werth von Θ, für welchen die Summen in (13) kleine Zahlen darstellen, welche man gegen die Einheit vernachlässigen kann, oder als denjenigen Werth von Θ, für welchen die zu (14) hinzutretenden Glieder (mit dem Factor vor den Klammern), absolut genommen, kleine Temperaturen α bedeuten, welche an der Grenze der Beobachtungsfehler bei den Abkühlungsversuchen liegen. Wir benutzen den zweiten Weg und werden bei Ausrechnung von Zahlenbeispielen

$$\alpha = 0{,}1^0 \tag{15}$$

setzen.

Die Reihen in (13) convergiren äusserst schnell (wegen p^2 im Zähler des Exponenten) und man überzeugt sich leicht, dass es genügt, die Bedingungen aufzusuchen, unter welchen das erste Glied der Reihe genügend klein wird; die Summe der übrigen Glieder ist dann völlig verschwindend.

Für die gesuchte Zeit ϑ erhalten wir nun aus (13), wenn noch für T' sein Werth (5) eingesetzt wird, die folgenden Gleichungen:

I. Es sei $T = T_0$; (13 b) gibt

1. für die Stabmitte $(x = o)$:

$$\frac{8\,n\,l\,T}{16\,\pi^2 + n^2 l^2}\left(\frac{e^{\frac{nl}{2}} - 1}{e^{\frac{nl}{2}} + 1}\right) e^{-\left(n^2 + \frac{16\,\pi^2}{l^2}\right)\bar{k}\,\vartheta_0} = \alpha; \tag{16a}$$

2. für die Mitte der Stabhälften

$$\left(x = \pm\,\frac{l}{4}\right)$$

dieselbe Gleichung, also

$$\vartheta_1 = \vartheta_0; \tag{16 b}$$

3. für die Querschnitte

$$x = \pm\,\frac{l}{8}$$

$$\frac{8\,n\,l\,T}{16\,\pi^2 + n^2 l^2}\left(\frac{e^{\frac{nl}{2}} - 1}{e^{\frac{nl}{2}} + 1}\right) e^{-\left(n^2 + \frac{64\,\pi^2}{l^2}\right)\bar{k}\,\vartheta_2} = \alpha. \tag{16c}$$

Offenbar muss ϑ_2 bedeutend kleiner sein als $\vartheta_1 = \vartheta_0$; die Reihe (13b) enthält $\left(\text{für } x = \frac{l}{8}\right)$ nur Glieder, für welche p von der Form $p = 4\,m$ ist; das erste Glied der Summe ist also gleich Null.

II. Es seien T und T_0 verschieden;

1. für die Stabmitte gibt das Glied in (13 a), für welches $p = 1$ ist:

$$\frac{4nl(T_0-T)}{4\pi^2+n^2l^2}\left(\frac{e^{\frac{nl}{2}}+1}{e^{\frac{nl}{2}}-1}\right)e^{-\left(n^2+\frac{4\pi^2}{l^2}\right)k\vartheta_0'}=\alpha. \tag{17a}$$

Sollte T_0-T sehr klein sein, so müsste ϑ_0 aus (16a) ausgerechnet werden;

2. für die Mitte der Stabhälften verschwinden alle Glieder der zweiten Reihe in (13a) und es bleibt

$$\frac{4nl(T_0+T)}{16\pi^2+n^2l^2}\left(\frac{e^{\frac{nl}{2}}-1}{e^{\frac{nl}{2}}+1}\right)e^{-\left(n^2+\frac{16\pi^2}{l^2}\right)k\vartheta_1'}=\alpha. \tag{17b}$$

Wie oben erwähnt, ist die Ungleichheit von T und T_0 an den Querschnitten $x=\pm\frac{l}{4}$ ohne Einfluss; (17b und 16a) werden identisch, wenn $\frac{T_0+T}{2}$ in (17b) gleich dem T in (16a) gesetzt wird. In diesem Falle ist also

$$\vartheta_1'=\vartheta_1=\vartheta_0. \tag{17c}$$

Zahlenbeispiele.

Die obigen Rechnungen sind von mir durchgeführt worden, da ich beabsichtigte, für eine Reihe von Metallstäben die Abhängigkeit der Grösse h von der Temperatur zu studiren. Es erwies sich später, dass der dabei verfolgte Zweck, Bestimmung von k als Function der Temperatur (die Arbeit wird demnächst veröffentlicht), auf andere Weise sich erreichen lässt; daher habe ich nur wenige Rechnungen und Versuche ausgeführt, die sich auf die obigen Formeln beziehen.

Für die benutzten Stäbe war

$$l=650\text{ mm},\ R=12{,}5\text{ mm}-12{,}9\text{ mm}. \tag{18a}$$

Die Grössen $n\frac{l}{2}$ und $\frac{h}{k}$ wurden gefunden, indem nur die Stabenden in Dämpfen von kochendem Anilin bis rund

$$T=160^0 \tag{18b}$$

(Ueberschuss über die Temperatur der Luft) erwärmt wurden und nach erreichtem stationären Temperaturzustand die Temperatur t der Stabmitte bestimmt wurde. Es ist dann

$$\left.\begin{aligned}\frac{nl}{2}&=lg\frac{T+\sqrt{T^2-t^2}}{t}\\ \frac{h}{k}&=\frac{2R}{l^2}\left[lg\frac{T+\sqrt{T^2-t^2}}{t}\right]^2\end{aligned}\right\}. \tag{19}$$

Durch Beobachtung der Abkühlung des Stabes, dessen Enden und Mitte bis 160° erwärmt waren (nach Entfernung der drei Wärmequellen und Ablauf der Zeit ϑ), wurde $\frac{h}{\delta c}$ bestimmt und so $\bar{k}$ gefunden. Ich begnüge mich mit diesen Andeutungen, da es sich hier doch jedenfalls nur um eine ganz rohe Eruirung der Zeit ϑ handeln kann. Auch sollen hier nur die für den Kupferstab giltigen Zahlen ausgegeben werden.

Kupferstab. Länge $l = 650$ mm, Radius des Querschnittes $R = 12{,}9$ mm; Formel (19) ergab

$$n\frac{l}{2} = 0{,}9201;$$

ferner wurde $\bar{k} = 54{,}57$ gefunden.

1. Es sei $T = T_0 = 160°$.

Setzen wir in (16) und (17) für α den Werth (15) $\alpha = 0{,}1°$, so ergibt (16a) und (16b) für

$$x = o \text{ und } x = \pm\frac{l}{4}$$

$$\vartheta_0 = \vartheta_1 = 3{,}3 \text{ Minuten.} \qquad (20$$

Also 3,3 Minuten nachdem die Erwärmung der drei Punkte des Kupferstabes aufgehört hat, findet die fernere Abkühlung in der Mitte und bei $x = \pm\frac{l}{4}$ nach demselben Gesetze statt, wie wenn der Stab ursprünglich seiner ganzen Länge nach gleichförmig erwärmt gewesen wäre.

Für $x = +\frac{l}{8}$ erhalten wir aus (16c)

$$\vartheta_2 = 50 \text{ Secunden.} \qquad (21$$

An den beiden Querschnitten $x = \pm\frac{l}{8}$ kann man also bereits nach 50 Sec. die Wirkung der ungleichförmigen Temperaturvertheilung als erloschen betrachten.

2) T und T_0 seien verschieden, aber $\frac{T + T_0}{2} = 160°$.

In der Stabmitte ($x = o$) erhält man nach (17a) für ϑ_0 erstaunlich grosse Werthe, wenn $T_0 - T$ nicht ganz klein angenommen wird.

Es ist

$T_0 - T$	ϑ_0'
20°	13,2 Min.
10°	10,9 „
5°	9,0 „
2°	6,1 „
1°	4,2 „
0,5°	2,1 „

Diese Zahlen zeigen, dass wenn man die Abkühlung in der Mitte des Stabes beobachten will, durchaus $T = T_0$ genommen werden muss.

Für $x = \pm \frac{l}{4}$ erhält man, nach (17c) und (20)

$$\vartheta_1' = 3{,}3 \text{ Minuten.}$$

Man sieht hieraus, dass man die Abkühlung des Stabes bei einem Querschnitte $x = \pm \frac{l}{4}$ beobachten muss, wenn man der Bedingung $T_0 = T$ nicht genügen kann.

Am weitaus günstigsten ist es aber, $T = T_0$ zu machen und bei $x = \pm \frac{l}{8}$ zu beobachten, wie (21) zeigt.

Hat der Stab eine geringere Wärmeleitung k, so findet die innere Wärmegleichung langsamer statt; die ϑ werden also grösser. Uebrigens werden die h für alle Stäbe die gleichen, wenn ihre Oberflächen mit dem gleichen Stoffe überdeckt sind. Dann genügt es, h an demjenigen Stabe zu studiren, welcher die grösste Wärmeleitung k hat und für welchen die Zeiten ϑ die kleinsten Werthe besitzen.

St. Petersburg, den 28. December 1889.

Ueber den elektrischen Widerstand von Isolatoren bei höherer Temperatur[1]).

Von

Dr. Hugo Koller.

Vorliegende Untersuchung bildet eine Fortsetzung jener „Ueber den Durchgang von Elektricität durch sehr schlechte Leiter“[2]). Ihr Zweck ist die Bestimmung der Widerstandsänderungen einiger Isolatoren mit der Temperatur.

I.

Bei der Widerstandsmessung kam die in obiger Abhandlung beschriebene elektrometrische Methode in Anwendung. Die zu untersuchende Flüssigkeit wurde mit vollkommen installirten Elektroden auf dem Sandbade erwärmt und ihr Widerstand während des langsamen Auskühlens bestimmt. Die Temperatur wurde durch ein Thermometer von geringer Trägheit gemessen, das in möglichster Nähe der durchströmten Schichte angebracht war. Die metallischen Elektroden sicherten eine gleichmässige Temperatur der zwischen ihnen befindlichen dünnen Flüssigkeitsschichte.

Eine Unsicherheit haftet diesen Versuchen allerdings dadurch an, dass nach früher gemachten Erfahrungen der scheinbare Widerstand unvollkommener Diëlektrica mit der Durchströmungsdauer zunimmt. Da nun nur dann gut untereinander vergleichbare Resultate erhalten werden konnten, wenn der Batteriestrom ununterbrochen den Condensator durchfloss, so sind die späteren Messungen nicht nur mit einer kälteren, sondern auch mit einer länger durchströmten Substanz vorgenommen. Um den Einfluss dieser Fehlerquelle zu verringern, wurden nur solche Proben verwendet, welche schon vor der Erwärmung lange durchströmt waren und dadurch annähernd das Maximum ihres Widerstandes erreicht hatten. Einen Beweis, dass dieser Zustand eingetreten war, liefert in vielen Fällen der Umstand, dass die Substanz nach der Erwärmung einen Widerstand zeigte, der nur unbedeutend von dem bei derselben Temperatur vor der Erwärmung beobachteten abweicht.

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Wiener Ber., Bd. 98 S. 894 (1889).

2) Wiener Ber., Bd. 48 IIa S. 200 und dieses Rep. Bd. 26 S. 7.

In anderen Fällen schien aber die Erwärmung die Constitution der Flüssigkeit ein wenig zu ändern, so dass die vor und nach der Erwärmung erhaltenen Resultate nicht strenge untereinander vergleichbar sind. Endlich wurden zur Controle noch einige Versuchsreihen mit ganz frischer Substanz in der Weise angestellt, dass der Strom nur zu jeder Messung eine bestimmte gleich lange Zeit geschlossen blieb. Der Verlauf der nach beiden Methoden gewonnenen Temperaturcurve stimmte gut überein.

Der Widerstand aller untersuchten flüssigen unvollkommenen Diëlektrica nimmt mit der Temperatur sehr rasch ab — wir haben es demnach mit elektrolytischer Leitung zu thun — und zwar sind die Widerstandsänderungen bei jenen Substanzen am bedeutendsten, deren Zähigkeit ebenfalls mit der Temperatur stark abnimmt. Da nun diese zwei Grössen bei meinen Versuchen in weiteren Grenzen variirten, als bei irgend welchen bisher untersuchten Elektrolyten, so boten sie ein günstiges Object zur Entscheidung der Frage, inwieweit elektrolytische Leitungsfähigkeit und Fluidität proportionale oder nur parallele Erscheinungen sind.

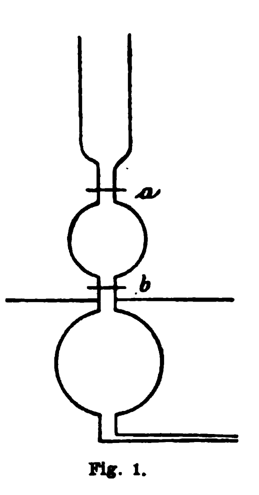


Fig. 1.

Zur Bestimmung der Fluidität diente das Poiseuille'sche Verfahren der Ausflussgeschwindigkeit aus Capillaren. An ein Glasrohr wurden zwei Kugeln geblasen, das untere Ende desselben in eine Capillare ausgezogen und rechtwinkelig umgebogen (Fig. 1). Ober- und unterhalb der oberen Kugel waren Marken angebracht. Das Röhrchen wurde nun durch ein Stativ so in der Flüssigkeit fixirt, dass die für die Ausflussgeschwindigkeit maassgebende Capillare parallel und in gleiche Höhe mit der zwischen den Condensatorplatten befindlichen Flüssigkeitsschichte zu liegen kam. Es tauchte dann so tief in die Flüssigkeit, das die untere Marke nur wenig ihr Niveau überragte.

Der Versuch wurde in der Weise angestellt, dass man durch einen Kautschukschlauch Flüssigkeit ansog, bis sie über die obere Marke zu stehen kam und die Zeit bestimmte, welche das Flüssigkeitsniveau brauchte, um von der oberen bis zur unteren Marke zu sinken. Die untere Kugel war stets grösser als die obere, so dass nur die in ihr enthaltene Flüssigkeitsmenge ausfloss und die durch das Herausheben über das Niveau vielleicht abgekühlte Flüssigkeit die Capillare nicht mehr passirte.

Nach Poiseuille ist unter sonst ganz gleichbleibenden Bedingungen die Zähigkeit der Ausflusszeit direct proportional. Es genügt daher,

da es mir nicht auf absolute Werthe ankam, sondern nur auf das Verhältnis der Zähigkeit ein und derselben Substanz bei verschiedenen Temperaturen, die Bestimmung dieser einzigen Grösse. Die Dimensionen der Capillare kamen nicht in Betracht.

Die Versuche lehren, dass bei allen Substanzen die Leitungsfähigkeit viel rascher mit der Temperatur wächst, als die Fluidität. Die Curven, welche die Veränderungen dieser Eigenschaften mit der Temperatur darstellen, zeigen im ganzen allerdings einen analogen Verlauf, fallen aber nie zusammen, so dass sich vollständig G. Wiedemann's[1]) Ansicht bestätigt, dass wir hier einander verwandte, aber nicht proportionale Eigenschaften vor uns haben. Die Nichtübereinstimmung tritt am klarsten bei sehr leichtflüssigen Substanzen hervor, deren Fluidität sich mit der Temperatur nur wenig ändert.

II.

Die folgenden Tabellen enthalten die gewonnenen Resultate, welche auch in den beigeschlossenen Tafeln graphisch dargestellt sind. In diesen entspricht die Abscisse der Temperatur, die Ordinate der einen Curve dem Widerstande, jene der zweiten der Zähigkeit der Flüssigkeit.

Zur Abkürzung sei:

d = Elektrodendistanz,
E = elektromotorische Kraft des durchfliessenden Stromes,
Sp. W. = specifischer Widerstand,
T = Ausflusszeit.

1. Rectificirtes Petroleum. (Fig. 2.)[2])

$d = 1{,}53$ mm $E = 4$ D.

Fig. 2.

t	Sp. W.	t	T
65°	$62 \cdot 10^{14}$ S. E.	64°	41"
50	212	57	43
47	252	49	45
41	356	41	48
32,6	516	31	52
24	752	24	55

Vor der Erwärmung:
Sp. W. = $179 \cdot 10^{15}$ S. E. $t = 17°$.

1) G. Wiedemann, Lehrbuch, Bd. 2. S. 946.
2) ••• bezeichnet die Curve des Widerstandes.
••• „ „ „ der Zähigkeit.

2. Terpentinöl.

$d = 0{,}885$ mm $\qquad E = 1$ D.

t	Sp. W.
94°	$242 \cdot 10^{13}$ S.E.
88	273
72	571
67	600
46	$198 \cdot 10^{14}$ S.E.
36	326
29	412
25	523
21	688

Vor der Erwärmung:

Sp. W. $= 851 \cdot 10^{14}$ S. E. $\qquad t = 17°$.

Leider fehlen die Resultate über die Fluidität des Terpentinöles, da im Verlaufe der Versuche das Capillarröhrchen brach.

3. Leinöl (warm gepresst). (Fig. 3.)

$d = 3{,}015$ mm $\qquad E = 1$ D.

t	Sp. W.	t	T
117°	$156 \cdot 10^{11}$ S. E.	117°	5°
100	305	94	5,5
84	434	81	6,5
64	758	62	8
55	1001	53	9,5
44	1476	44	12
26,4	3050	26,4	18

Vor der Erwärmung:

Sp. W. $= 309 \cdot 10^{13}$ S. E. $\qquad t = 24°$.

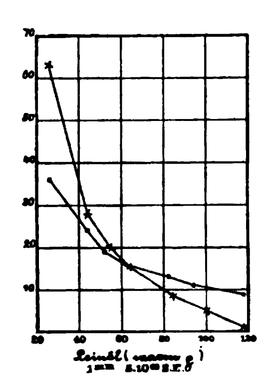


Fig. 3.

4. Leinöl (kalt gepresst). (Fig. 4.)

$d = 3{,}015$ mm $E = 1$ D.

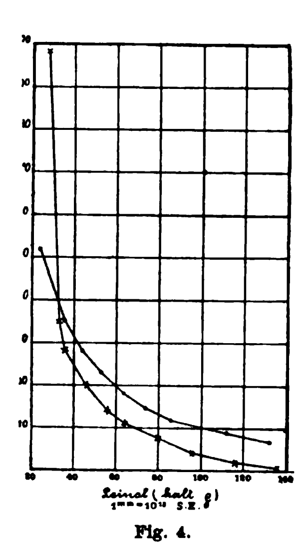


Fig. 4.

t	Sp. W.	t	T
135°	$94 \cdot 10^{12}$ S. E.	132°	15°
117	201	113	18
96	431	86	24
79	738	75	29
65	1067	63	37
57	$133 \cdot 10^{13}$ S. E.	54	45
46	204	45	57
38	276	37	70
33	351	32	82
24,4	983	24,4	105

Vor der Erwärmung:

Sp. W. $= 980 \cdot 10^{13}$ S. E. $t = 24{,}8°$.

5. Ricinusöl. (Fig. 5.)

$d = 1{,}53$ mm $E = 1$ D.

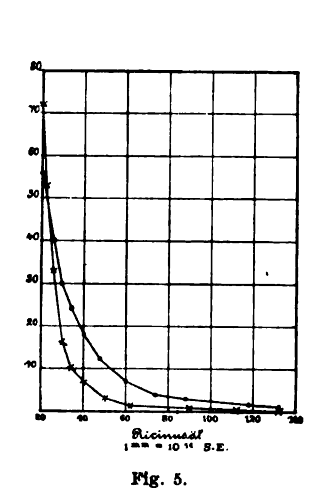


Fig. 5.

t	Sp. W.	t	T
132°	$20{,}7 \cdot 12^{12}$ S. E.	131°	6° 5
112	21,8	106	8
103	25,6	98	10
90	35,1	88	13
78	67,4	75	19
63	155	61	34
49	346	47	60
41	717	39	90
35	970	34	119
30	1650	29,5	148
25,4	$328 \cdot 10^{13}$ S. E.	25,2	202
20	718	20	280

Vor der Erwärmung:

Sp. W. $= 321 \cdot 10^{13}$ S. E. $t = 24{,}6°$.

6. Mandelöl. (Fig. 6.)

$d = 3{,}015$ mm $E = 1$ D.

t	Sp. W.	t	T
128°	$192 \cdot 10^{13}$ S. E.	128°	11"
110	230	106	13
77	720	74	21
62	$107 \cdot 10^{14}$ S. E.	64	27
38	266	45	47
29	498	37	63
		28	90

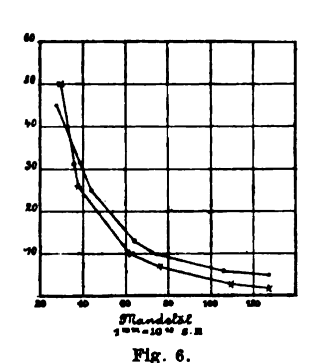


Fig. 6.

Vor der Erwärmung:

Sp. W. $= 443 \cdot 10^{14}$ S. E. $t = 24^0$.

7. Olivenöl. (Fig. 7).

$d = 1{,}53$ mm $E = 1$ D.

t	Sp. W.	t	T
124°	$53 \cdot 10^{14}$ S. E.	121°	6"
106	82	104	7,5
92	127	89	10
79	178	78	12
66	307	65	16
59	375	57,5	19
53	509	51	22
44	769	44	28
36	$109 \cdot 10^{15}$ S. E.	36	35
26	278	28	48
		26	53

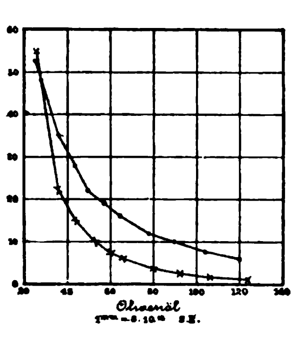


Fig. 7.

Vor der Erwärmung:

Sp. W. $= 127 \cdot 10^{15}$ S. E. $t = 24{,}4^0$.

8. Benzol. (Fig. 8).

Benzol verhielt sich anders als die bisher untersuchten Substanzen. Sein scheinbarer Widerstand nimmt bei der Abkühlung bis zu einer

gewissen Temperatur zu, dann aber wieder ab. Ich glaube nicht, dass diesem Verhalten eine principielle Bedeutung zukommt, vielmehr, dass es auf einer unbekannten, während des Versuches auftretenden Störung beruht (vielleicht auf der in meiner erwähnten Abhandlung beschriebenen Deformation). Dessenungeachtet theile ich die gewonnenen Resultate mit, weil sie zeigen, in wie weiten Grenzen der specifische Widerstand variiren kann, ohne nennenswerthe Aenderung der Fluidität.

$d = 0{,}875$ mm $E = 4$ D.

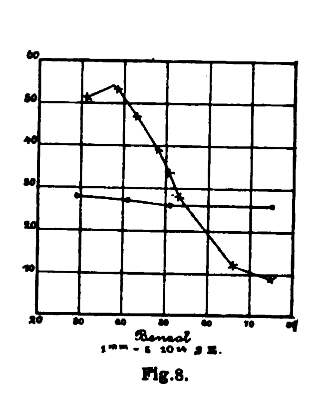


Fig. 8.

t	Sp. W.	t	T
75°	$45 \cdot 10^{14}$ S. E.	75°	13°
66	61		
53	140	51	13
50,5	167		
48	196		
43	234	41	13,5
38	267		
31	252	29	14

Vor der Erwärmung:

Sp. W. $= 141 \cdot 10^{15}$ S. E. $t = 24°$.

9. Toluol. (Fig. 9.)

$d = 3{,}015$ mm $E = 2$ D.



Fig. 9.

t	Sp. W.	t	T
106°	$164 \cdot 10^{13}$ S. E.	107°	10°5
95,5	208	94	11
84	274	81	11,5
64	379	70	12
45	595	44	13
38	720	32	14
31	880	26	14,5
26	1017		

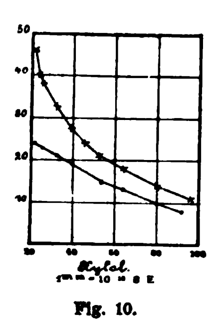
Vor der Erwärmung:

Sp. W. $= 189 \cdot 10^{13}$ $t = 22°$.

10. Xylol. (Fig. 10.)

$d = 3{,}015$ mm $E = 1$ D.

t	Sp. W.	t	T
96°	109 · 10^{12} S. E.	91°	8°5
80	140	79	10
65	178	64	13
54	215	54	15
46	245	40	19
39	281	33	21
33	323	26	23
26	379	23	24
24	401		
22	468		


Fig. 10.

Vor der Erwärmung:

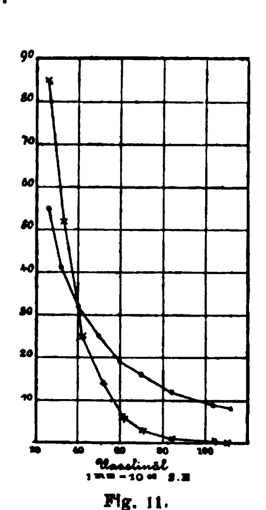
Sp. W. = 821 · 10^{12} S. E. $t = 20°$.

Hier hat sich also der Widerstand durch die Erwärmung sehr stark verringert.

11. Vaselinöl. (Fig. 11.)

$d = 1{,}53$ mm $E = 4$ D.

t	Sp. W.	t	T
115°	42,8 · 10^{14} S. E.	116°	8°
103	84,4	105	9
85	315	84	12
71	693	70	16
62	1580	60	19
51	284 · 10^{15} S. E.	50	25
41,4	500	40	32
33	1040	33	41
26	1700	26	55


Fig. 11.

Vor der Erwärmung:

Sp. W. = 210 · 10^{16} S. E. $t = 24°$ $E = 8$ D.

12. Leicht schmelzbares Sodaglas.

$d = 0{,}86$ mm $E = 1$ D.

t	Sp. W.
55°	$254 \cdot 10^{14}$ S. E.
51	426
44	790
36	1980
29	$364 \cdot 10^{15}$ S. E.
27	471
24	736

Vor der Erwärmung:

Sp. W. $= 75 \cdot 10^{16}$ S. E. $t = 23°$.

III.

In der eingangs erwähnten Abhandlung habe ich gezeigt, dass die scheinbare Leitung in unvollkommenen Diëlektricis nicht das Ohm'sche Gesetz befolgt, dass ferner die beobachteten Unregelmässigkeiten enge mit der Rückstandsbildung verknüpft sind. Wenn nun auch über die Art dieses Zusammenhanges noch sehr wenig bekannt ist, so wird man doch sicher annehmen können, dass der Vorgang in einem unvollkommenen Diëlektricum sich umsomehr wahrer Leitung nähert, je geringer die Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze sind.

Die scheinbare Leitungsfähigkeit unvollkommener Diëlektrica wächst rasch mit der Temperaturerhöhung. Es lag daher nahe, zu untersuchen, ob mit dieser Zunahme der Leitungsfähigkeit nicht auch eine allmähliche Zustandsänderung des Diëlektricums einhergeht, so dass dieses einem Leiter ähnlicher wird, d. h. ob nicht bei höheren Temperaturen die Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze kleiner sind als bei niederen.

Diese Abweichungen sind, wie erwähnt, mehrfacher Art, bei höherer Temperatur lassen sich aber nur jene leicht bestimmen, welche mit der Variation der elektromotorischen Kraft auftreten. Zu dem Zwecke wurde der Flüssigkeitscondensator in einem Wärmekasten durch längere Zeit auf der gewünschten Temperatur erhalten und während derselben die Messungen vorgenommen. Die Temperaturschwankungen im Verlaufe einer Messungsreihe erreichten keinen Viertelgrad.

Die folgenden Tabellen zeigen die gewonnenen Resultate, und zwar sind die zum Vergleiche daneben gestellten Messungen bei 24° unmittelbar vor der Erwärmung vorgenommen. Man sieht sehr deutlich,

dass bei höherer Temperatur eine Annäherung an das Ohm'sche Gesetz eintritt [1]).

1. Petroleumäther.

$d = 1{,}135$ mm 1 Dan. = 312 Theilstriche.

E	$t = 24^0$		$t = 60^0$	
	i	i/E	i	i/E
1	12	12	12	12
2	15	7,5	23	11,5
4	19	4,8	43	10,8
8	26	3,25	63	7,9

Es wird auffallen, dass die scheinbare Leitungsfähigkeit des Petroleumäthers für einen Strom von der elektromotorischen Kraft eines Daniell trotz der Erwärmung nicht zunimmt; sie ist bei 24^0 und bei 60^0 genau derselben Zahl 12 proportional. Dies rührt daher, dass durch die langsame und lange dauernde Erwärmung sich die Substanz veränderte, indem die flüchtigsten Bestandtheile des Petroleumäthers verdampften und ein schlechter leitendes Product zurückliessen. Infolge dessen zeigte auch die Probe, nachdem sie zur Zimmertemperatur zurückgekehrt war, viel schlechtere Leitungsfähigkeit, als vor der Erwärmung, aber auch dann waren die Abweichungen vom Ohm'schen Gesetze grösser als bei 60^0, wie aus den folgenden, nach der Auskühlung angestellten Messungen erhellt:

$d = 1{,}135$ mm 1 Dan. = 312 Theilstriche $t = 27^0$.

Der Vergleichswiderstand ist 82 mal grösser als in der vorigen Tabelle.

E	i	i/E
1	39	39
2	51	25,5
4	65	16,2
8	105	13,1

1) Die Bezeichnung ist dieselbe wie in der citirten Abhandlung: E bedeutet die elektromotorische Kraft des verwendeten Stromes, i die Stromstärke in einem freien Maasse; i/E ist der scheinbaren Leitungsfähigkeit proportional.

Ganz analoge Resultate gab Terpentinöl:

2. Terpentinöl.

$d = 0{,}145$ mm 1 Dan. = 312 Theilstriche.

E	$t = 24$ $W = 1022 \cdot 10^8$ S. E.		$t = 88°$ $W = 276 \cdot 10^8$ S. E.	
	i	i/E	i	i/E
1	11,6	11,6	55	55
2	19	9,5	106	53
4	29	7,25	198	49,5
8	41	5,1	364	45,5

Nach der Abkühlung war der scheinbare Widerstand des Terpentinöls wieder auf seinen ursprünglichen Werth zurückgegangen und zeigte genau die vor der Erwärmung beobachteten Abweichungen von Ohm's Gesetze.

Die Stellung eines unvollkommenen Diëlektricums zwischen idealem Diëlektricum und Leiter ist nicht durch die Stärke der Rückstandsbildung, sondern durch die Art derselben charakterisirt. Es folgt dies schon daraus, dass bei den extremen Vorgängen — reiner diëlektrischer Verschiebung und wahrer Leitung — Rückstandsbildung in gleicher Weise ausgeschlossen ist, während sie in allen Übergangsstufen auftritt. Je rascher sie verläuft, desto ähnlicher ist die Substanz einem Diëlektricum, je langsamer, desto näher steht sie einem Leiter. Wir haben nun im vorigen Abschnitte an einer Erscheinung kennen gelernt, dass unvollkommene Diëlektrica durch Erwärmung in leiterähnlichere Zustände übergeführt werden, es handelt sich nun darum, diese Umwandlung auch an der Art der Rückstandsbildung nachzuweisen. Verläuft diese bei niederer Temperatur sehr rasch, so muss sie bei höheren langsamer vor sich gehen, d. h. die allmählich sich entwickelnden Rückstände, welche fester an dem Diëlektricum haften, müssen vermehrt sein.

Ich selbst unternahm keine Rückstandsbestimmungen bei höherer Temperatur, doch ist dieser Vorgang in ausgezeichneter Weise von Hopkinson verfolgt worden[1]):

Schweres Flintglas ist bei Zimmertemperatur vielleicht der vollkommenste feste Isolator, sein Rückstand ist ungemein rasch entwickelt und wird ebenso leicht selbst durch eine kurze Entladung entfernt.

1) Hopkinson, Phil. Trans. of the Royal Society of London, vol. 167, 1877.

Die dann noch zu Tage tretenden Rückstände sind verschwindend klein. Diese Verhältnisse ändern sich aber bedeutend mit der Temperaturerhöhung. Die nach einmaliger Entladung noch zu Tage tretenden Rückstände — das sind eben die fester an dem Diëlektricum haftenden — nehmen fortwährend zu, so dass bei 172° Flintglas mit den am stärksten Rückstand bildenden Gläsern in gleiche Reihe gestellt werden kann. Wir können hier genau die durch Rückstandsbildung vermittelte Entstehung der Leitung verfolgen, welche durch weitere Erwärmung herbeigeführt werden müsste.

Bei wahrer Leitung findet nun ebenso wenig Rückstandsansammlund statt, als bei reiner diëlektrischer Verschiebung, wenn man unter Rückstand jenen labilen, aber doch einige Zeit bestehenden Zustand versteht, aus welchem ein Uebergang sowohl in diëlektrische Verschiebung als auch in Wärme möglich ist. Bei wahrer Leitung wird eben die primäre diëlektrische Verschiebung in unendlich kurzer Zeit in Wärme umgewandelt, ohne dass die Uebergangsstadien nachweisbar wären. Nähert sich deshalb ein unvollkommenes Diëlektricum einem Leiter, so müssen allmählich die nachweisbaren Rückstandsmengen abnehmen; und dies ist wirklich der Fall: Bei einem von Hopkinson untersuchten Sodacalciumglase nahm die nachweisbare Rückstandsmenge bis zu einer zwischen 7½ und 20½° liegenden Temperatur zu, bei weiterer Erwärmung aber wieder ab, obwohl die scheinbare Leitungsfähigkeit des Glases continuirlich wächst. Diese Beobachtung beweist, dass ein Maximum der nachweisbaren Rückstandsmenge derselben Substanz bei verschiedenen Temperaturen besteht[1]).

Fassen wir die Resultate, welche bei Beobachtung der Umwandlung eines unvollkommenen Diëlektricums in einen Leiter durch Temperaturerhöhung gewonnen wurden, zusammen, so finden wir:

1. Die wahre Leitungsfähigkeit des unvollkommenen Diëlektricums wächst constant.

2. Der Verlauf der Rückstandsbildung, welcher bei niederer Temperatur sehr kurz ist, erstreckt sich bei höherer Temperatur auf ein immer grösseres Zeitintervall. Die Zunahme der Rückstandsbildung tritt besonders deutlich in den späteren Perioden der Durchströmung hervor.

3. Die nachweisbare Rückstandsmenge, d. i. jene, welche weder an einer kurz dauernden Entladung Theil nimmt, noch auch schon der Wärme so ähnlich ist, dass sie nicht mehr in diëlektrische Ver-

1) Hopkinson's Messungen beziehen sich auf das Potential des wieder zu Tage getretenen Rückstandes, sie liefern daher kein directes Mass der Rückstandsmenge, sind aber unter einander recht gut vergleichbar. Am Übersichtlichsten sind die Resultate bei dem stark Rückstand bildenden Glase Nr. 2, die ich deshalb hier

schiebung umsetzen kann, nimmt mit der Erwärmung zu von annähernd Null bis zu einem Maximum. Sie nimmt weiterhin ab, und ihr gänzliches Verschwinden entspricht dem Eintritte vollkommener Leitung.

Was den Zusammenhang der Fluidität und Leitungsfähigkeit derselben Substanz bei verschiedenen Temperaturen betrifft, so ergibt sich, dass diese beiden Eigenschaften zwar parallelen, aber nie proportionalen Verlauf zeigen. Immer wächst die Leitungsfähigkeit viel rascher als die Fluidität. Allerdings zeigt die Leitungsfähigkeit jener Substanzen die stärkste Zunahme, deren Fluidität ebenfalls durch die Temperaturerhöhung die bedeutendsten Veränderungen erleidet.

---

anschliesse. In der ersten Colonne stehen die Temperaturen, in der zweiten die Ladungsdauer, in der dritten die nach kurz dauernden Entladungen successive wieder zu Tage tretenden Rückstände, in der vierten die Zeiten, während welcher man den Rückstand zu Tage treten liess.

41°	20ˢ	50	in 4ˢ
		28	„ „
		18	„ „
35	34	115	in 10ˢ
		67	„ „
		46	„ „
		29	„ „
28	33	140	in 10ˢ
		77	„ „
		53	„ „
		34	„ „
20½	30	150	in 10ˢ
		81	„ „
		55	„ „
		33	„ „
7¼	29	250	in 20ˢ
		160	„ „
		110	„ „
		66	„ „
—1¼	33	180	in 20ˢ
		115	„ „
		83	„ „
		56	„ „
—3	30	176	in 20ˢ
		80	„ „
		53	„ „

Man sieht deutlich, dass sich zwischen 7¼ und 20½° ein Maximum der nachweisbaren Rückstandsbildung befindet.

Berichtigung zur Abhandlung: „Ueber den Durchgang von Elektricität durch sehr schlechte Leiter“ von Hugo Koller. S. 39 Anm. liess: „Pogg. Ann. Bd. 125, S. 137, 1864“ statt „Pogg. Ann. Bd. 114, S. 137, 1861“.

Bestimmungen für die Prüfung von Thermometern bei der Grossh. Sächs. Prüfungsanstalt für Thermometer zu Ilmenau.

§ 1.

Zweck der Prüfung.

Die Prüfung hat den Zweck, die Richtigkeit der zeitigen Angaben der Thermometer zu bescheinigen.

§ 2.

Zulassung.

Zur Prüfung zugelassen sind mit Quecksilber gefüllte Thermometer aus Glas.

Die Prüfung erfolgt bis auf weiteres nur in Temperaturen von 0 bis einschliesslich + 50° der hunderttheiligen Thermometerscala.

§ 3.

Anforderungen bei Prüfungen ärztlicher Thermometer.

Aerztliche Thermometer, deren Prüfung verlangt wird, sollen folgenden Anforderungen genügen:

1. Die Theilung soll nach Zehntelgraden der hunderttheiligen Thermometerscala fortschreiten und wenigstens von + 36 bis + 42° reichen. Die Länge des Intervalles von einem Grad soll nicht kleiner sein als 3,5 mm.
2. Die Theilung soll ohne augenfällige Eintheilungsfehler ausgeführt sein und so zu der Kapillarröhre liegen, dass an allen Stellen eine unzweideutige Ablesung möglich ist.
3. Um bei Einschlussthermometern Verrückungen der Scala erkennbar zu machen, soll seitlich von derselben auf dem Umschlussrohr eine Strichmarke angebracht sein, welche sich mit dem Theilstrich für 38° zur Deckung bringen lässt. Auch soll dieser Strich bis zu dem an das Umschlussrohr sich anlegenden Theile des Scalenstreifens heranreichen.

4. Die Theilung soll in dauerhafter Weise ausgeführt, deutlich numerirt und mit der Angabe „hunderttheilig“, „Centigrad“ oder einer ähnlichen unzweideutigen Bezeichnung versehen sein.
5. Das Thermometer soll an wenig auffälliger Stelle eine Geschäftsnummer tragen. Auch ist die Aufbringung eines Geschäftsnamens, einer Handelsmarke oder dergl. zulässig.
6. Maximumthermometer sollen durch ihre Bezeichnung als solche gekennzeichnet sein.
7. Aerztliche Thermometer mit Theilung nach Fahrenheit können ausnahmsweise zur Prüfung zugelassen werden.

§ 4.

Art und Umfang der Prüfung.

Die Prüfung bedingt, bei einem Skalenumfang von 17° oder weniger, die Vergleichung der Angaben des Thermometers an mindestens drei Scalenstellen mit den Angaben eines Normalthermometers. Bei grösserem Scalenumfang können die zu prüfenden Stellen entsprechend vermehrt werden. Bei Maximumthermometern tritt zu den ersten Vergleichungen eine Wiederholung an mindestens zwei Scalenstellen.

§ 5.

Bescheinigung und Kennzeichnung.

Ergibt die Prüfung, dass die Fehler der thermometrischen Angaben 0,2° im Mehr oder Minder nicht übersteigen, so wird über das Prüfungsergebnis eine Bescheinigung ausgestellt, welche die zeitigen Fehler der thermometrischen Angaben in Zehntelgraden angibt. Ferner wird auf das Thermometer eine laufende Nummer und ein Reichsadler mit dem beigefügten Buchstaben G. S. als Kennzeichen der vollzogenen Prüfung aufgeätzt.

Ein Maximumthermometer, dessen Angaben bei wiederholten Vergleichungen in derselben Temperatur um mehr als 0,1° von einander abweichen, erhält keine Prüfungsbescheinigung.

Für ärztliche Thermometer können, wenn dieselben keine Maximumthermometer sind, auf besonderen Wunsch die Fehler der thermometrischen Angaben auf den Prüfungsscheinen auch genauer als in Zehntelgraden angegeben werden, namentlich wenn bei solchen Thermometern durch eine Hilfstheilung eine genaue Angabe des zeitigen Eispunktes möglich ist und durch wiederholte Bestimmungen des letzteren festgestellt werden konnte, dass Veränderungen der thermometrischen Angaben von mehr als 0,1° in den nächsten drei Jahren mit hinreichender Sicherheit ausgeschlossen sind.

§ 6.

Anforderungen an Thermometer für andere als ärztliche Beobachtungen.

Thermometer für andere als ärztliche Beobachtungen werden zur Prüfung zugelassen, wenn sie den Vorschriften unter § 3 Nr. 3—5 entsprechen; doch sind, ausser Theilungen nach der hunderttheiligen Scala (Nr. 4) auch solche nach Fahrenheit und Reaumur zulässig. Ferner genügt es, dass die unter Nr. 3 für Einschlussthermometer vorgesehene Strichmarke mit irgend einem Striche der Scala zur Deckung gebracht werden kann.

§ 7.

Bescheinigung und Kennzeichnung.

Ueber das Ergebnis der Prüfung wird eine Bescheinigung ausgestellt, welche die zeitigen Fehler der thermometrischen Angaben in Zehntel- oder Hundertstel-Graden angibt; auch wird auf das Thermometer eine laufende Nummer nebst einem Kennzeichen der vollzogenen Prüfung (§ 5, Absatz 1) aufgeätzt.

Genauer als in Zehntelgraden können die Fehler nur dann angegeben werden, wenn auf der Scala jeder Grad in mehr als zwei Unterabtheilungen getheilt ist und durch wiederholte Prüfungen an derselben Scalenstelle oder durch wiederholte Eispunktsbestimmungen festgestellt werden konnte, dass Veränderungen der thermometrischen Angaben von mehr als 0,1° in den nächsten drei Jahren mit hinreichender Sicherheit ausgeschlossen sind.

Zur Kennzeichnung der vollzogenen Prüfung an Thermometern, für welche die unter § 5 Absatz 1 bezeichnete Stempelung nicht ausreicht, werden besondere Bestimmungen vorbehalten.

Anhang.

Prüfungsgebühren.

An Prüfungsgebühren werden erhoben:

A. Bei ärztlichen Thermometern.

1. für Prüfung eines ärztlichen Thermometers durch Vergleichung an drei Scalenstellen . . . . M. 0,50
2. für Prüfung eines ärztlichen Maximumthermometers durch Vergleichung an drei und wiederholte Vergleichung an zwei Scalenstellen . . . . „ 0,60
3. für jede weitere Prüfung einer Scalenstelle, bei einer Fehlerangabe in Zehntelgraden . . . . „ 0,15
4. für Prüfung je einer Scalenstelle, wenn die Fehler genauer als in Zehntelgraden angegeben werden . . „ 0,25

5. für Prüfung eines ärztlichen Thermometers, welches die Fehlergrenze nicht einhält . . . . M. 0,20

B. Bei anderen Thermometern:

6. für Prüfung einer Scalenstelle, bei einer Fehlerangabe in Zehntelgraden . . . . „ 0,15
7. für Prüfung einer Scalenstelle, wenn die Fehler genauer als in Zehntelgraden angegeben werden . . . „ 0,25

Für Aufätzung einer Strichmarke oder einer anderen vorgeschriebenen Bezeichnung wird eine Gebühr von M. 0,10 berechnet. Für Aufbringung der laufenden Nummer, für Stempelung sowie für Ausfertigung einer Bescheinigung gelangen besondere Gebühren nicht zur Erhebung.

Die auf der schiefen Ebene rollende Kugel.

Ein Schulversuch.

Von

A. Kurz.

Man kann geneigt sein, der schiefen Ebene wegen ihrer Einfachheit den Vorzug zu geben vor Atwood's Fallmaschine zur experimentellen Unterstützung der Fallgesetze.

Bei der lezteren spielt noch das Trägheitsmoment der Rolle in messbarer Weise mit. Bei der obigen Kugel ist auch deren Trägheitsmoment hereinzubeziehen; aber dieses letztere ist von einfachem Ausdrucke $\left(\frac{2}{5} m r^2\right)$ und kann sogar, wie ich zeigen werde, aus solchem Rollversuche mit genügender Annäherung ermessen werden, wenn man es nicht rechnerisch ableiten oder bloss entlehnen will.

Ich benutzte nämlich in diesem Jahre die schon von früher her vorhandene hölzerne Fallrinne mit 350 cm Länge, deren Steigung ich 5,8 sein liess; dann ergibt sich die Fallbeschleunigung der Kugel, vom Rollen abgesehen, gleich

$$\gamma = 981 \cdot 5,8 : 350 \text{ oder } 16 \text{ cm : Sec.}^2$$

(mit Vernachlässigung der Millimeter).

Aus der Fallzeit der Kugel aber, welche 8 Secunden betrug, berechnet sich die Beschleunigung

$$\gamma' = 2 \cdot 350 : 64 \text{ oder } 11 \text{ cm : Sec.}^2,$$

so dass sich beide Werthe nahe wie 7 zu 5 verhalten.

Dies stimmt aber auch mit der Forderung der Theorie; indem ein Theil der disponiblen potentiellen Energie auf die mit dem Rollen verbundene Rotation der Kugel verwendet wird, und nur der Rest auf das Herabkommen zur geringeren potentiellen Energie (Energie der Lage).

Dem oben schon erwähnten Ausdrucke für das Trägheitsmoment gemäss ist es gerade so, als ob die Kugel gewichtlos und an ihrem Aequator, der Berührlinie mit der schiefen Ebene, die Masse $\frac{2}{5} m$

vereinigt wäre. Die Schwerkraft hat also nicht bloss die Kugel m herabzufördern, sondern noch $\frac{2}{5}m$ in ebenso grosse Geschwindigkeit zu versetzen wie jenes m; daher

$$\gamma'' = \frac{m}{m + \frac{2}{5}m}\gamma = \frac{5}{7}\gamma = \gamma'.$$

Ich mache nochmals auf die grössere Einfachheit dieses Ausdruckes als dessen von der Fallmaschine aufmerksam, wenn man bei letzterer auch das Trägheitsmoment der Rolle berücksichtigt[1]); also bei solcher absoluter Messung, wie ich die obige nennen will. Und bei blossen relativen Messungen, dass sich z. B. die Wegstrecken wie die Zeitquadrate verhalten, ist die grössere Einfachheit der schiefen Ebene an und für sich einleuchtend. Ja man könnte versucht sein zu glauben, Atwood's Fallmaschine habe sich durch den Gedanken eingebürgert, als hätte man es bei ihr nur mit fortschreitender, nicht auch mit drehender Bewegung, also mit einem Trägheitsmomente, zu thun. Dass der Rollversuch nur mit einem, der Atwood'sche Versuch mit zwei Körpern (einem steigenden und einem fallenden) vorzunehmen ist, spricht auch noch für jene grössere Einfachheit.

Ein Vorzug, den die Atwood'sche Fallmaschine hat, soll nicht verschwiegen werden, das ist der Ringversuch, wie ich ihn nennen will, wenn man nämlich das Uebergewicht inmitten der disponiblen Fallhöhe durch den bekannten Ring abnimmt und hernach noch Messungen über die alsdann gleichförmige Bewegung anstellt.

Zum Schlusse noch ein Vorschlag für die obige schiefe Ebene, den ich vielleicht selbst noch einmal werde ausführen lassen: Zwei passende Metallschienen auf der schiefen Ebene und ein dünnwandiger Metallcylinder mit passenden Einkerbungen, auf dass er gut herablaufe. Dann ist das Trägheitsmoment mr^2 und

$$\gamma' = \gamma : 2.$$

Dieses Beispiel des Trägheitsmomentes bedarf keiner besonderen Ausrechnung oder Entlehnung und es wird dadurch die Verminderung der thatsächlichen Beschleunigung in noch höherem Grade erreicht als mit der Kugel.

1) Dies habe ich schon im Jahre 1876, in der Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, S. 202 gethan, und gezeigt, wie bei 50 Grammen beiderseits und 5 oder 10 Uebergewicht, das auf den Umfang der Rolle zu reducirende Gewicht derselben beispielsweise 40 ausmacht, was man doch nicht gegenüber 105 oder 110 vernachlässigen kann. Nahezu kommt also da dasselbe Verhältnis heraus (100 : 140), wie es immer bei der rollenden Kugel sich ergeben muss.

Minimum der prismatischen Ablenkung.

Abkürzung des schon früher angezeigten Beweises.[1])

Von

A. Kurz.

Vorangeschickt ist die Tabelle der Ablenkungen mit dem Kopfe

$$\alpha' \qquad \beta' \qquad \alpha' - \beta',$$

wo die Einfallswinkel α etwa von 10 zu 10^0 anwachsen. Will man noch ein Uebriges thun, so kann man als vierte Colonne aus bald nachher ersichtlichem Grunde

$$\frac{\Delta\,(\alpha' - \beta')}{\Delta\,\beta'}$$

hinzunehmen.

Alsdann geht man von dem symmetrischen Durchgang des Strahles aus, für welchen

$$\delta = 2\alpha - \gamma \;(2\beta = \gamma \text{ der Prismenwinkel}),$$

während allgemein sein möge

$$\delta' = \alpha' - \beta' + \alpha'' - \beta'' \text{ und } \beta' + \beta'' = \gamma.$$

Es sei nun $\alpha' = \alpha - \varphi'$ $\beta' = \beta - \psi'$ $\alpha'' = \alpha + \varphi''$ $\beta'' = \beta + \psi''$, so sieht man sofort ein, dass $\psi' = \psi''$ $(= \psi)$ sein muss, also dass man hat

$$\delta' = 2\alpha - \gamma - \varphi' + \varphi''.$$

Nun folgt aber aus der Tabelle, wo immer man α nehmen möge, leicht, dass $\varphi'' > \varphi'$. Denn $\frac{\varphi'' - \psi}{\psi} > \frac{\varphi' - \psi}{\psi}$ gemäss der vierten Colonne.

Analoges geschieht, wenn $\alpha' > \alpha$ angenommen wird, und der Beweis ist fertig. (In Bezug auf $[\alpha' - \beta']$ und $[\alpha'' - \beta'']$ ist ja δ' symmetrisch.)

---

1) Siehe Jahrgang 1883 S. 557—559 d. Rep. „der das Prisma durchsetzende Strahlenbüschel".

Zusatz 1. Als Veranschaulichung kann noch dienen, wenn man die β' als Abscissen und $(\alpha' - \beta')$ als Ordinaten aufträgt und die zur Abscissenaxe concave Form der $(\alpha - \beta)$ Kurve betrachtet.

Zusatz 2. Zum Überflusse kann bemerkt werden, dass obige Ungleichung zwischen den beiden φ schon erfüllt ist für gleiches Wachsthum der α' (oben beispielsweise zu je 10^0 erwähnt), um so mehr also für das gleiche Wachstum (ψ) der β', für welches die obige Untersuchung zu führen war. Zielbewusster oder kürzer könnte es deshalb erscheinen, wenn man die obige Winkeltabelle nach gleichen Stufen der β' statt der α' einrichtete; aber letzteres liegt von vorneherein näher.

Die Tabelle kann also sechs Colonnen umfassen:

$$\alpha', \beta', \alpha' - \beta', \Delta\beta', \Delta(\alpha' - \beta'), \frac{\Delta(\alpha' - \beta')}{\Delta\beta'}.$$

Der letzte Quotient braucht nicht ausgerechnet zu werden, da sein Zähler wächst und sein Nenner abnimmt, er also aus zwei Gründen wächst, wenn α' und somit auch β' wächst.

Zusatz 3. Das Neueste, was ich über obigen Gegenstand las, war die Abhandlung von Hefs „Ueber einige Gesetze, welchen der durch Prisma gehende Lichtstrahl gehorcht, und über das Minimum der Ablenkung“, Wied. Ann. Bd. 36 (1889) S. 264 bis 269.

In dieser Abhandlung ist auch die umfangreiche Literatur über jenen Gegenstand grossenteils verzeichnet. Die in obiger Anmerkung genannte Abhandlung war Koll. Hefs entgangen, da sie nicht den Titel „Minimum der Ablenkung“ trägt, wie Verf. mir schriftlich mittheilte. Dieselbe enthält auch nebenher einen Satz über den Strahl des Minimums; auf den Winkel ε daselbst habe ich mittlerweile im Unterrichte wegen Mangels an Zeit Verzicht geleistet.

Zusatz 4. Der Leitfaden der Phys. von v. Beetz enthielt einen Scheinbeweis, welcher ferner die Entscheidung, ob ein Minimum oder Maximum vorliege, dem Experiment überliess. Ersteres gilt auch von der 9. Auflage des Henrici. Bezüglich des Experimentes (Messung des Brechungsexponenten im Lehrzimmer vor bezw. mit den Schülern) kann ich auf meine Mittheilung im J. 1882 S. 190 bis 192 d. Rep. verweisen.

Allgemeine Sätze über die elektrostatische Induction[1]).

Von

Dr. Gottlieb Adler.

Die vorliegende Abhandlung benutzt als ausschliessliches Beweisprincip den bekannten Gauss'schen Satz $\Sigma e' V = \Sigma e V'$, der eine Symmetrieeigenschaft zweier aufeinander folgender Gleichgewichtszustände eines elektrischen Systems ausspricht. Sie knüpft um den Ausspruch der auf die elektrostatische Induction bezüglichen Sätze zu finden, an die Verhältnisse an, die für das System jener Flächen gelten, die der freien, unbeeinflussten Ladung einer derselben als Niveaufläche zugehören. Sie findet in dieser Hinsicht folgende Verallgemeinerung einer für den Fall der Kugel bekannten Darstellung des Verlaufes der Potentialfunction:

„Ladet man eine der Flächen des Systems einander zugehöriger Niveauflächen zum Potential Eins, so hat die hierdurch hervorgerufene Potentialfunction in den Punkten einer umschliessenden Niveaufläche einen Werth, gegeben durch das Verhältnis der Capacität der ersten Fläche zu der der zweiten."

Die Abhandlung untersucht im folgenden § 3 die Influenzwirkung eines elektrischen Punktes; sie findet, dass diese für einen isolirten Conductor eine vom Betrage der Ladung des letzteren unabhängige Veränderung seines Potentialniveaus zur Folge hat; diese Veränderung ist für sämmtliche Conductoren, die demselben System einander zugehöriger Niveauflächen angehören, ein und dieselbe, somit gleich dem Betrage jenes Potentialniveaus, das die im elektrischen Punkte concentrirte Ladung jener Niveaufläche, diese leitend gedacht, ertheilen würde, die durch den influenzirenden Punkt hindurchgeht. Für einen auf constantem Potential erhaltenen Conductor ergibt diese Influenzwirkung eine Veränderung seiner Ladung; diese Veränderung ist wieder unabhängig vom Betrage des Potentialniveaus des Conductors,

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Wiener Ber. Bd. 98 S. 779 (1889).

und dem Zeichen nach entgegengesetzt der Ladung des influenzirenden Punktes; sie beträgt einen Bruchtheil dieser letzteren, der gegeben ist durch das Verhältnis der Capacität des influenzirten Conductors zur Capacität jener ihm zugehörigen Niveaufläche, die durch den influenzirenden Punkt hindurchgeht. Für zwei demselben System von Niveauflächen angehörige Conductoren ist somit ihre Influenzladung ihrer Capacität proportional.

Nach einer Interpretation dieser Resultate mit Hilfe der Kraftlinientheorie, untersucht sodann die Abhandlung in § 4 die aus der Influenzwirkung resultirende Möglichkeit, dass für einen Conductor Ladung und zugehöriges Potentialniveau entgegengesetzten Zeichens sein können, und discutirt auf Grund der hierbei erhaltenen Formeln die einschlägigen Experimente Pfaundler's und Ayrton's.

Die Abhandlung findet sodann die Capacität eines Condensators, der von zwei einander umschiessenden Conductoren von der Capacität C_1 und C_2 gebildet ist, wenn sie demselben System von Niveauflächen angehören,

$$C' = \frac{C_1}{1 - \frac{C_1}{C_2}}$$

Nachdem die Abhandlung die allgemeinen Formeln für die Influenz eines Conductors durch ein beliebig angeordnetes elektrisches System aufgestellt hat, § 5, untersucht sie sodann im Besonderen für die Wechselwirkung zweier Conductoren beliebiger Gestalt und relativer Lage zunächst die Werthe der Capacitäten, die ihnen unter ihrer gleichzeitigen Anwesenheit zukommen. Sie untersucht dann im besonderen die Wechselwirkung zweier auf constanten Potentialen erhaltener Conductoren, und findet, dass hierbei die Ladung beider sich im allgemeinen verringert, wenn die Potentialwerthe gleichen, sich erhöht, wenn die Potentialwerthe entgegengesetzten Zeichen sind.

Sie findet weiter, dass umgekehrt die Influenzwirkung zwischen zwei isolirten Conductoren bei gleichem Zeichen ihrer Ladungen das Potentialniveau beider im allgemeinen erhöht, bei entgegengesetztem hingegen stets erniedrigt.

Die Beträge dieser Veränderungen werden in den § 9 und § 10 untersucht und discutirt, und es erweist sich hierbei, dass die Influenzwirkung zwischen zwei isolirten Conductoren in allen Fällen, auch in den, wo die Potentialniveaus beider ansteigen, die Tendenz hat die zwischen beiden Conductoren bestehende Potential*differenz* zu verringern.

Schliesslich untersucht die Abhandlung die Bedingungen, unter denen wechselseitige Anziehung zweier gleichnamig geladener Conductoren stattfinden kann.

§ 1.

Gauss'scher Satz. Capacität der Conductoren.

Die folgende Abhandlung verwendet als ausschliessliches Beweisprincip jenen elementaren Gauss'schen Satz, der eine Symmetrieeigenschaft zweier aufeinander folgender Gleichgewichtszustände eines elektrischen Systems ausspricht. Um den Gang der durchzuführenden Untersuchungen nicht zu unterbrechen, schicke ich diesen Satz voraus.

Bezeichnet V das Potential, herrührend von den beliebig vertheilten elektrischen Massenpunkten $e_1 e_2 \ldots$, V' das Potential, hervorgerufen durch ein zweites System beliebig vertheilter elektrischer Massen $e'_1 e'_2 \ldots\ldots$, bezeichnen dann $V_1 V_2 \ldots\ldots$ die Werthe, welche V in den Punkten $e'_1 e'_2 \ldots\ldots$ besitzt, analog $V'_1 V'_2 \ldots\ldots$ die Werthe, welche V' in den Punkten $e_1 e_2 \ldots\ldots$ annimmt, so gilt nach Gauss[1]) die Beziehung

$$e_1 V'_1 + e_2 V'_2 + \ldots\ldots = e'_1 V_1 + e'_2 V_2 + \ldots\ldots,$$

oder in abkürzender Schreibweise

$$\Sigma e V' = \Sigma e' V; \qquad \text{(I}$$

denn beide Seiten der Gleichung sind, wie unmittelbar zu ersehen, wenn man V durch seinen Werth $\Sigma \frac{e}{r}$, ebenso V' durch $\Sigma \frac{e'}{r}$ sich ersetzt denkt, nichts Anderes als das Aggregat der sämmtlichen Combinationen $\Sigma \frac{ee'}{r}$, wo r die Distanz je eines Punktes des ersten elektrischen Maassensystems von je einem Punkte des zweiten bezeichnet.

Der Ausspruch der auf die elektrostatische Induction bezüglichen Gesetze gründet sich auf eine für die elektrischen Verhältnisse eines Conductors charakterische Grösse, seine Capacität.

Es ist diese definirt als das Verhältniss jener Elektricitätsmenge, die auf den Conductor gebracht werden muss, um ihn, wenn unbeeinflusst durch äussere elektrische Kräfte, auf ein bestimmtes Potentialniveau zu bringen, zum Betrage eben dieses letzteren. Der Betrag der Capacität ist von der Gestalt und den Dimensionen des Conductors abhängig. Letztere Abhängigkeit ist am leichtesten an Mittelpunktsflächen sonst beliebiger Gestalt zu übersehen, da für diese die Capacität zwischen zwei Grenzen sich einschliessen lässt. Berechnet man das Potential der auf den Conductor gebrachten Ladung A, da dieses in der Gleichgewichtsvertheilung der letzteren für alle Punkte des Innern des Conductors denselben Werth haben muss, für dessen Mittelpunkt,

1) V. Gauss, „Ueber die im umgekehrten Verhältniss des Quadrates der Entfernung wirksamen Kräfte. (Werke. Bd. 5 § 19 S. 221).

so muss dieser Werth kleiner sein, als wäre die ganze Ladung im Endpunkte des kleinsten, und grösser, als wäre sie im Endpunkte des grössten Radiusvectors concentrirt. Bezeichnet r_0 den ersteren, r_1 den letzteren, α das Potentialniveau, auf welches der Conductor durch die Ladung A sich erhebt, so ist somit

$$\frac{A}{r_1} < \alpha < \frac{A}{r_0}$$

somit die Capacität $C = \frac{A}{\alpha}$ eingeschlossen zwischen den Grenzen

$$r_0 < C < r_1.$$

Man ersieht hieraus, dass die Capacität eine Grösse ist, die ihren Dimensionen im absoluten Maasssystem nach eine Strecke darstellt, deren Grösse für eine Mittelpunktsfläche zwischen dem grössten und dem kleinsten Radiusvector gelegen ist. Man ersieht ferner, dass die Capacität einer Kugel gleich ihrem Radius ist, dass sie ebenso für Conductoren, deren Centralabstände um einen Mittelwerth nur wenig schwanken, gleich diesem letzteren ist, und dies sogar dann, wenn ihre Oberfläche an einer endlichen Anzahl von Stellen discontinuirliche Krümmung, z. B. Spitzen besitzt, da die letzteren[1]) trotz unendlich grosser Flächendichte nur eine endliche Elektricitätsmenge fassen.

§ 2.

Allgemeine Eigenschaften der Systeme von Niveauflächen.

Der Ausspruch der auf die elektrostatische Induction bezüglichen Sätze gestaltet sich besonders einfach an der Hand jener Verhältnisse, welche für das System jener Flächen gelten, welche der freien unbeeinflussten Ladung einer leitenden Fläche als Niveauflächen zugehören.[2])

Es bezeichne C_0 die Capacität einer leitenden Fläche $\mathfrak{A}$; mit dieser Elektritätsmenge C_0 geladen, erlangt sie das Potentialniveau Eins. Die dieser Ladung zugehörige Potentialfunction bezeichne ich mit μ; für die ausserhalb der Fläche $\mathfrak{A}$ liegenden Punkte hat diese wesentlich positive Werthe kleiner als Eins, von diesem Werthe auf $\mathfrak{A}$ bis zu dem in der Unendlichkeit statthabenden Werthe O stetig abnehmend.

Jede Niveaufläche wird durch einen Werth von μ charakterisirt sein; es bezeichne μ_1 den Werth von μ für die umhüllende

1) S. Mathieu, Théorie du potentiel. Tome II S. 41 u. 48.

2) Ein solches Flächensystem bildet z. B. das System der concentrischen Kugelflächen, der homofocalen Ellipsoide, der concentrischen und homofocalen Cylinderflächen.

Niveaufläche $\mathfrak{B}$. Dann, behaupte ich, ist die Capacität C_1 dieser letzteren, wenn leitend gemacht,

$$C_1 = \frac{C_0}{\mu_1}. \tag{1}$$

Zum Zwecke des Beweises fasse ich im Sinne des Gauss'schen Satzes (I) zwei aufeinander folgende Gleichgewichtszustände des aus beiden leitenden Flächen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestehenden Systems ins Auge. Als ersten jenen, wo die innere Fläche $\mathfrak{A}$ allein geladen ist, und zwar mit der Elektricitätsmenge C_0 zum Potential 1, die umhüllende Fläche $\mathfrak{B}$ aber in allen ihren Punkten ohne Ladung ist; das in ihren Punkten herrschende Potential hat den constanten Werth μ_1. Als zweiten Zustand wähle ich jenen, wo die innere Fläche $\mathfrak{A}$ keinerlei Ladung besitzt, hingegen die äussere $\mathfrak{B}$ durch die Elektricitätsmenge C_1, sohin zum Potential 1 geladen ist; in den Punkten der eingeschlossenen Fläche $\mathfrak{A}$ herrscht dann gleichfalls das Potential 1.

Wir haben dann

	in $\mathfrak{A}$		in $\mathfrak{B}$	
	Ladung	Potential	Ladung	Potential
1. Zustand	C_0	1	0	μ_1
2. Zustand	0	1	C_1	1

Nach dem Gauss'schen Satze (I) ist somit

$$C_0 = C_1\mu_1,$$

woraus

$$C_1 = \frac{C_0}{\mu_1} \tag{1}$$

sich ergibt.

Uebrigens ist die Richtigkeit dieser Relation auch ohne jede weitere Beweisführung durch folgende Ueberlegung einzusehen. Alle Kraftlinien, die von der leitenden zum Potential 1 geladenen Fläche $\mathfrak{A}$ ausgehen, müssen jede umschliessende Niveaufläche senkrecht durchsetzen, die Ladung dieser letzteren ist somit gleichfalls C_0; sie erhält jedoch durch diese Kraftlinien, die, weil sie sie senkrecht durchsetzen, auf ihr gleichfalls eine Gleichgewichtsvertheilung bilden, lediglich das Potential μ_1. Ihre Capacität als Verhältnis der Ladung zum zugehörigen Potential des Conductors, ist somit

$$C_1 = \frac{C_0}{\mu},$$

somit, da μ ein echter Bruch ist, stets grösser als C_0.

In Bezug auf das System von Niveauflächen, die ich mir nunmehr einzeln durch die denselben als Conductoren zukommenden Capacitäten charakterisirt denke, will ich einen weiteren Satz beweisen, nämlich

zeigen, dass die Kenntniss dieser letzteren ausreicht, um den Wertheverlauf jener Function μ zu bestimmen, welche der freien, unbeeinflussten Ladung einer beliebigen Fläche des Systems zum Potentiale 1 als Potentialfunction zugehört.

Ich bezeichne mit 𝔅 und ℭ zwei beliebige Flächen des Systems, von denen die zweite die erste umhüllen mag, mit C_1 und C_2 ihre Capacitäten; die Werthe, welche die der innersten Fläche 𝔄 des Systems für deren unbeeinflusste Ladung zum Potential 1 zugehörige Potentialfunction μ in den Punkten der ersten, beziehungsweise der zweiten Niveaufläche besitzt, bezeichne ich mit μ_1 und μ_2.

Nach Gleichung (1) ist sodann

$$C_0 = C_1\mu_1 = C_2\mu_2,$$

woraus

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{C_2}{C_1}$$

sich ergibt.

Hieraus folgt aber, dass wenn die Fläche 𝔅 zum Potential 1 geladen wird, das hierdurch hervorgerufene Potential in den Punkten der Fläche ℭ den Werth

$$M = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{C_1}{C_2} \tag{1a}$$

haben muss, woraus der Satz sich ergibt:

„Ladet man irgend eine Fläche des Systems einander zugehöriger Niveauflächen zum Potential Eins, so hat die dieser freien, unbeeinflussten Ladung zugehörige Potentialfunction in den Punkten einer umhüllenden Niveaufläche einen Werth, gleich der Capacität der ersteren Fläche durch die Capacität der letzteren.“ [1])

Da, wie unmittelbar zu übersehen, die Vergrösserung der Dimensionen eines Conductors seine Capacität im Verhältniss zu deren ursprünglichem Werth um so weniger vermehren wird, je grösser diese letztere bereits war, so ergibt aus diesem Satze sich weiterhin der in späteren Capiteln öfters zu verwendende Schluss, dass die der unbeeinflussten Ladung zum Potentialniveau Eins eines Conductors unseres Flächensystems zugehörige Potentialfunction μ von der Oberfläche

---

1) Es ist dieser Satz die Verallgemeinerung jenes Verfahrens, welches zur Darstellung des Verlaufes der von einem elektrischen Punkt herrührenden Potentialfunction, in welchem Fall das System concentrischer Kugelflächen die Niveauflächen darstellt, in Uebung ist. S. Maxwell, Lehrbuch der Elektricität, Bd. 1, Cap. 7. Mascart u. Joubert, Lehrbuch der Elektricität, Bd. 1 Cap. 7.

desselben nach aussen hin um so langsamer abnehmen wird, je grösser die Capacität desselben ist[1]).

§ 3.

Influenzwirkung eines elektrischen Punktes.

Der im vorigen Paragraph bewiesene Satz (1) wird nun die Möglichkeit eröffnen, den einfachen Ausspruch der Sätze über die durch einen elektrischen Punkt bewirkte Influenz zu finden.

Wir stellen uns vor Allem die Frage: Auf welches Potentialniveau wird ein beliebig geladener, isolirter Conductor durch die Influenzwirkung eines elektrisch geladenen Punktes gebracht?

Zur Beantwortung dieser Frage wenden wir den Gauss'schen Satz (I) auf zwei aufeinanderfolgende Gleichgewichtszustände des von Conductor und elektrischem Punkt gebildeten Systems an.

Als ersten wählen wir jenen, wo der elektrische Punkt P noch die Ladung 0 hat, der isolirte Conductor $\mathfrak{A}$ allein geladen ist, und zwar durch eine Ladung gleich seiner Capicität C auf dem Potential 1 sich befindet. Das Potential, das in diesem elektrischen Gleichgewichtszustande herrscht, hat im Punkte P den Werth μ. Als zweiten Zustand fasse ich jenen ins Auge, wo der isolirte Conductor $\mathfrak{A}$ mit einer beliebigen Ladung A geladen, der Influenz des mit Elektricitätsmenge e versehenen Punktes P unterworfen ist.

Wir haben dann

	Im Conductor $\mathfrak{A}$		Im influencirenden Punkte	
	Ladung	Potential	Ladung	Potential
1. Zustand	C	1	0	μ
2. Zustand	A	α	e	V

Nach dem Gauss'schen Satz (I) ist somit

$$\alpha C = A + e\mu,$$

woraus

$$\alpha = \frac{A}{C} + \frac{e\mu}{C} \tag{3}$$

sich ergibt.

---

1) Man kann das auch ersehen, wenn man bedenkt, dass die Capacität von Conductoren nach Formel II, § 1, mit deren Dimensionen in linearer Weise, ihre Oberfläche aber im quadratischen Verhältnis wachsen. Die den Capacitäten entsprechenden mittleren Flächendichten nehmen somit als Quotient beider mit wachsenden Dimensionen in linearem Verhältniss ab. Da aber die Flächendichte gleichzeitig dem Totalgefälle des Potentials von der Oberfläche des Conductors weg proportional ist, so ist auch hieraus die Richtigkeit obigen Satzes zu ersehen, wie in den besonderen, exact berechneten Fällen, von Kugel und Ellipsoid die für das System der Niveauflächen giltigen Formeln ersehen lassen.

$\frac{A}{C}$ ist aber jenes Potentialniveau α_0, welches die Ladung A dem Conductor $\mathfrak{A}$, wenn er unbeeinflusst von äusseren elektrischen Kräften ist, ertheilt.

Es ergibt sich somit

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{e\mu}{C} \tag{4}$$

und somit der Satz:

Die Influenzwirkung eines elektrischen Punktes verändert das Potentialniveau eines isolirten Conductors unabhängig von dem Betrage der auf ihm befindlichen Ladung, somit um den Betrag jenes Potentialniveaus, auf welches sie den isolirten und ursprünglich ungeladenen Conductor bringen würde. Der absolute Betrag des Potentialniveaus steigt stets durch die Influenzwirkung eines gleichnamig geladenen und sinkt stets durch die Influenzwirkung eines ungleichnamig geladenen elektrischen Punktes.

Mit Hilfe des in § 2 hergeleiteten Satzes (1) lässt sich der Betrag dieser Aenderung des Potentialniveaus

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{e\mu}{C}$$

mit Leichtigkeit erkennen.

$\frac{C}{\mu}$ ist zufolge jenem Satz (1) nichts Anderes als C_1, die Capacität derjenigen dem Conductor zugehörigen Niveaufläche, die durch den influenzirenden elektrischen Punkt geht.

Es ergibt sich sohin der Satz:

Die Influenzwirkung eines elektrischen Punktes verändert das Potentialniveau aller isolirter Conductoren, ausserhalb deren er sich befindet, und die der freien, unbeeinflussten Ladung eines unter ihnen als Niveauflächen zugehören, um einen und denselben Betrag, somit um den Betrag jenes Potentialniveaus, welche die im influenzirenden Punkte concentrirte Ladung jener Niveaufläche geben würde, diese leitend gemacht, welche durch den influenzirenden Punkt selbst geht. Die Influenzwirkung ist somit auch unabhängig von der Lage, welche der influenzirende Punkt auf der durch ihn gehenden, dem inducirten Conductor zugehörigen Niveaufläche besitzt. Conductoren verschiedener Gestalt erfahren durch die Influenzwirkung eines und desselben elektrischen Punktes Veränderungen ihres Potentialniveaus, die sich zueinander

umgekehrt verhalten, wie Capacitäten der ihnen zugehörigen, durch den influenzirenden elektrischen Punkt gelegten Niveauflächen.

Löst man die Gleichung (3) nach A auf, so erhält man

$$A = \alpha C - e\mu, \tag{5}$$

die Ladung, die ein auf dem constanten Potentialniveau α erhaltener Conductor von der Capicität C unter der Influenzwirkung eines elektrischen Punktes aufnimmt, eine Gleichung, die man übrigens analog wie Gl. 3 aus dem Gauss'schen Satz (I) direct herleiten kann.

Beachtet man, dass $\alpha C = A_0$ eben jene Ladung ist, die der äusseren elektrischen Einflüssen entzogene Conductor, wenn zum Potential α geladen, ursprünglich besass, so folgt aus (5)

$$A - A_0 = -e\mu \tag{6}$$

Ist α, somit auch $A_0 = 0$, so ergibt sich

$$J = -e\mu \tag{6a[1]}$$

und somit der Satz:

Die Influenzwirkung eines elektrischen Punktes verändert die Ladung eines auf constantem Potential erhaltenen Conductors unabhängig vom Betrage dieses letzteren stets um ein und dieselbe Grösse; diese ist gleich der im zur Erde abgeleiteten Conductor influenzirten Ladung, dem Zeichen nach entgegengesetzt der im influenzirenden Punkte concentrirten Ladung und beträgt einen Bruchtheil letzterer, der durch μ oder nach Formel 1a gegeben ist, durch das Verhältnis der Capacität des influenzirten Conductors zur Capacität der ihm zugehörigen, durch den influenzirenden Punkt gelegten Niveaufläche. Wieder ist die Influenzwirkung gänzlich unabhängig davon, welche Lage der influenzirende elektrische Punkt auf der durch ihn gelegten, dem influenzirten Conductor zugehörigen Niveaufläche, hat [2]).

---

1) Die Formel (6a) ist auf anderem Wege zuerst abgeleitet in Beer's Einleitung in die Elektrostatik etc., S. 45. Siehe auch Betti, Lehrbuch der Potentialtheorie (deutsch von Meyer), S. 291.

2) So ist z. B. bei einem Ellipsoid, für welches bekanntlich das System der confocalen Ellipsoide die zugeordneten Niveauflächen darstellt, die in ihm durch einen elektrischen Punkt influenzirte Ladung gänzlich unabhängig davon, wo dieser auf dem durch ihn gelegten confocalen Ellipsoide gelegen ist. Es ergibt sich hieraus die paradoxe Schlussfolgerung, dass bei gleichem Abstande des influenzirenden Punktes vom nächsten Oberflächenpunkte des Ellipsoides, die in diesem influenzirte Ladung grösser ist, wenn der elektrische Punkt dem Endpunkte der kleinsten Axe, als wenn er dem Endpunkte der grössten Axe, der Spitze des Ellipsoides, gegenüber liegt.

Wir wollen die vorstehend abgeleiteten Sätze mit Zuhilfenahme der Vorstellung der Kraftlinien interpretiren. Hierbei sollen uns diese letzteren nicht bloss die Richtung der elektromotorischen Kraft, sondern durch den Grad ihrer Concentration auch die Stärke derselben darstellen. Bekanntlich muss man, um letzteres zu erreichen, lediglich annehmen, dass die Zahl der von einem elektrischen Punkte ausgehenden Kraftlinien der Ladung e desselben proportional sei.

Im Falle des zur Erde abgeleiteten, sohin auf dem Potential Null erhaltenen Conductors rührt die ganze auf ihm befindliche Ladung (J der Formel 6a) lediglich von jenen Kraftlinien her, welche vom influenzirenden elektrischen Punkte ausgehend, im Conductor ihr Ende finden. Formel 6a lehrt uns nun, dass jeder Conductor von den vom influenzirenden Punkte ausgehenden Kraftlinien einen Bruchtheil μ in sich hinein ablenkt, welcher Bruchtheil gegeben ist durch den Werth des Potentials, der im influenzirenden Punkte herrscht, wenn der Conductor allen Einflüssen entzogen zum Potential Eins geladen ist. Umschliesst der Conductor den influenzirenden Punkt, dann ist für diesen $\mu = 1$, die influenzirte Ladung $J = -e$, d. h. die Gesammtheit der vom influenzirenden elektrischen Punkte ausgehenden Kraftlinien findet dann ihr Ende im Conductor.

Sprechen wir somit die Formeln 6 im Sinne der Kraftlinientheorie aus, so ergeben sich folgende Sätze:

Der Vorgang der elektrostatischen Induction zwischen influenzirendem elektrischem Punkt und auf constantem Potential erhaltenem Conductor besteht darin, dass der letztere von den vom elektrischen Punkte ausgehenden Kraftlinien stets einen bestimmten Bruchtheil in sich hinein ablenkt; gegeben ist dieser Bruchtheil durch das Verhältnis der Capacität des Conductors zur Capacität jener ihm zugehörigen Niveaufläche, die durch den influenzirenden Punkt hindurchgeht. Es ist somit dieser Bruchtheil lediglich von der geometrischen Configuration abhängig, aber gänzlich unabhängig vom Potential oder Ladung des influenzirten Conductors, und ebenso von der Intensität der Ladung des influenzirenden Punktes. Ebenso ist die Influenzwirkung dieselbe, welche Lage der influenzirende elektrische Punkt auf der durch ihn hindurchgehenden, dem influenzirten Conductor zugehörigen Niveaufläche besitzt, so dass nach dem Princip der Superposition elektrischer Influenzwirkungen ein System elektrischer Punkte, die sämmtlich auf derselben Niveaufläche gelegen sind, und für welche die algebraische Summe ihrer Ladungen verschwindet, auch in seiner Influenzwirkung sich zerstört.

Da die bei dem Vorgange der elektrostatischen Induction vom influenzirenden Punkte in den Conductor hinein abgelenkten Kraftlinien, an dessen Oberfläche ebenso senkrecht eintreffen, wie die von ihm ursprünglich ausgehenden diese normal verlassen, so ergibt sich die resultirende Flächendichte durch einfache algebraische Addition beider Sorten von Kraftlinien, der ursprünglichen, wie des durch den Vorgang der Influenz hinein abgelenkten Bruchtheils μ der vom influenzirenden elektrischen Punkte ausgehenden. Letztere bewirken somit in dem auf constantem Potential erhaltenen Conductor eine ihrer Anzahl gleiche effective Vermehrung oder Verminderung der ursprünglichen Ladung. Die resultirende Gleichgewichtsvertheilung dieser letzteren weicht aber von der symmetrischen auf einem unbeeinflussten Conductor ab.

Für die Inductionswirkung auf einen isolirten Conductor ergeben sich, da diese stets auf einen entsprechenden der eben behandelten Fälle sich zurückführen lässt, folgende Sätze:

Die Inductionswirkung eines elektrischen Punktes auf einen isolirten Conductor besteht in zweierlei Veränderungen: Erstens in einer Veränderung der ursprünglich von diesem ausgehenden Kraftlinien, und zwar werden dieselben bei Influenz eines ungleichnamigen elektrischen Punktes in die diesem zugewandte, bei Influenz durch einen gleichnamig geladenen elektrischen Punkt in die diesem abgekehrte Hälfte der Conductoroberfläche abgedrängt.

Zweitens bewirkt die Influenz eine Veränderung des Potentialniveaus des isolirten Conductors; sie besteht darin, dass dieses nicht mehr der — algebraisch genommenen — Zahl der vom Conductor ausgehenden Kraftlinien proportional ist, sondern dem — algebraisch genommenen — Ueberschusse derselben über jenen, durch Formel 6a bestimmten Bruchtheil von Kraftlinien, die, vom influenzirenden elektrischen Punkt ausgehend, für die betreffende Configuration, nur von dieser allein abhängig, in den Conductor abgelenkt werden.

Der die Influenzwirkung eines elektrischen Punktes bestimmende Bruchtheil der von ihm ausgehenden Kraftlinien, welche in den influenzirten Conductor hinein abgelenkt werden, ist gegeben durch $\mu = \frac{C}{C'}$, d. h. durch das Verhältniss der Capacität des influenzirten Conductors zur Capacität jener ihm zugehörigen Niveaufläche, die durch den influenzirenden elektrischen Punkt hindurchgeht, und ausschliesslich von diesem Verhältnis, gar nicht von der Ladung beider elektrischer Körper abhängig. Für zwei demselben System von Niveauflächen angehörige Conductoren verhalten sich somit die Bruchteile μ

der Kraftlinien, die sie aus dem influenzirenden Punkte in sich hinein ablenken, wie ihre Capacitäten, so dass man den Satz aussprechen kann:

„Für die Conductoren, deren Oberflächen zu demselben System von Niveauflächen gehören, ist ihre Inductionsfähigkeit durch einen elektrischen Punkt ihrer Capacität proportional.“

Es stellt somit das System der Niveauflächen ein System in Bezug auf das elektrostatische Erscheinungsgebiet ähnlicher Flächen dar.

(Schluss folgt.)

Protokoll der ordentlichen Generalversammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 26. November 1889.

Vorsitzender: Hofrat E. Ludwig.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Hierauf werden die angekündigten Vorträge gehalten, und zwar von Herrn Prof. Dr. J. M. Eder: „Ueber neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Photographie“ und von Herrn Dr. G. Adler: „Ueber die Veränderung elektrostatischer Kraftwirkung durch eine leitende Wand“.

Herr Dr. J. von Winiwarter wird als Mitglied aufgenommen.

Der Secretär.

Eingesendete Bücher.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von Prof. G. v. Escherich und Prof. E. Weyr in Wien, Manz's Verlag. 1. Heft des I. Jahrganges (1889).

Wolff Dr. W., Vollständiges Sachregister zu Mousson's Physik. Zürich Schulthess Verlag (1890) 2 M. Durch dieses Register wird der Gebrauch des bekannten Buches von Mousson in dankenswerther Weise erleichtert.

Bebber Dr. J. van, Lehrbuch der Meteorologie, 391 S. mit 120 Abb. und 5 Tafeln. Stuttgart bei F. Enke (1890). Dieses Werk schliesst sich an das bekannte Handbuch der ausübenden Witterungskunde desselben Verfassers an und umfasst folgende Kapitel: 1. die Erdatmosphäre, 2. die Temperatur, 3. Luftdruck, 4. der Wasserdampf in der Atmosphäre, 5. die Bewegung der Luft, 6. die Niederschläge, 7. Elektrische Erscheinungen, 8. Optische Erscheinungen, 9. Wechselwirkung der meteorologischen Elemente, 10. Stürme, 11. Praktische Meteorologie (Wetterprognose). Die Ausstattung des Werkes ist durchwegs schön.

Klimpert R., Lehrbuch der allgemeinen Physik, (Kleyer's Encyclopädie) 370 S. mit 84 Fig. nebst einer Sammlung von 120 Aufgaben. Stuttgart, J. Maier's Verlag (1889) 8 M. Behandelt in Form von Fragen und Antworten: Raum, Zeit, Ruhe und Bewegung, Materie, Kraft, Ausdehnung, Undurchdringlichkeit, Raumerfüllung, Porosität, Theilbarkeit, die Aggregatzustände, allgemeine Anziehnng und Schwere, und die Molecularkräfte der Materie.

Klimpert R., Lehrbuch der Dynamik fester Körper, (Kleyer's Encyclopädie) 704 S. mit 400 Fig. und 500 Aufgaben. Stuttgart (1889) J. Maier's Verlag. 13,50 M. Dieselbe Methode der Fragen und Antworten wie im vorigen Werke ist auch hier angewendet. Behandelt wird: die gleichförmige Bewegung, gleichförmig veränderliche Bewegung, ungleichförmige Bewegung, graphische Darstellung von Bewegungen, zusammengesetzte Bewegung, der freie Fall, Wurf, Bewegung auf vorgeschriebener Bahn, Zentralbewegung, Pendelbewegung, die Lehre von den Trägheitsmomenten, der physische Pendel, Centrifugalkraft ausgedehnter Massen, Stoss, Stoss drehbarer Körper, Anwendung der Lehre vom Stoss.

Münch Dr. P., Lehrbuch der Physik, 9. Auflage. 448 S. mit 326 Abb. und einer Farbentafel. Freiburg i. Br. Herder's Verlag (1889) 4 Mk. Die vorliegende 9. Auflage hat wieder viele Verbesserungen aufzuweisen; so wurde unter anderem das vom internationalen Congress der Elektriker in Paris 1881 und 1884 angenommene absolute Maasssystem und eine elementare Behandlung der Potentialtheorie in dieselbe aufgenommen. Die Ausstattung des Werkes ist durchweg schön.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1887, Beobachtungssystem des Königreichs Sachsen, 1—3. Abtheilung. Herausgegeben von Dr. P. Schreiber.

XXVI. Band. 4. Heft.

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 4. Heftes.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1890.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Inhaltsverzeichniss des Taschenbuches:

Allgemeine Sätze über die elektrostatische Induction.

Von

Dr. **Gottlieb Adler.**

(Schluss.)

§ 4.

Möglichkeit des entgegengestzten Zeichens von Ladung und zugehörigem Potentialniveau für einen influenzirten Conductor.

Die Ergebnisse des § 3 lehren, dass die Influenzwirkung eines elektrischen Punktes auf einen isolirten Conductor den absoluten Betrag seines Potentialniveaus bei gleichem Zeichen beider Ladungen stets vergrössert, bei entgegengesetztem Zeichen stets vermindert, dass dieselbe umgekehrt bei einem auf constantem Potential erhaltenen Conductor bei ursprünglicher Uebereinstimmung der Zeichen beider Ladungen ein Sinken des Betrages der Ladung des Conductors bewirkt, bei entgegengesetztem Zeichen ein Ansteigen desselben zur Folge hat. Da sich weiterhin ergab, dass diese Vermehrungen, beziehungsweise Verminderungen, gänzlich unabhängig von dem Betrage der bereits vorhandenen Ladung, beziehungsweise Potentialniveaus, erfolgten, somit unter Umständen die Beträge letzterer übersteigen können, so resultirt hieraus die Möglichkeit, dass ein der Influenzwirkung eines elektrischen Punktes unterliegender Conductor bei positiver Ladung auf negativem Potentialniveau sich befinden kann und umgekehrt, während für den unbeeinflussten Conductor bekanntlich das Zeichen für Ladung und Potentialniveau mit einander übereinstimmen müssen.

Es sollen nunmehr die Bedingungen dieser Möglichkeit durch Discussion zunächst der Gl. (3) des § 3

$$\alpha = \frac{A}{C} + \frac{e\mu}{C} \tag{3}$$

genauer untersucht werden.

Aus ihr ergibt sich, dass bei positiver Ladung A eines isolirten Conductors sein Potentialniveau α negativ sein kann, wenn er der

Influenz eines **negativ** geladenen elektrischen Punktes unterliegt, sobald die Intensität der Ladung dieses letzteren

$$e > \frac{A}{\mu} \text{ oder } e\mu > A$$

ist.

„Ist somit die Ladung eines isolirten, der Influenz eines ungleichnamig geladenen elektrischen Punktes unterworfenen Conductors ihrem Betrage nach kleiner, als jene, welche derselbe bei dieser Position in dem zur Erde abgeleiteten Conductor influenziren würde, so ist das Potentialniveau des Conductors entgegengesetzten Zeichens wie seine Ladung."

Leitet man z. B. einen Conductor während seiner Influenzirung durch einen elektrischen Punkt e zur Erde ab, wodurch er nach Formel 6a mit der Ladung $J = -e\mu_1$ sich bedeckt, rückt man ihn dann, nachdem man die Erdleitung entfernt, ihn also isolirt hat, näher an den elektrischen Punkt, in eine Position, für welche $\mu_2 > \mu_1$ ist, so wird, wie aus Gl. (3) ersichtlich, sein Potential als negativ sich erweisen.[1])

Analoge Resultate ergibt die Discussion die Gl. (5) des § 3

$$A = \alpha C - e\mu \tag{5}$$

Hieraus folgt, dass ein auf positivem Potentialniveau α constant erhaltener Conductor, negative Ladung erhält, wenn er von einem positiv elektrischen Punkte solcher Intensität seiner Ladung e influenzirt wird, dass

$$\alpha < \frac{e\mu}{C}.$$

$\frac{e\mu}{C}$ ist aber nichts Anderes als gemäss Formel (4) jenes Potentialniveau, das derselbe Conductor, wenn isolirt und ursprünglich ungeladen, unter der Influenzwirkung des elektrischen Punktes e erlangen würde. Es gilt somit der Satz:

„Bringt man einen Conductor, während er der Influenzwirkung eines positiv elektrischen Punktes ausgesetzt ist, auf ein niedrigeres Potentialniveau, als er, wenn ursprünglich ungeladen und isolirt, in Folge der Induction annehmen würde, so wird er sich stets als negativ geladen, im entgegengesetzten Falle als positiv geladen erweisen."

1) S. Ayrton, Handbuch der praktischen Elektricität. Deutsch von Krieg, Cap. 3, § 65, S. 132.

Im ersteren Falle wird innerhalb der eben bestimmten Grenze für α ein positiver Werth des Potentialniveaus von negativer Ladung begleitet sein.

Hat man zwei Conductoren, die beide der Influenz durch einen und denselben elektrischen Punkt unterworfen sind, so verhalten sich die Potentialniveaus, die sie, wenn ursprünglich ungeladen und isolirt, hiebei annehmen, nach Formel (4), umgekehrt wie die Capacitäten respective jener ihnen zugehörigen Niveauflächen, die durch den influenzirenden elektrischen Punkt hindurchgehen Berührt man beide unter Fortdauer dieser Influenzirung miteinander, so werden sie hiedurch auf ein gemeinschaftliches, zwischen den ursprünglichen Werthen gelegenes, Potentialniveau gebracht; im Sinne der Gl. (5) und des eben bewiesenen Satzes muss dann die Ladung jenes Conductors, der sich auf dem höheren Potential befand, nach erfolgter Trennung und Isolation als negativ, die des anderen als positiv sich erweisen.

So wird eine kleine Kugel, die man in unmittelbare Nähe eines grösseren Conductors bringt, so lange sie dem influenzirenden elektrischen Punkte so nahe liegt, dass die Capacität der ihr concentrischen, durch den Influenzpunkt hindurchgelegten Kugel kleiner ist, als die Capacität der dem grösseren Conductor zugehörigen, durch eben diesen Punkt gehenden Niveaufläche, durch die Influenzwirkung ein höheres Potentialniveau als dieser erhalten, und somit, durch Berührung mit letzterem auf niedrigeres Potentialniveau gebracht, im Sinne des eben bewiesenen Satzes als negativ geladen sich erweisen.

Rückt sie dann in eine Entfernung vom influenzirenden Punkt, so gross, dass jene ihr concentrische Kugel eine Capacität gleich der dem grösseren Conductor zugehörigen, durch denselben Punkt gehenden Niveaufläche erhält, so wird ihr Potentialniveau mit dem des andern Conductors gleich, ihre Ladung nach erfolgter Berührung und Isolation gleich Null sich erweisen; in noch grössere Entfernung rückend, wird sie positiv geladen erscheinen.

Die Richtigkeit dieser Anschauungsweise über den Vorgang der Ladung der kleinen Kugel, welche scheinbar wie ein Probescheibchen die Ladung der berührten Stelle in sich aufnimmt, zu beweisen, führt Pfaundler[1]) ein analoges Experiment mit zwei Conductoren von ähnlicher Gestalt, zwei Ellipsoiden, aus, deren eines durch einen Auszug in seinen Dimensionen verändert werden kann. Unterwirft man diese isolirt und ursprünglich ungeladen, der Influenzwirkung eines elektrischen Punktes, der von dem äussersten Oberflächenpunkte beider

1) S. Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik, 9. Aufl., von Pfaundler, 1889, 3. Bd. S. 143.

gleichweit absteht, so wird von den ihnen zugehörigen, durch den influenzirenden Punkt gelegten Niveauflächen jene die kleinere Capacität besitzen, die dem Conductor kleinerer Dimensionen zugehört; im Sinne der Formel (3) wird somit der letztere auf das höhere Potentialniveau gebracht.

Berührt man somit den einen ellipsoidischen Conductor mit dem zweiten, dessen Dimensionen durch den Auszug beliebig verändert werden können, während der Influenzwirkung des elektrischen Punktes in dem diesem nächst gelegenen Oberflächenpunkte, so wird der zweite Conductor, so lange er kleiner ist als der erste, wegen des höheren Potentialniveaus, das er bei der Induction erlangt, nach Berührung mit dem ersten negative Ladung zeigen; bei gleicher Dimension mit dem ersten wird er, wegen Gleichheit des in beiden inducirten Potentialniveaus als ungeladen sich erweisen, und endlich, wenn er durch den Auszug grösser gemacht ist als der erste, als negativ geladen sich zeigen[1]).

§. 5.

Allgemeine Formel für die elektrostatische Influenz eines Conductors durch ein beliebiges elektrisches System.

Die im § 3 für die elektrostatische Induction eines Conductors durch einen elektrischen Punkt hergeleiteten Sätze gelten selbstverständlich ohne Weiteres auch für ein System in ihrer Intensität unveränderlicher elektrischer Punkte, da die durch diese einzeln bewirkten Influenzen nach dem Princip der Superposition sich unabhängig von einander übereinander lagern. Einer besonderen Untersuchung bedarf somit lediglich der Fall, dass die auf dem influenzirten Conductor befindliche Ladung durch ihre Influenzwirkung die Ladungen der influenzirenden elektrischen Massen verändert. Es wird sich zeigen, dass auch für diesen Fall die Formeln (4) und (6) ihre Giltigkeit behalten, dass es nur einer präciseren Definition der die Influenz bewirkenden Massen bedarf.

Es bestehe das elektrische System, dessen Influenz der Conductor unterworfen wird, aus beliebigen Ladungen, die theils in ihrer Intensität unveränderlich mit discret oder stetig angeordneten Punkten verbunden sind, theils auf Conductoren sich befinden, theils an der Oberfläche von Diëlektricis in Folge Polarisation dieser auftreten. Auf zwei Zustände des elektrischen Systems gebildet von den eben definirten

1) Die aus der wechselseitigen Influenz beider Conductoren etwa resultirende Veränderung der Potentialniveaus ist für die gewählte Versuchsanordnung, wie unten am Beginn des § 10 bewiesen wird, vollständig zu vernachlässigen, und somit ist durch die hier geführte Betrachtung die Erscheinung, ohne einer weiteren Correctur zu bedürfen, erledigt.



influenzirenden Ladungen und dem influenzirten Conductor, wenden wir dann den Gauss'schen Satz (I) an. Als ersten wählen wir jenen, wo der Conductor allein, u. zw. mit einer Ladung gleich seiner Capacität C zum Potential 1 geladen ist, und bezeichnen mit μ, wie früher, die dieser freien, unbeeinflussten Ladung zugehörige Potentialfunction. Als zweiten Gleichgewichtszustand fassen wir jenen ins Auge, wo der Conductor unter wechselseitiger Influenz mit der Gesammtheit des eben definirten influenzirenden elektrischen Systems zu dem ihm zukommenden constanten Potentialniveau α geladen ist. Es bezeichne A die Ladung, die er dann besitzt, σ die im schliesslichen elektrischen Gleichgewichtszustand an der Oberfläche der Conductoren und polarisirten Diëlektrica auftretende Flächendichte, ϱ die Raumdichte im Innern der Nichtleiter.

Wir haben somit

	Auf den Conductor 𝔄		In den Punkten des restlichen elektrischen Systems	
	Ladung	Potential	Ladung	Potential
1. Zustand	C	1	0	μ
2. Zustand	A	α	α bezgl. ϱ	V

Der Gauss'sche Satz (I) ergibt somit:

$$C\alpha = A = \Sigma \int_0 \sigma \mu \, dw + \Sigma \int_R \varrho \mu \, dt,$$

und hieraus

$$A = C\alpha - \Sigma \int_0 \sigma \mu \, dw - \Sigma \int_R \varrho \mu \, dt, \tag{7}$$

wo die erste Summe über die Oberfläche aller influenzirenden Conductoren und polarisirten Diëlektrica, die zweite über das Innere aller mit Raumdichte geladener Nichtleiter sich bezieht.

Analog ergibt sich für einen isolirten Conductor das ihm unter Influenzwirkung zukommende Potentialniveau

$$a = \frac{A}{C} + \frac{1}{C} \Sigma \int \sigma \mu \, dw + \frac{1}{C} \Sigma \int \varrho \mu \, dt \qquad (8$$

Beachtet man, dass αC für den auf constantem Potentialniveau α erhaltenen Conductor, die ihm, wenn unbeeinflusst, zukommende Ladung A_0 bedeutet, dass analog $\frac{A}{C}$ für den isolirten Conductor das Potentialniveau α_0 ergibt, das er durch die auf ihn gebrachte Ladung A, wenn unbeeinflusst von elektrischen Kräften erlangt, so ist ersichtlich, dass die Veränderung der Ladung des auf constantem Potential erhaltenen Conductors

$$A - A_0 = - \Sigma \int_0 \sigma \mu \, dw - \Sigma \int_R \varrho \mu \, dt \qquad (10$$

und die Änderung des Potentialniveaus des isolirten Conductors

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{1}{C} \Sigma \int_0 \sigma \mu \, dw + \frac{1}{C} \int_E \varrho \mu \, dt \tag{11}$$

durch die Influenzwirkung eines in seiner Intensität veränderlichen elektrischen Systems, durch die gleichen Formeln gegeben ist, wie die für die Influenzwirkung unveränderlicher elektrischer Massen giltigen Formeln (4) und (6); nur muss als das die Influenz bewirkende elektrische System die schliessliche elektrische Gleichgewichtsvertheilung auf den influenzirenden Körpern in Rechnung gebracht werden.

Einfach gestaltet sich der Ausspruch der Formeln (10) und (11) lediglich für den Fall, dass der influenzirte Conductor eine Kugel ist. Bezeichnet a ihren Radius und somit auch ihre Capacität, so ist μ, die ihrer unbeeinflussten Ladung zum Potential Eins zugehörige Potentialfunction,

$$\mu = \frac{a}{r},$$

wo r die Distanz des betreffenden Raumpunktes vom Kugelmittelpunkt bezeichnet.

Die in den Formeln (10) und (11) auftretenden Integrale haben aber dann eine einfache Bedeutung

$$\Sigma \int_0 \mu \sigma \, dw + \Sigma \int_E \mu \varrho \, dt = a \left\{ \Sigma \int_0 \frac{\sigma \, dw}{r} + \Sigma \int \frac{\varrho \, dt}{r} \right\} = a \, \Psi_c,$$

wo Ψ_c, wie unmittelbar ersichtlich, nichts Anderes ist, als das Potential aller influenzirenden elektrischen Massen für den Mittelpunkt der Kugel.

Es ergeben sich sohin die folgenden Sätze:

„Die Influenzwirkung eines beliebigen elektrischen Systems bewirkt in einer auf constantem Potentialniveau erhaltenen Kugel eine Verminderung des Betrages ihrer Ladung, gegeben durch das Product ihres Radius in den Werth, den das Potential der schliesslichen elektrischen Anordnung des influenzirenden Systems für den Mittelpunkt der Kugel besitzt."

„Eine isolierte, ursprünglich ungeladene Kugel erhebt sich unter der Influenzwirkung eines elektrischen Systems auf ein Potentialniveau, gleich dem Werthe, den die diesem zugehörige Potentialfunction für den Mittelpunkt der Kugel besitzt."

Diese Eigenschaft einer Kugel von kleinem Radius, in welchem Fall sie die ursprüngliche Gleichgewichtsanordnung des elektrischen Systems wenig alterirt, an eine beliebige Stelle des von diesem hervorgerufenen elektrostatischen Feldes gebracht, das daselbst herrschende

Potential anzunehmen, ist die gebräuchlichste Methode, ein elektrostatisches Feld auszumessen.

Die Aenderung des Potentialniveaus einer beliebig geladenen isolirten, leitenden Kugel ist durch den gleichen Satz gegeben.

Für einen Conductor beliebiger Gestalt soll in dieser Abhandlung eine eingehendere Untersuchung der Formeln (10) und (11) bloss für den Fall durchgeführt werden, dass er der Influenz eines zweiten Conductors $\mathfrak{B}$ unterliegt.

Die Formel für die durch dieselbe bewirkte Aenderung der Ladung des auf constantem Potential α erhaltenen Conductors reducirt sich dann auf

$$A - A_0 = -\int_{\mathfrak{B}} \mu \sigma dw, \tag{12}$$

die für die Aenderung des Potentialniveaus eines isolirten Conductors auf

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{1}{C} \int_{\mathfrak{B}} \mu \sigma dw. \tag{13}$$

§ 6.

Capacität eines von zwei einander zugehörigen Niveauflächen gebildeten Condensators.

Besonders einfach gestalten sich die Formeln (12) und (13) für den besonderen Fall, dass der Conductor $\mathfrak{B}$ eine dem Conductor $\mathfrak{A}$ für dessen freie, unbeeinflusste Ladung zugehörige, denselben völlig umschliessende, Niveaufläche ist. Beide Conductoren bilden dann zusammen einen geschlossenen Condensator, und es mag die Aufgabe gelöst werden, die Capacität desselben zu bestimmen. Wir bezeichnen als diese jene Ladung, die der innere Conductor $\mathfrak{A}$ aufzunehmen vermag, wenn er unter gleichzeitiger Ableitung des umschliessenden Conductors $\mathfrak{B}$ zur Erde zum Potential Eins geladen wird.

Bezeichnen wir letztere Capacität mit C', mit C_1, wie früher, die Capacität des allen elektrischen Einflüssen entzogenen Conductors $\mathfrak{A}$, so ergibt die Formel (12), da für sämmtliche Punkte von $\mathfrak{B}$, welcher der Annahme nach eine der unbeeinflussten Ladung auf $\mathfrak{A}$ zugehörige Niveaufläche darstellt, μ einen und denselben Werth besitzt,

$$C' - C_1 = -\mu \int_{(\mathfrak{B})} \sigma dw;$$

nun ist aber $\int_{(\mathfrak{B})} \sigma dw$ die auf dem Conductor $\mathfrak{B}$ befindliche Ladung; da alle von $\mathfrak{A}$ ausgehenden Kraftlinien in dessen Innenfläche ein Ende finden müssen, von seiner Aussenfläche aber, da sie zur Erde abgeleitet

ist, keine Kraftlinien ausgehen können, ist diese gleich gross, aber entgegengesetzt der von 𝔄, somit

$$\int\limits_{(\mathfrak{v})} \sigma\, dw = -C',$$

woraus sich

$$C' = \frac{C}{1-\mu}, \text{[1]} \tag{14a}$$

oder unter Benützung von Formel (1) des § 2, wenn C_2 die Capacität des Conductors 𝔅 bezeichnet

$$C' = \frac{C_1}{1-\frac{C_1}{C_2}} \tag{14}$$

Aus Formel (14) ist ersichtlich, dass die Capacität des Condensators grösser ist, als die des inneren unbeeinflussten Conductors, und diese umsomehr übertrifft, je näher die umhüllende, zur Erde abgeleitete Conductorfläche an der inneren gelegen ist.

Besonderes Interesse besitzt es, die Formel (14a) nach Murphy's[2]) Anschauung über die wechselseitige elektrostatische Influenz zweier Conductoren, die er als bestehend aus der Uebereinanderlagerung einer unendlichen Reihe successive erfolgender Influenzen ansieht, herzuleiten, weil sie eben diese Theorie in ganz besonders durchsichtiger Weise zur Anschauung bringt.

Dieser Auffassung gemäss wirkt die auf den Conductor 𝔄 in seinem unbeeinflussten Gleichgewichtszustande befindliche Elektricitätsmenge C influenzirend auf den zur Erde abgeleiteten Conductor 𝔅, und dieser muss, nach einem bekannten Gauss'schen Satze, da er 𝔄 völlig umschliesst, eine Influenzladung gleich grossen Betrages, entgegengesetzten Zeichens, $-C$, aufnehmen. Diese Ladung wirkt nun auf dem Conductor 𝔄 zurück und influenzirt in demselben, gemäss der Formel (6) des § 2 eine Ladung $C\mu$. In gleicher Weise gibt nun diese durch ihre Influenzwirkung auf 𝔅 und durch Rückwirkung der hiebei auftretenden Ladung auf 𝔄, Veranlassung zu einer zweiten auf diesem Conductor erscheinenden Influenzladung $C\mu^2$ ..... Verfolgt man in dieser Weise die durch die successiven Influenzen auf 𝔄 auftretenden Partialladungen, so ersieht man, dass dieselben in eine geometrische Progression sich ordnen, deren Quotient $\mu < 1$, deren Anfangsglied C_1 die ursprüngliche Ladung des unbeeinflussten Conductors 𝔄 ist. Die

1) Diese Formel findet sich auf anderem Wege abgeleitet, Betti, l. c. S. 311, Formeln 5 und 6.

2) S. Mascart u. Joubert, Lehrb. d. Elektricität. Bd. 1, S. 72, § 86.

resultirende Ladung C' ergibt sich als Summe dieser geometrischen Progression, somit als

$$C' = \frac{C}{1 - \mu} \tag{14a}$$

Diese Herleitung der Formel (14a), die man übrigens direct aus dem Gauss'schen Satz (I) ableiten kann, gibt somit eine überaus anschauliche Illustration von Murphy's Auffassung des Vorganges der elektrostatischen Influenz.

§ 7.

Formulirung des allgemeinen Problems der wechselseitigen Influenz zweier Conductoren.

Der Lösung des allgemeinen Problems der wechselseitigen Influenz zweier Conductoren stellen sich ungleich grössere Schwierigkeiten entgegen, als der im vorigen § 6 behandelte specielle Fall darbot. Die scheinbar einfachen Formeln für die bei dieser wechselseitigen Influenz auftretenden Aenderungen der Ladungen, bezw. Potentialniveaus

$$A - A_0 = -\int_{(\mathfrak{B})} \mu \sigma \, dw \tag{12}$$

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{1}{C} \int_{(\mathfrak{B})} \mu \sigma \, dw \tag{13}$$

setzen nämlich die Kenntniss der schliesslichen Gleichgewichtsvertheilung σ der Electricität voraus, deren Kenntnis wir in dem eben behandelten speziellen Falle gänzlich enthoben waren. Es lässt sich aber auch das allgemeine Problem sehr vereinfachen, indem man sich des Princips der Superposition elektrischer Ladungen bedient.

Stehen zwei Conductoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ — ich lasse ganz dahin gestellt, ob sie gänzlich auseinanderliegen, oder ob der erstere vom letzteren umschlossen wird — in wechselseitiger Influenz, mag der erstere auf dem constanten Potentialniveau α, der zweite auf dem constanten Potentialniveau β erhalten werden, so kann man nach dem Principe der Superposition elektrischer Ladungen das Problem der Influenz in zwei zerfällen. Erstens, jene Ladung zu bestimmen, die der Conductor $\mathfrak{A}$, wenn zum Potential α geladen, aufnimmt, während der Conductor $\mathfrak{B}$ zur Erde abgeleitet ist; zweitens jene Elektricitätsmenge zu finden, die im Conductor $\mathfrak{A}$ influenzirt wird, wenn er zur Erde abgeleitet, der Influenzwirkung des zum Potential β geladenen Conductors $\mathfrak{B}$ ausgesetzt ist. Denn man übersieht mit grösster Leichtigkeit, dass die Superposition dieser beiden Ladungen den Conductor $\mathfrak{A}$ auf das ihm vorgeschriebene Potentialniveau α bringt, während der Conductor $\mathfrak{B}$ auf dem Potential-

niveau β constant erhalten wird, und wegen der Eindeutigkeit der Lösungen elektrostatischer Probleme ist die hieraus für $\mathfrak{A}$ und die in analoger Weise für $\mathfrak{B}$ resultirende Elektricitätsvertheilung die einzig mögliche.

Nach Murphy's Anschauung über den Vorgang der elektrostatischen Influenz als bestehend aus successiven und sich superponirenden Influenzen, muss die erste dieser beiden auf den Conductor $\mathfrak{A}$ erscheinenden Ladungen mit α proportional sein, da die ursprüngliche unbeeinflusste Ladung auf $\mathfrak{A}$ es war, und somit die durch ihre Influenzwirkung in $\mathfrak{B}$ auftretende Ladung, sowie die aus der Influenzwirkung letzterer resultirenden auf $\mathfrak{A}$ successive auftretenden Influenzladungen mit dieser, somit mit α, proportional sein müssen. Es lässt sich somit der erste Theil jener Ladung als $C_1'\alpha$ darstellen, wo C_1' also jene Ladung darstellt, welche der Conductor $\mathfrak{A}$ aufnimmt, wenn er unter gleichzeitiger Anwesenheit des zur Erde abgeleiteten Conductors $\mathfrak{B}$ auf's Potentialniveau Eins gebracht wird. Man bezeichnet C_1' als die Capacität des Conductors $\mathfrak{A}$ in Gegenwart von $\mathfrak{B}$.

Die zweite jener Ladungen ist aus gleichen Gründen mit dem Potentialniveau des Conductors $\mathfrak{B}$, β, proportional, somit als $J_1\beta$ darstellbar. Die Grösse J_1 als Betrag jener Ladung, die in dem zur Erde abgeleiteten Conductor $\mathfrak{A}$ durch den zum Potential Eins geladenen Conductor $\mathfrak{B}$ influenzirt wird, wird der Inductionscoëfficient des Conductors $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{A}$ genannt.

Die auf den Conductoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unter ihrer gegenseitigen Influenzwirkung im schliesslichen Gleichgewichtszustand befindlichen Ladungen A' und B' sind mithin dargestellt durch die Formeln

$$\begin{aligned} A' &= C_1\alpha + J_1\beta \\ B' &= J_2\alpha + C_2'\beta \end{aligned} \qquad (15$$

Das Problem der elektrostatischen Influenz ist somit darauf zurückgeführt, die vier Coëfficienten C'_1, C'_2, J_1, J_2 zu bestimmen.

Nach einem bekannten Bertrand'schen Satz[1]) ist aber

$$J_1 = J_2,$$

wie man unmittelbar einsieht, wenn man den Gauss'schen Satz auf folgende zwei Gleichgewichtszustände der Conductoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ anwendet:

	Auf den Conductor $\mathfrak{A}$		Auf den Conductor $\mathfrak{B}$	
	Potentialniveau	Ladung	Potentialniveau	Ladung
1. Zustand	1	C_1'	0	J_2
2. Zustand	0	J_1	1	C_2'

1) S. Mascart und Joubert, Lehrbuch der Elektricität. S. 47, § 63, Satz II.

Der Gauss'sche Satz ergibt somit

$$J_1 = J_2 \tag{16}$$

in Worten ausgesprochen:

„Ladet man von zwei Conductoren 𝔄 und 𝔅 nacheinander einen zum Potentialniveau Eins, während man den zweiten zur Erde ableitet, so ist in beiden Fällen die im anderen Conductor influenzirte Elektricitätsmenge dieselbe."

Interessant ist eine Interpretation dieses Bertrand'schen Satzes, die sich ergibt, wenn man den Gauss'schen Satz auf zwei Zustände der Conductoren 𝔄 und 𝔅 anwendet, wo nacheinander je der eine mit derselben Elektricitätsmenge geladen wird, während der andere zur Erde abgeleitet wird. Man hat dann

	Auf 𝔄		Auf 𝔅	
	Ladung	Potentialniveau	Ladung	Potentialniveau
1. Zustand	A	$\frac{A}{C'_1}$	J'_2	0
2. Zustand	J'_1	0	A	$\frac{A}{C'_2}$

Der Gauss'sche Satz ergibt somit

$$J'_1 \frac{A}{C'_1} = J'_2 \frac{A}{C'_1}$$

daher

$$J'_1 : J'_2 = C'_1 : C'_2. \tag{16a}$$

Wir erhalten somit den Satz:

„Stehen zwei Conductoren 𝔄 und 𝔅 in wechselseitiger Influenz, bringe ich nacheinander immer auf den einen eine bestimmte Ladung, während ich den anderen zur Erde ableite, so verhalten sich die hiebei in dem jeweilig zur Erde abgeleiteten Conductor auftretrenden Influenzladungen zu einander, wie die Capacitäten".

Mit anderen Worten:

„Für die wechselseitige Influenzwirkung zweier Conductoren, ist ihre Inductionsfähigkeit, d. h. die Fähigkeit die vom anderen Conductor ausgehenden Kraftlinien in sich hinein abzulenken, ihrer Capacität proportional."

Es hat dieser Satz grosse Aehnlichkeit mit dem am Schlusse des § 3 abgeleiteten, und illustrirt die physikalische Bedeutung des Bertrand'schen Satzes.

§ 8.

Ausdrücke der Capacitäts- und Inductionscoëfficienten zweier sich wechselseitig influenzirender Conductoren.

Es sollen nunmehr für die Capacitäten C'_1 und C'_2 und für den Coëfficienten der wechselseitigen Induction $J = J_1 = J_2$ der sich gegenseitig influenzirenden Conductoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Ausdrücke durch die ursprünglichen Capacitäten C_1 und C_2 derselben aufgestellt werden; der eben hergeleitete Bertrand'sche Satz wird die Discussion dieser Formeln sehr erleichtern.

Wir kommen zu diesen Ausdrücken, wenn wir die Formeln (12) des § 6 auf den Fall anwenden, dass der Conductor $\mathfrak{A}$ zum Potential Eins geladen, der Conductor $\mathfrak{B}$ zur Erde abgeleitet ist. Hierbei bedeckt sich der erstere mit der Ladung C'_1, der letztere mit der influenzirten Ladung J_2

$$J_2 = -\int_{\mathfrak{A}} \nu \sigma \, dw,$$

wo ν in analoger Weise, wie vorhin μ, die Werthe jener Potentialfunction bezeichnet, wie sie in den einzelnen Oberflächenpunkten von $\mathfrak{A}$ herrschen würden wenn der Conductor $\mathfrak{B}$ allein und daher unbeeinflusst von äusseren elektrischen Kräften zum Potential Eins geladen wäre.

Für alle Oberflächenpunkte von $\mathfrak{A}$, welche von derselben der Function ν zugehörigen Niveaufläche geschnitten werden, wird der Werth von ν der gleiche sein; die Conductorfläche $\mathfrak{A}$ wird so in Flächenstreifen zerfällt, die mit den auf ihnen befindlichen Elektricitätsmengen Beträge zum Integral J beisteuern, die den in ihnen herrschenden Werthen von ν proportional sind. Nun ist die Flächendichte σ in allen Punkten des auf dem Potential Eins erhaltenen Conductors $\mathfrak{A}$ wesentlich positiv, — denn sie war es ursprünglich und bleibt es unter der Influenzwirkung der auf $\mathfrak{B}$ auftretenden negativen Ladung J mit erhöhten Werthen von σ. Es lässt sich somit der Werth des Integrals J in zwei Grenzen einschliessen. Er ist kleiner als wäre die gesammte Ladung C'_1 in dem $\mathfrak{B}$ nächsten Punkte, wo ν den grössten, grösser als wäre sie in dem $\mathfrak{B}$ fernsten Punkte, wo ν den kleinsten Werth besitzt, concentrirt. Es lässt sich somit das Integral J, da die Function unter dem Integralzeichen nie durch Null geht, analog wie dies mit dem für die Schwerpunktsbestimmung giltigen Integral der Fall ist, durch einen Mittelwerth von ν ausdrücken, den ich mit ν' bezeichne und der definirt ist durch

$$\int_{\mathfrak{A}} \nu \sigma \, dw = \nu' \int_{\mathfrak{A}} \sigma \, dw = \nu' \, C'_1. \qquad (17\,a$$

Solchergestalt ergibt sich der Coëfficient der gegenseitigen Induction

$$J = -\nu' C'_1. \tag{17}$$

Berechnet man in analoger Weise die im Conductor $\mathfrak{A}$ influenzirte Ladung J, wenn er zur Erde abgeleitet der Influenz des zum Potential Eins geladenen Conductors $\mathfrak{B}$ unterworfen ist, so ergibt

$$J = -\mu' C'_2. \tag{17'}$$

Die Gleichstellung beider Werthe ergibt somit die Relation

$$C'_1 : C'_2 = \mu' : \nu' \tag{18}$$

welche Relation ausspricht: „Die Capacitäten, welche die Conductoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, jeden in Gegenwart des andern, zur Erde abgeleiteten, besitzen, verhalten sich, wie die im Sinne der Gleichung (17a) bestimmten Mittelwerthe jener Potentialwerthe, welche sie, wenn unbeeinflusst durch äussere elektrische Kräfte, zum Potential Eins geladen, in den Oberflächenpunkten je des andern Conductors hervorrufen würden".

Die exacte Bestimmung der Mittelwerthe μ' und ν' begegnet im allgemeinen erheblichen Schwierigkeiten, da sie die Kenntnis der schliesslichen Elektricitätsvertheilung σ über den Conductor $\mathfrak{A}$, bezw. $\mathfrak{B}$ voraussetzt. Wir wissen im allgemeinen über sie das Eine, dass sie Werthe sind der Functionen μ und ν, welche für Punkte des Conductors gelten, die z. B. bei einem symmetrisch gebauten, vom Mittelpunkte gegen das dem anderen Conductor zugewendete Ende verschoben sind.

In analoger Weise ergibt sich der Betrag der Veränderung der Capacitäten der Conductoren von ihren ursprünglichen Werthen C_1 und C_2, zu den unter ihrer gegenseitigen Influenzwirkung giltigen C'_1 und C'_2.

Wendet man die Formel (12) auf jene Veränderung der Ladung des auf dem Potential Eins erhaltenen Conductors $\mathfrak{A}$, welche die Influenz des zur Erde abgeleiteten Conductors $\mathfrak{B}$ bewirkt, an, so ergibt diese sich als

$$C'_1 - C_1 = -\int_{\mathfrak{B}} \mu \sigma'_i dw, \tag{12b}$$

wo σ'_i die in den einzelnen Oberflächenelementen von $\mathfrak{B}$ influenzirte Flächendichte bezeichnet, die an allen Stellen negative Werthe besitzen muss, und zwar an den $\mathfrak{A}$ näheren grössere, als an den $\mathfrak{A}$ ferneren. Es existirt somit wieder, da die Function unter dem Integral für keinen in Betracht kommenden Werth durch Null gehen darf, ein Mittelwerth μ'' von der Beschaffenheit, dass

$$\int \mu \sigma_i dw = \mu'' \int_{\mathfrak{B}} \sigma_i dw = \mu'' J \tag{19a}$$

ist, wo μ'' ein anderer Mittelwerth der $\mathfrak{A}$ zugehörigen Potentialfunction μ ist, den exact zu bestimmen, wir zwar nicht im Stande sind, von dem wir aber wissen, dass er für Oberflächenpunkte des Conductors $\mathfrak{B}$ gelten wird, die, weil die Ladung σ'_i von der symmetrischen Vertheilung der ursprünglichen Gleichgewichtsladung noch weiter abweicht als die Ladung C_2, vom Mittelpunkte fort noch näher an das dem Conductor $\mathfrak{A}$ zugewendete Ende gerückt sein werden; es ist somit ausnahmslos $\mu'' > \mu'$.

Solchergestalt ergibt sich

$$C'_1 - C_1 = -\mu'' J \tag{20}$$

und analog

$$C'_2 - C_2 = -\nu'' J_1 \tag{20'}$$

wobei auch $\nu'' > \nu'$ sein muss. Hieraus resultirt die Proportion

$$(C'_1 - C_1) : (C'_2 - C_2) = \mu'' : \nu'' \tag{21}$$

Mit Benutzung von (17) ergibt sich hieraus

$$C'_1 - C_1 = \mu'' \nu' C_1$$

und somit

$$C'_1 = \frac{C_1}{1 - \mu'' \nu'} \tag{22a}$$

und analog

$$C'_2 = \frac{C_2}{1 - \mu' \nu''} \tag{22b}$$

endlich

$$J = -\frac{\nu' C_1}{1 - \mu'' \nu'} = -\frac{\mu' C_2}{1 - \mu' \nu''}, \tag{22}$$

$$C'_1 = -\frac{J}{\nu''}, \quad C'_2 = -\frac{J}{\mu'}, \tag{22d}$$

Es erscheinen somit die Capacitäten beider Conductoren wie auch der Coëfficient ihrer gegenseitigen Induction durch die vier wesentlich positiven Grössen μ', ν', μ'', ν'', die stets echte Brüche sein werden, ausgedrückt. Da diese nur drei Grössen ausdrücken, muss zwischen ihnen eine Relation bestehen, gegeben durch Gleichung (22c), aus welcher die Proportion

$$\left(\frac{1}{\nu'} - \mu''\right) : \left(\frac{1}{\mu'} - \nu''\right) = C_1 : C_2 \tag{22e}$$

folgt.

Ist der Conductor $\mathfrak{A}$ vom Conductor $\mathfrak{B}$ völlig umschlossen, so ist wegen der Constanz des Potentials im Hohlraum eines Conductors

$\nu' = \nu'' = 1$, und wir erhalten für die Capacität des von den Conductoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gebildeten Condensators

$$C_1' = \frac{C_1}{1 - \mu''} \tag{14b}$$

also eine Formel ungemein ähnlich jener (14a), die früher im § 6 für einen speciellen, von zwei einander zugehörigen Niveauflächen gebildeten Condensator gefunden worden.

Interessant ist vor allem die Form jener Ausdrücke (22), welche für C_1', C_2', J im allgemeinen Fall resultiren. Sie ist ganz analog jener, die wir im § 6 fanden; dort erkannten wir als Ursache derselben, dass, wenn wir nach Murphy's Vorgang die wechselseitige Influenz jener zwei Conductoren uns aufgelöst dachten, in die Reihe successive aufeinander folgender, sich superponirender Influenzladungen, diese genau nach dem Gesetze einer geometrischen Progression abnehmen.

Ein Gleiches findet bei wechselseitiger Influenz zweier beliebig gestalteter Conductoren exact nicht mehr statt, wiewohl die succesiv auftretenden Influenzladungen gleichfalls stetig abnehmen. Nichtsdestoweniger erscheint die auf dem Conductor $\mathfrak{A}$, resp. $\mathfrak{B}$, unter Beeinflussung durch den andern zur Erde abgeleiteten Conductor schliesslich resultirende Ladung C_1' und C_2' unter der Form der Summe einer geometrischen Progression, deren Anfangsglied die ursprüngliche Ladung C_1, bezw. C_2 ist, woraus nebenbei folgt, dass die Capacitäten C_1', C_2' grösser als die ursprünglichen C_1 und C_2 sind.

Durch die Formeln (22) haben wir die uns gänzlich unbekannten Grössen C_1', C_2', J durch die gegebenen Werthe der ursprünglichen Capacitäten C_1 und C_2 mit Hilfe der vier Grössen μ', μ'', ν', ν'' ausgedrückt. Zwischen diesen besteht die Relation (22e), ihre Werthe aber exact zu bestimmen, begegnet erheblichen Schwierigkeiten. Aber die Formeln (22) eröffnen uns die Möglichkeit in sehr vielen Fällen die aus der wechselseitigen Influenz beider Conductoren resultirenden Verhältnisse wenigstens nach der qualitiven Seite hin vorherzusehen. Wir wollen einige dieser Fälle nunmehr näher untersuchen.

Befinden sich die sich gegenseitig beeinflussenden Conductoren in sehr grosser Entfernung von einander, so gelten die Werthe μ', μ'', ν', ν'', die Werthe jener Functionen μ und ν, die der freien unbeeinflussten Ladung der Conductoren $\mathfrak{A}$, resp. $\mathfrak{B}$, zum Potential Eins als Potentialfunctionen zugehören, für Punkte, die von der Oberfläche des zugehörigen Conductors sehr weit entfernt sind. Für sehr grosse Distanzen ist aber der Werth von $\mu = \frac{C_1}{\mathfrak{L}}$, der Werth von $\nu = \frac{C_2}{\mathfrak{L}}$, wo $\mathfrak{L}$ die sehr grosse Entfernung des betreffenden Punktes vom Mittelpunkte des

Conductors $\mathfrak{A}$, resp. $\mathfrak{B}$ bezeichnet. Es wird diese Entfernung $\mathfrak{L}$, von der ab diese Werthe für μ und ν gelten, um so kleiner sein können, je früher im System der der betreffenden Potentialfunktion zugehörigen Niveauflächen eine auftritt, welche von der Kugelgestalt nur wenig abweicht, und letzteres wird um so früher zu erwarten sein, je weniger die Gestalt des zugehörigen Conductors selbst von einer Kugel abweicht.

Von dieser Entfernung $\mathfrak{L}$ ab geht die Proportion (18) über in

$$C_1' : C_2' = C_1 : C_2$$

und analog folgt aus (21)

$$(C_1' - C_1) : (C_2' - C_2) = C_1 : C_2$$

d. h. bei grossen Distanzen beider Conductoren wird die Capacität eines Conductors durch die Gegenwart des andern zur Erde abgeleiteten vergrössert, u. zw. die des Conductors ursprünglich grösserer Capacität um den absolut genommen höheren Betrag, doch so, dass das Verhältnis beider Capacitäten unverändert das gleiche geblieben ist.

Betrachten wir ferner den Effect der wechselseitigen Influenz zweier Conductoren auf deren Capacitäten, wenn die ursprünglichen Werthe derselben erheblich von einander sich unterscheiden, C_1 erheblich grösser ist als C_2. Bestimmend für die Beträge dieser Veränderungen sind μ', ν', μ'', ν'', die den freien, unbeeinflussten Ladungen von $\mathfrak{A}$, resp. $\mathfrak{B}$ als Potentialfunctionen zugehören. Nach § 2 ist aber die Abnahme der Werthe dieser Potentialfunctionen vom Werthe Eins, den sie in der Oberfläche des zugehörigen Conductors annehmen, um so langsamer, je grösser die Dimensionen, somit die Capacität des bezüglichen Coductors sind; überdies werden, wie leicht zu übersehen, jene Punkte in der Oberfläche von $\mathfrak{B}$, auf die der Mittelwerth μ' sich bezieht, der Oberfläche von $\mathfrak{A}$ näher gelegen sein, als jene Punkte von $\mathfrak{A}$, auf die ν' sich bezieht, der Oberfläche von $\mathfrak{B}$; hieraus folgt, dass $\mu' > \nu'$ sein muss, dass also die ursprünglich grössere Capacität C_1 auch die grössere bleibt. Weil aus gleichen Gründen $\mu'' > \nu''$ ist, so folgt aus den Gleichungen, dass $C_1' - C_1 > C_2' - C_2$ ist, dass somit die ursprünglich grössere Capacität um einen, absolut genommen höheren Betrag zunimmt, als die kleinere Capacität, so dass die Differenzen der Capacitäten zu Gunsten der grösseren sich vergrössern [1]).

---

[1]) Letzterer Satz folgt übrigens unmittelbar aus dem am Schlusse des § 7 bewiesenen, wonach der Conductor grösserer Capacität auch die grössere Inductionsfähigkeit besitzt, und somit durch die Influenzwirkung derselben Ladung, hier J, die grössere Veränderung seiner Ladung C_1 erfahren muss.

In Bezug auf das Verhältnis der Veränderungen der Capacitäten, lässt Folgendes sich vorhersehen.

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass für den Conductor $\mathfrak{A}$, dessen ursprüngliche Capacität C_1 die erheblich grössere ist, die Anordnung der in ihm influenzirten Ladung J von der symmetrischen Gleichgewichtsvertheilung der ursprünglichen Ladung C_1 mehr abweichen wird, als die Vertheilung der Ladung C_1'; dass die Unterschiede dieser beiden Abweichungen für den Conductor $\mathfrak{A}$ grösser sein werden, als für den Conductor erheblich geringerer Capacität $\mathfrak{B}$. Jene Oberflächenpunkte von $\mathfrak{A}$, auf welche die Werthe ν' und ν'' der Function ν sich beziehen, werden somit weiter auseinander liegen, als jene Oberflächenpunkte von $\mathfrak{B}$, auf welche die Werthe μ' und μ'' sich beziehen. Da überdies nach dem am Schlusse des § 2 bewiesenen Satze die dem Conductor $\mathfrak{A}$ zugehörige Function μ, wegen dessen grösserer Capacität bei Fortschreiten über dieselben Distanzen von der Oberfläche von $\mathfrak{A}$ weg, geringere Veränderungen erfährt, als die dem kleineren Conductor zugehörige Function ν, so folgt, dass aus beiden hier angeführten Gründen

$$\frac{\mu''}{\mu'} < \frac{\nu''}{\nu'}$$

sein muss. Durch Division der zwei Proportionen (18) und (21) ergibt sich

$$\frac{C_1' - C_1}{C_1'} : \frac{C_2' - C_2}{C_2'} = \frac{\mu''}{\mu'} : \frac{\nu''}{\nu'},$$

$$1 - \frac{C_1}{C_1'} : 1 - \frac{C_2}{C_2'} = \frac{\mu''}{\mu'} : \frac{\nu''}{\nu'},$$

somit, bei dem eben betrachteten Falle, dass C_1 ursprünglich erheblich grösser ist als C_2,

$$\frac{C_1}{C_1'} > \frac{C_2}{C_2'}$$

und somit

$$\frac{C_1'}{C_2'} < \frac{C_1}{C_2}.$$

Es nimmt somit bei dem Ansteigen der Capacitäten durch die Gegenwart des anderen zur Erde abgeleiteten Conductors die grössere Capacität im allgemeinen im Verhältnis zum ursprünglichen Werthe um weniger zu, als die kleinere Capacität, oder das Verhältnis beider Capacitäten nähert sich bei gleichzeitigem Ansteigen ihrer Differenzen der Einheit. Die hier abgeleiteten Sätze werden für um so geringere Abweichungen beider Capa-

citäten, und auf um so geringere Distanzen beider Conductoren ihre Giltigkeit behalten, je ähnlicher die Formen der sich beeinflussenden Conductoren sind, den Begriff der Aehnlichkeit im Sinne der § 2 und § 3 genommen.

Je näher die beiden Conductoren aneinander rücken, desto grösser werden die echten Brüche μ', μ'', ν', ν'', desto grösser mithin die Capacitäten. Es nähern die Werthe der μ', μ'', ν', ν'' sich hierbei der Einheit, insbesondere bei Conductoren sehr grosser Dimensionen, oder bei so gestalteten Conductoren, bei welchen die Punkte, auf welche die μ', μ'', ν', ν'' sich beziehen, sehr nahe an den einander zugekehrten Enden beider Conductoren sich befinden, wie dies z. B. bei zwei Conductoren der Fall ist, deren jeder bloss eine, dem anderen Conductor zugekehrte Spitze besitzt. In diesen Fällen convergiren die Capacitäten C_1' und C_2' bei fortgesetzter Annäherung beider Conductoren gegen sehr grosse Werthe.

Ausser der Gestalt der Conductoren und ihren Dimensionen spielt auch ihre gegenseitige Configuration eine sehr wesentliche Rolle für die Veränderung ihrer Capacitäten. Als Beispiel hierfür führe ich die Wechselwirkung zweier leitender Ellipsoide an. Stehen dieselben bei gleicher Distanz ihrer nächsten einander zugekehrten Oberflächenpunkte das eine Mal mit den Endpunkten ihrer grössten Axen, das andere Mal mit den Enden der kleinsten einander gegenüber, so ist, da im ersten Falle μ', ν', μ'', ν'', wie unmittelbar zu ersehen, auf von der bezüglichen Oberfläche entferntere Punkte sich beziehen, als im zweiten, die Zunahme der Capacitäten für die letztere Configuration bedeutend grösser als für die erstere.

Das hier hergeleitete Resultat, dass bei der Zunahme der Capacität eines Conductors durch die Gegenwart des anderen zur Erde abgeleiteten die ursprünglich grössere Capacität im allgemeinen auch die grössere Zunahme erfährt, dass also die Unterschiede der Capacitäten zu Gunsten der grösseren sich steigern, hat auf den ersten Blick einen paradoxen Charakter. Es verschwindet aber dieses Befremdende, wenn man die Totaländerungen der Ladungen betrachtet, die bei der wechselseitigen Influenz zweier zu gleich hohem Potential, etwa Eins, geladener Conductoren resultiren. Diese Aenderung beträgt für den Conductor $\mathfrak{A}$

$$D_1 = C_1' - C_1 + J,$$

oder nach Gleichung

$$D_1 = J(1 - \mu'')$$

und analog für den Conductor $\mathfrak{B}$

$$D_2 = J(1 - \nu'').$$

Da aber für den Conductor grösserer Capacität μ langsamer von der Oberfläche desselben abnehmen, somit näher der Einheit bleiben muss, als ν, somit

$$\mu'' > \nu''$$

ist, so folgt, dass der Conductor ursprünglicher grösserer Capacität — der nach (21) auch die grössere Aenderung seiner Capacität erfahren hat — die geringere Totaländerung seiner Ladung erlitten hat, und dass diese für Conductoren sehr grosser Capacität, für welche ja μ'' gegen die Einheit convergirt, nahezu verschwindet. Es stimmt dies vollständig mit jener Vorstellung, die wir mit dem Begriffe eines Conductors grosser Capacität, als eines Reservoirs grossen Fassungsraumes verbinden.

§ 9.

Wechselseitige Influenz zweier auf constanten Potentialen erhaltener Conductoren.

Mit Hilfe der Formeln (22) können wir nunmehr allgemein für zwei sich wechselseitig influenzirende Conductoren, denen ursprüngliche Capacitäten C_1 und C_2 sind, und die auf den constanten Potentialniveaus α und β erhalten werden, die Beträge ihrer schliesslichen Ladungen und die Beträge der Veränderungen ihrer ursprünglichen bestimmen.

Nach den Formeln (15) ergeben sich die ersteren

$$\begin{aligned} A' &= C_1'\alpha + J\beta = \frac{C_1}{1-\mu''\nu'}(\alpha - \beta\nu') \\ B' &= J\alpha + C_2'\beta = \frac{C_2}{1-\mu'\nu''}(\beta - \alpha\mu'). \end{aligned} \tag{15a}$$

Die Beträge der Veränderungen beider Ladungen sind somit

$$\begin{aligned} D_1 &= (C_1' - C_1)\,\alpha + J\beta = -J(\mu''\alpha - \beta) \\ D_2 &= (C_2' - C_2)\,\beta + J\alpha = -J(\nu''\beta - \alpha). \end{aligned} \tag{23a}$$

Die letzteren Formeln ergeben vor allem ganz im Gegensatz zu den Gesetzen der Influenzwirkung eines elektrischen Punktes, für die wechselseitige Influenz zweier auf constanten Potentialen erhaltener Conductoren einen wesentlichen Einfluss der Beträge der Potentialniveaus. Wir finden nach dieser Hinsicht, wenn wir beachten, dass μ'' und ν'' kleiner als Eins sind, dass bei wenig verschiedenen Capacitäten zweier auf verschiedenen hohen Potentialniveaus erhaltener Conductoren durch ihre wechselseitige Influenz der auf dem höheren Potentialniveau befindliche die geringere Aenderung seiner Ladung erfahren wird. Beachten wir weiter, dass je kleiner die Capacität C_2 des Conductors $\mathfrak{B}$ ist, desto

rascher die zugehörige Potentialfunction ν vom Werthe Eins, den sie in dessen Oberfläche annimmt, abnehmen muss, desto kleiner also ν'' sein wird, so sehen wir weiter, dass bei sehr grossen Potentialdifferenzen der auf dem höheren Potentialniveau befindliche Conductor um so kleinere Aenderungen seiner Ladung erfahren wird, je kleiner seine Capacität ist.

Beispielsweise wird eine sehr kleine Kugel, die auf sehr hohem Potentialniveau constant erhalten wird, durch die Influenzwirkung eines zweiten Conductors endlicher Dimensionen nur unendlich kleine Veränderungen ihrer — endlichen — Ladung erfahren, worauf eben die Fiction eines elektrischen Punktes in der Elektrostatik sich gründet. Der Einfluss der Capacität ergibt sich bei wenig verschiedenen Potentialniveaus der sich gegenseitig influenzirenden Conductoren, wie dies am Schlusse des vorigen Paragraphen bereits erkannt worden, dahin, dass dann der Conductor grösserer Capacität die geringere Aenderung seiner Ladung erfahren wird.

Was nun den Sinn, in dem die Aenderungen D_1 und D_2 erfolgen, anlangt, so ist, da J, wie Formel (17) darthut, wesentlich negativ ist, ersichtlich, dass bei entgegengesetztem Zeichen beider Potentiale stets eine Zunahme beider Ladungen eintreten wird.

Hingegen tritt bei der Influenzirung des Conductors $\mathfrak{A}$ durch den auf gleichnamigem Potential β erhaltenen Conductor $\mathfrak{B}$ nicht in allen Fällen eine Verminderung des Betrages der auf ihm befindlichen Ladung ein; sondern nur solange das Potentialniveau des influenzirenden Conductors

$$\beta > \mu'' \alpha$$

ist. Ist hingegen $\beta < \mu'' \alpha$, dann bringt die Anwesenheit des zweiten Conductors trotz der Gleichnamigkeit seines Potentials stets eine Vermehrung der ursprünglich auf dem influenzirten Conductor $\mathfrak{A}$ befindlichen Ladung hervor. Die Ladung des influenzirenden Conductors $\mathfrak{B}$ aber sinkt hierbei in ihrem Betrage.

Man könnte nun glauben, dass die Vermehrung der Ladung von $\mathfrak{A}$ in diesem Falle dadurch bewirkt wird, dass die Ladung des Conductors $\mathfrak{B}$ trotz des gleichen Zeichens seines Potentialniveaus entgegengesetzten Zeichens ist mit jener von $\mathfrak{A}$. Ein Blick auf die Formeln (15 a), welche A' und B' mit α und β verknüpfen, lehrt jedoch, dass, weil $\mu'' > \mu'$ ist, der Conductor $\mathfrak{B}$ dann noch immer gleichnamige Ladung besitzen kann.

Ist also das Potentialniveau des influenzirenden Conductors $\mathfrak{B}$ zwischen den Grenzen eingeschlossen,

$$\mu' < \frac{\beta}{\alpha} < \mu'',$$

so kann er trotz Uebereinstimmung des Zeichens seines Potentialniveaus wie seiner Ladung mit dem des influenzirten Conductors $\mathfrak{A}$, die in diesem vorhandene Ladung durch seine Influenzwirkung vermehren. Der Spielraum, der hierbei dem Verhältnis $\frac{\beta}{\alpha}$ gelassen ist, ist um so grösser, je kleiner die Capacität des Conductors $\mathfrak{A}$ im Verhältnis zu jener von $\mathfrak{B}$ ist, weil dann, wie oben bereits gezeigt, das Verhältnis $\frac{\mu''}{\mu'}$ von der Einheit sich weiter entfernen kann.

§ 10.

Wechselseitige Influenz zweier isolirter Conductoren.

Die vorstehend gegebene Lösung des Influenzproblems für zwei auf constanten Potentialen erhaltene Conductoren schliesst auch die Lösung[1]) einer zweiten Aufgabe in sich, die Potentialniveaus, auf denen zwei isolirte Conductoren unter ihrer wechselseitigen Induction sich befinden, zu bestimmen.

Man findet diese, indem man die Gleichungen (15a) des § 9 nach α und β auflöst, nachdem man A' und B' mit den wegen der Isolirung der Conductoren unveränderlichen Beträgen der auf sie gebrachten Ladungen A und B zusammenfallen liess.

Man erhält so die Potentialniveaus

$$\alpha = \frac{A\,C_2 - JB}{C_1\,C_2 - J} \qquad\qquad (15a$$

$$\beta = \frac{B_1\,C_1 - JA}{C_1\,C_2 - J}.$$

1) In manchen Fällen gelangt man zur Lösung dieses Problems einfacher durch directe Anwendung der Formel (13) des § 7. Ein solcher Fall ist z. B. die wechselseitige elektrostatische Influenz zwischen zwei isolirten, ursprünglich ungeladenen Conductoren, die der Influenzwirkung eines elektrischen Punktes unterworfen, durch diese auf in § 3 bestimmte Potentialniveaus gebracht sind. Betrachtet man speciell für zwei ellipsoidisch gestaltete Conductoren, wie sie in dem am Schlusse des § 4 behandelten Pfaundler'schen Experimente verwendet werden, die Aenderungen, die diese Potentialniveaus durch ihre wechselseitige Induction erfahren, so ist leicht zu übersehen, dass bei der dort gewählten Anordnung, wo beide Ellipsoide mit ihren grossen Axen einander parallel stehen, diese Aenderung verschwindend klein ist; denn dann schneiden die dem einen Ellipsoid zugehörigen Niveauflächen auf dem anderen Flächenstreifen heraus, die gleiche Beträge positiver und negativer Ladung enthalten, und in Folge dessen in ihrer Influenzwirkung sich zerstören. Pfaundler's Experiment ist sonach durch die am Schlusse des § 4 durchgeführte Betrachtung exact erledigt, ohne einer Correctur, die aus der Wechselwirkung beider Conductoren resultiren könnte, zu bedürfen.

Unter Benutzung der Formeln (22) ergeben sie sich unter den Formen

$$\alpha = \frac{1}{C_1}\frac{A+\mu' B}{1-\mu'\nu'} = \frac{1}{C_1}\frac{1-\mu''\nu'}{1-\mu'\nu'}(A+\mu' B)$$
$$\beta = \frac{1}{C_2}\frac{B+\nu' A}{1-\mu'\nu'} = \frac{1}{C_2}\frac{1-\mu'\nu''}{1-\mu'\nu'}(B+\nu' A) \qquad (15c$$

Um den Vorgang der elektrostatischen Influenz zwischen zwei Conductoren klar zu legen, wollen wir zunächst an diese Formeln einige specielle Fragen anknüpfen.

In dieser Hinsicht sei zunächst die Frage gestellt, nach jener Elektricitätsmenge auf 𝔅, die diesem Conductor, wenn er der Influenz von 𝔄 unterliegt, das Potential Null ertheilt, oder was dasselbe ist, nach dem Betrage jener Ladung B_t, die in ihm, wenn zur Erde abgeleitet, durch den Conductor 𝔄 influenzirt wird.

Wir finden aus (15c)

$$B_t = -\nu' A.$$

Da ν' den Werth von ν angibt, der für Oberflächenpunkte von 𝔄 gilt, die näher an 𝔅 gelegen sind, als die Symmetriepunkte der ursprünglichen Gleichgewichtsvertheilung der Ladung A, so folgt daraus, dass die in einem zur Erde abgeleiteten Conductor durch einen isolirten influenzirte Ladung grösser ist, als wäre die influenzirende Ladung in ihrer ursprünglichen Gleichgewichtsvertheilung fest mit den Punkten des Conductors verbunden.

Bringt man auf einen isolirten Conductor 𝔅 die Ladung B_t — man kann dies dadurch bewirken, dass man ihn in einer gewissen Entfernung von 𝔄, charakterisirt durch den Werth ν_1', zur Erde ableitet und dann isolirt — nähert man ihn dann aus dieser ersten Position dem Conductor 𝔄, so dass ν' den Werth $\nu_2' > \nu_1'$ annimmt, so ist

$$B_t + \nu_2' A > 0,$$

d. h. für diese Position wird das Potentialniveau von 𝔅 als positiv sich erweisen. Bringt man ihn hingegen isolirt in eine entferntere Position, charakterisirt durch $\nu_2' < \nu_1'$, so ist

$$B_t + \nu_2' A < 0,$$

das Potentialniveau des isolirten Conductors 𝔅 erweist sich dann negativ [1]).

Ist der influenzirte Conductor 𝔅 isolirt und ursprünglich ungeladen, so erhebt er sich unter der Influenz von 𝔄 auf das Potentialniveau

$$\beta = \frac{\nu' A}{C_2}\frac{1-\mu'\nu''}{1-\mu'\nu'} = -\frac{B_t}{C_2}\frac{1-\mu'\nu''}{1-\mu'\nu'}.$$

1) S. Ayrton, Handbuch der praktischen Elektricität. Deutsch von M. Krieg. Cap. III, § 65, S. 132.

Hierbei wird aber das Potentialniveau des Conductors 𝔄 von seinem ursprünglichen Werthe $\alpha_0 = \frac{A}{C_1}$ auf

$$\alpha = \frac{A}{C_1} \frac{1 - \mu'' \nu'}{1 - \mu' \nu'}$$

gebracht, somit, da $\mu'' > \mu'$ sein muss, durch die Influenz des isolirten, ursprünglich ungeladenen Conductors 𝔅 in seinem absoluten Betrage stets sinken.

Die Beträge der Aenderungen der Potentialniveaus der sich influenzirenden isolirten Conductoren sind, wenn man sich vergegenwärtigt, dass die ihnen, wenn ihrer wechselseitigen Influenz entzogen, zukommenden Potentialniveaus

$$\alpha_0 = \frac{A}{C_1}, \quad \beta_0 = \frac{B}{C_2}$$

sind,

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \alpha - \alpha_0 = \frac{1}{1 - \mu' \nu'} \left[B \frac{\mu'}{C_1} - \frac{A}{C_1} \nu' (\mu'' - \mu') \right] \\ \delta_2 &= \beta - \beta_0 = \frac{1}{1 - \mu' \nu'} \left[A \frac{\nu'}{C_2} - \frac{B}{C_2} \mu' (\nu'' - \nu') \right] \end{aligned} \quad (24$$

Wir ersehen aus diesen Formeln zunächst, was den Sinn, in dem die Aenderungen erfolgen, anlangt, dass, ganz im Gegensatz zu den bei auf constanten Potentialen erhaltenen Conductoren sich ergebenden Resultaten, die Influenz eines isolirten Conductors durch einen entgegengesetzt geladenen stets ein Sinken des absoluten Betrages des Potentialniveaus bewirkt, dass hingegen die Influenz durch einen gleichnamig geladenen im Allgemeinen — die Ausnahmsfälle sollen weiter unten untersucht werden — ein Ansteigen des ursprünglichen Potentialniveaus zur Folge hat. Sind die Werthe von C_1 und C_2 erheblich von einander verschieden, C_1 etwa erheblich grösser als C_2, dann wird, wie oben § 8 nachgewiesen, $\mu' > \nu'$, $\mu'' > \nu''$, hingegen $(\mu'' - \mu') < (\nu'' - \nu')$ sein. Da nun wegen der Relation (18)

$$\frac{\mu'}{C_1} = \frac{\nu'}{C_2}$$

die ersten Theile der Potentialänderungen δ_1 und δ_2 bei gleicher Intensität der Ladungen $A = B$ einander gleich sind, so ist aus den Formeln (24) ersichtlich, dass bei gleicher Intensität der Ladung der sich influenzirenden, isolirten Conductoren der Conductor erheblich grösserer Capacität 𝔄 auch die grössere Vermehrung des absoluten Betrages seines Potentialniveaus erfahren wird. Bei gleich grosser, aber

entgegengesetzter Ladung $A = -B$ beider Conductoren, sinken die absoluten Beträge beider Conductoren, aber die des Conductors grösserer Capacität um weniger. Da nun bei gleichem Betrage der Ladungen der Conductor grösserer Capacität das dem absoluten Betrage kleinere Potentialniveau besitzt, so folgt daraus, dass durch die wechselseitige Influenz zweier isolirter Conductoren wesentlich verschiedener Capacitäten und gleicher Ladung die ursprünglich zwischen ihnen bestehende Potentialdifferenz ihrem absoluten Betrage nach sich vermindert.

Was den Einfluss des Betrages der Ladung auf die Veränderung des Potentialniveaus anlangt, so ist aus den Formeln (24) ersichtlich, dass bei wenig verschiedenen Capacitäten die wechselseitige Influenz in allen Fällen für den stärker geladenen die geringere Veränderung seines Potentialniveaus bewirkt. Bei gleichen Zeichen der Ladungen beider Conductoren bewirkt die gegenseitige Influenz ein Ansteigen der Potentialniveaus beider Conductoren, doch bei dem Conductor stärkerer Ladung, und somit ursprünglich höheren Potentialniveaus, die geringere, so dass abermals die Potentialdifferenzen beider Conductoren geringer werden; da bei entgegengesetztem Zeichen beider Ladungen, und somit der beiden ursprünglichen Potentialniveaus, ein Sinken der absoluten Beträge beider Potentialniveaus und somit auch der Potentialdifferenz in erhöhtem Maasse eintritt, so kann man sagen, dass in allen Fällen die Tendenz der wechselseitigen Influenz zweier isolirter Conductoren dahin gerichtet ist, die Potentialdifferenzen derselben gegeneinander zu verkleinern, selbst in dem Falle, wo durch die Influenz ihre Potentialniveaus sich erhöhen.[1])

Einen wesentlichen Einfluss übt auf die Veränderung des Potentialniveaus die wechselseitige Configuration der Conductoren für zwei Ellipsoide; z. B. wird bei derselben Ladung und bei derselben Distanz ihrer äussersten, einander zugekehrten Oberflächenpunkte diese Veränderung grösser sein, wenn sie mit den Endpunkten ihrer kleinsten Axen einander gegenübergestellt sind, als wenn sie die Endpunkte ihrer grössten Axen einander zukehren, denn für den ersten Fall gelten μ', ν', μ'', ν'' für Punkte, die der Oberfläche des bezüglichen Conductors näher liegen, und daher liegen ihre Werthe der Einheit näher als im zweiten Falle, in welchem überdies die Differenzen $\mu''-\mu', \nu''-\nu'$, welche die Beträge der Aenderungen mindern, grösser sind, als im ersteren.

Die Formeln (24) ergeben die oben bereits erwähnte Möglichkeit, dass ein isolirter Conductor durch die Influenzwirkung eines zweiten,

1) Sind die ursprünglichen Potentialniveaus beider Conductoren einander gleich, indem die auf die Conductoren gebrachten Ladungen wie ihre Capacitäten sich verhalten, dann erfährt, wie dies auch schon in § 9 ersichtlich gewesen, der Conductor grösserer Capacität die kleinere Aenderung seines Potentialniveaus.



gleichnamig geladenen, im Gegensatze zur allgemeinen Regel ein Sinken seines Potentialniveaus erfahren kann. Es wird der Conductor 𝔄 ein solches Sinken seines Potentialniveaus bei einer bestimmten Configuration beider Conductoren erfahren für ein Grössenverhältnis beider Ladungen.

$$\frac{B}{A} < \frac{\nu'}{\mu'} \frac{(\mu'' - \mu')}{1 - \mu'' \nu'} < \frac{C'_2}{C'_1} \frac{\mu'' - \mu'}{1 - \mu'' \nu'} < \frac{C_2}{C_1} (\mu'' - \mu'). \qquad (25$$

Es wird dies Grössenverhältnis bei gleichnamigen Ladungen der Einheit um so näher rücken können, je grösser C'_2 im Verhältnis zu C_1 ist, weil dann überdies auch gleichzeitig nach dem im § 8 Gesagten die Differenz $\mu''-\mu'$ grösser wird. Das Sinken des Potentialniveaus von 𝔄 wird in dem gleichnamig, aber schwächer, geladenen Conductor 𝔅, der wegen seiner überdies grösseren Capacität das niedrigere Potentialniveau besitzen muss, von einem Ansteigen desselben begleitet. Wir sehen somit auch in diesem Falle die Tendenz der zwischen zwei isolirten Conductoren bestehenden Influenzwirkung, die zwischen beiden bestehende Potentialdifferenz zu verkleinern.

§. 11.

Bedingungen für die wechselseitige Anziehung zweier gleichnamig geladener Conductoren.

Mit der soeben bewiesenen Möglichkeit, dass die Influenzwirkung eines isolirten Conductors für einen mit ihm gleichnamig geladenen, gleichfalls isolirten, abweichend von der allgemeinen Regel ein Sinken des absoluten Betrages eines Potentialniveaus zur Folge haben kann, hängt auch die weitere Möglichkeit zusammen, dass zwei isolirte, gleichnamig geladene Conductoren für ein bestimmtes Grössenverhältnis ihrer Ladungen sich anziehen können. Ein analoger Zusammenhang besteht bei zwei constant auf gleichnamigen Potentialen erhaltenen Conductoren für die am Schlusse des § 9 erkannte Möglichkeit einer ausnahmsweisen Verstärkung der Ladun geines derselben durch die vom anderen ausgeübte Influenz, einerseits, und der Möglichkeit einer wechselseitigen Anziehung zweier auf gleichnamigen Potentialen erhaltener Conductoren andrerseits. Der Zusammenhang beider Anomalien und die Bedingungen für den Eintritt der letzteren soll nunmehr und zwar für den Fall isolirter Conductoren erörtert werden, da er im anderen Falle in ganz analoger Weise sich erledigt.

Zunächst ist aus den Formeln (12) und (13) des § 7 ersichtlich, dass der abweichende Effect in der Influenzwirkung, die am Schlusse des § 9 und des § 10 nachgewiesen worden, daher rührt, dass der influenzirende Conductor 𝔅 mit einer heterogenen Ladung bedeckt ist, die an der dem Conductor 𝔄 zugewendeten Seite Flächendichte entgegen-

gesetzten, auf der abgewendeten Seite Flächendichte gleichen Zeichens, wie die Ladung A besitzt, und dass trotz des Überwiegens der gleichnamigen Ladung in 𝔅, die Influenzwirkung der ersteren Flächendichte, wegen des in den zugehörigen Flächenelementen herrschenden höheren Werthes von μ der überwiegende wird.

Fassen wir nun zunächst den Fall ins Auge, dass der Conductor 𝔅 isolirt und ursprünglich ungeladen ist; es tritt dann in Folge der Influenzwirkung an seiner Oberfläche positive und negative Ladung auf in einander gleich grossen Beträgen — sein Potentialniveau ist dann immer gleich bezeichnet mit dem von 𝔄 —. Jene Linie aber, welche die Oberflächenpunkte entgegengesetzter von jener gleichnamiger Flächendichte trennt, läuft nicht in der Mitte der Oberfläche von 𝔅, sondern befindet sich von dieser gegen 𝔄 hin verschoben. Es ist hieraus ersichtlich, dass die Anzahl der vom Conductor 𝔅 ausgehenden Kraftlinien, absolut genommen, auf der 𝔄 zugewendeten Oberflächenhälfte grösser ist, als auf der abgewendeten. Mithin ist die Concentration der Kraftlinien auf der 𝔄 zugewendeten Seite grösser als auf der 𝔄 abgekehrten.

Beachtet man nun, dass nach einem Thomson'schen Satz die Spannung, die die Oberflächenelemente eines Conductors in einem elektrostatrischen Felde normal nach auswärts angreift, $2\pi\sigma^2$ ist, somit dem Quadrate der Concentration der Kraftlinien proportional geht, so folgt hieraus, dass der ursprünglich ungeladene isolirte Conductor auf seiner 𝔄 zugewendeten Seite den stärkeren Zug erfahren, somit angezogen werden wird. Eine schwache, gleichnamige Ladung B auf 𝔅 gebracht, wird sich symmetrisch über dessen Oberfläche ausbreiten, und somit das Fortbestehen der Möglichkeit einer Anziehung des Conductors 𝔅 gestatten können.

Es erscheint mir überaus plausibel, dass die Möglichkeit der wechselseitigen Anziehung der gleichnamig geladenen Conductoren 𝔄 und 𝔅 stets besteht, so lange der letztere in Folge der durch die Formel (25) bestimmten Verhältnisse durch seine Influenzwirkung das Potentialniveau des Conductors 𝔄 verringert. Denn diese Veränderung ist, am Schlusse des § 3 nachgewiesen, wenn sie im besonderen durch einen — entgegengesetzt geladenen — elektrischen Punkt bewirkt wird, begleitet von einer abweichenden Anordnung der Kraftlinien auf dem influenzirten Conductor, nämlich einer Zusammendrängung derselben in die dem influenzirenden Punkte zugekehrte Oberflächenhälfte; es erscheint überaus wahrscheinlich, dass ein Gleiches auch in dem soeben betrachteten Falle der Influenzwirkung von 𝔅 auf 𝔄 statt hat, dass auch hier die Concentration der Kraftlinien in der 𝔅 zugekehrten Oberflächenhälfte von 𝔄 die grössere ist, und somit zu Folge dem Thomson'schen Satze eine Anziehung von 𝔄 gegen 𝔅 erfolgt.

Der immerhin hypothetische Charakter letzteren Satzes veranlasst mich, in exacter Weise eine wenngleich bloss hinreichende Bedingung aufzustellen, für jenes einer bestimmten Configuration zugehörige Grössenverhältnis der Ladungen zweier isolirter Conductoren, bei welchem trotz der Gleichnamigkeit derselben eine Anziehung eintreten kann.

Ein System isolirter Conductoren stellt ein im Sinne des Princips der Erhaltung der Energie conservatives System dar; daher muss ein Ansteigen des Betrages der elektrischen Gesammtenergie für irgend eine Aenderung der relativen Lage beider Conductoren anzeigen, dass diese nur durch Anwendung einer Arbeit von aussen her sich vollziehen lasse; sinkt aber der Betrag derselben für eine Configurationsänderung beider Conductoren, dann wird diese sich „von selbst" vollziehen, d. h. beim Vollzuge dieser Lagenänderung wird das System eine dem Sinken seiner Energie gleich grosse Arbeit nach aussen hin leisten können.

Nun ist aber die Energie des von beiden isolirten Conductoren gebildeten elektrischen Systems

$$E = \frac{1}{2} A\alpha + \frac{1}{2} B\beta.$$

Eine exacte Entscheidung über Anziehung oder Abstossung beider Conductoren in der gegebenen Configuration wäre nur möglich durch Bestimmung des Zeichens des Differentialquotienten von E nach dem die relative Lage beider Conductoren bestimmenden Parameter, über welchen wir aber im allgemeinen nichts aussagen können.

Eine hinreichende Bedingung ergibt sich aber durch folgende Ueberlegung.

Die Energie des aus beiden isolirt geladenen Conductoren gebildeten elektrischen Systems, wenn sie in unendlicher Distanz, also unbeeinflusst voneinander, sich befinden, ist

$$E_0 = \frac{1}{2} A\alpha_0 + \frac{1}{2} B\beta_0.$$

Es ist somit die Arbeit, die aufgewendet werden muss, beide Conductoren aus unendlicher Entfernung in die fragliche Configuration zu bringen,

$$E - E_0 = \frac{1}{2} A\delta_1 + \frac{1}{2} B\delta_2$$

und das Zeichen dieses Ausdruckes entscheidet darüber, ob das Gelangen in die schliessliche Configuration nur durch Anwendung einer Arbeit von aussen her oder „von selbst" stattgefunden hat. Im letzteren Falle sprechen wir von einer Anziehung, unter der das Gelangen in die schliessliche Configuration vor sich gegangen ist.

Eine **hinreichende** Bedingung für die Anziehung beider Conductoren in einer gegebenen Configuration ist somit das negative Zeichen von

$$A\,\delta_1 + A\,\delta_2 = -\frac{A^2}{C_1}\,\nu'\,(\mu'' - \mu') + 2\,A\,B\,\frac{\mu'}{C_1'} - \frac{B^2}{C_2}\,\mu'\,(\nu'' - \nu').$$

Die Werthe des Verhältnisses beider Ladungen, für welche dieser Ausdruck sein Zeichen ändert, sind

$$\frac{B}{A} = \frac{C_2}{\mu'\,(\nu'' - \nu')}\left[\frac{\mu'}{C_1'} \pm \sqrt{\frac{\mu'^2}{C_1'^2} - \frac{\mu'\,\nu'}{C_1\,C_2}\,(\mu'' - \mu')\,(\nu'' - \nu')}\right]$$

Ist somit

$$\frac{B}{A} < \frac{C_2}{C_1\,(\nu'' - \nu')}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{C_1'\,C_2'}{C_1\,C_2}\,(\mu'' - \mu')\,\nu'' - \nu')}\right], \qquad (26$$

dann tritt auch bei gleichnamiger Ladung beider Conductoren für die durch μ', μ'', ν', ν'' bestimmte Configuration eine gegenseitige Anziehung derselben ein.

Diese obere Grenze des Ladungsverhältnisses[1]) ist jedenfalls zu niedrig, denn für dieses gelangt der Conductor 𝔅 in die bezügliche Configuration „von selbst" nicht bloss aus der unendlich benachbarten, was zur Constatirung der Anziehung genügen würde, sondern schon aus sehr grosser Entfernung. Sie lässt sich, wenn man Formel (26) nach dem Binomialsatze entwickelt, und berücksichtigt, dass $\mu'' - \mu'$ und $\nu'' - \nu'$ sehr klein sein müssen, näherungsweise darstellen als

$$\frac{B}{A} < \frac{C_2'}{2\,C_1}\,(\mu'' - \mu').$$

Es kann also jenes Ladungsverhältnis, das für eine bestimmte Configuration eine **hinreichende** Bedingung für die **wechselseitige Anziehung zweier gleichnamig geladener Conductoren** darstellt, der Einheit um so näher rücken, je grösser der Unterschied beider Capacitäten ist, da dann $\frac{C_2}{C_1}$ und auch $\mu'' - \mu'$ grössere Werthe erhalten; es wird ferner, da C_2' mit wachsender Annäherung beider Conductoren stetig wächst, für zwei gegebene Conductoren der Einheit um so näher rücken, je geringer ihre Distanz von einander wird.

1) Hierbei ist B als die kleinere Ladung angenommen; die zweite Wurzel gibt einen zusammenfallenden Werth.

Versuche mit einem elektrischen Funken und einer kleinen Flamme [1]).

Von

C. A. Mebius.

Dass sich ein elektrischer Funken leichter bildet, wenn die Funkenstelle von einer passenden Lichtquelle belichtet wird, hat man seit der Zeit, wo H. Hertz seine bekannten Untersuchungen hierüber [2]) veröffentlichte, allgemein für eine Wirkung des sich gradlinig fortpflanzenden Lichtes gehalten.

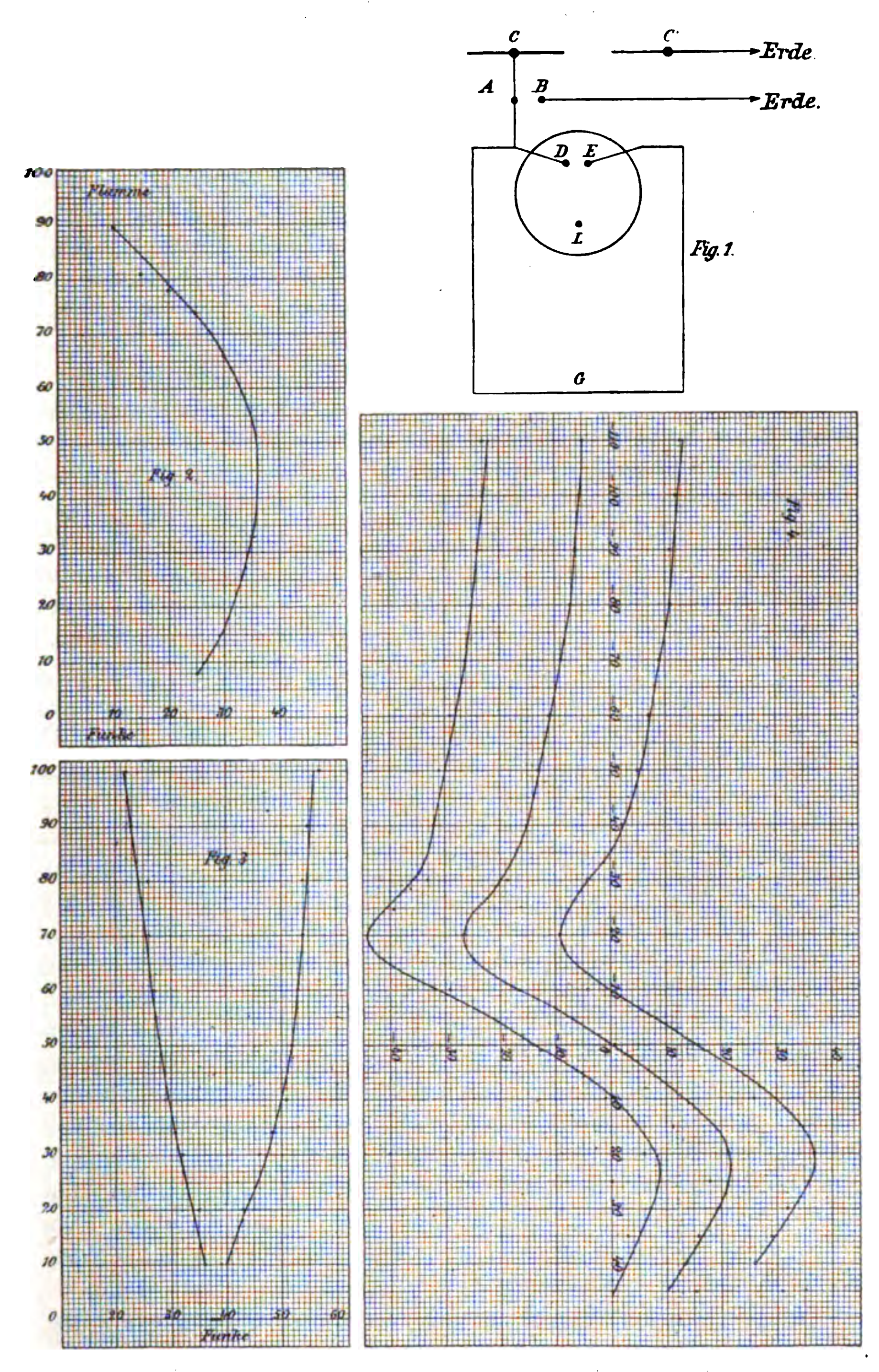
In einer früheren Arbeit [3]) bin auch ich von dieser Ansicht ausgegangen, aber während derselben zeigten sich einige Eigenthümlichkeiten, deren nähere Untersuchung mich davon überzeugt haben, dass man jene Ansicht in allen Fällen nicht für richtig halten darf. Der von der Lichtquelle herrührende Einfluss auf den elektrischen Funken erweist sich nämlich als von elektrischen Kräften abhängig, und das Phänomen muss daher als ein rein elektrisches aufgefasst werden.

In ebengenannter Arbeit wollte ich den Einfluss der Intensität der Belichtung untersuchen. Bei einem Versuche benutzte ich eine Gasflamme als Belichtungsmittel. Die Funken, die belichtet wurden, bildeten sich zwischen den Kugeln eines Funkenmikrometers, das sich in einem Gehäuse mit beweglichem Deckel befand. In der einen Seitenwand des Deckels ware in Loch gebohrt, durch welches die Lichtstrahlen eindringen konnten. Die Fähigkeit der Gasflamme, auf den Funken zu wirken, prüfte ich zuerst daran, ob sie den Funken wieder zu zünden vermöchte, wenn dieser ohne Belichtung nicht mehr überschlug. Die Flamme zeigte sich unwirksam, wenn der Deckel aufgesetzt war; wenn ich aber den Deckel und das damit zusammenhängende Brettchen, in dem sich das Loch befand, wegnahm, so zeigte sich die Flamme wirksam, den Funken wieder zu zünden. Machte ich die Funkenlänge so kurz, dass jeder Funke überschlug, ergaben sich in beiden Fällen auch verschiedene Ausschläge an einem in der Leitung eingeschalteten Galvanometer.

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus den Verh. d. Kgl. schwed. Akad. Bd. 15 (1889).
2) H. Hertz, Wied. Ann. Bd. 31 S. 983. 1887.
3) Mebius, Bihang till K. Sv. Vet.-Akad. Handl., Bd. 14, Afd. I, Nr. 10.

Obgleich also der gradlinige Weg des Lichtes nicht verdeckt wurde, konnte dennoch die Flamme unwirksam sein. Die Grösse der Oeffnung, durch welche das Licht zum Funken hereindrang, war also nicht ohne Einfluss. Um die Belichtung zu begrenzen, schraubte ich die Gasflamme so viel wie möglich herunter. Wurde das Gehäuse weggenommen, so zeigte es sich, dass die kleine Famme noch immer im Stande war, den Funken zu zünden, wenn man aber von der Seite einen Gegenstand, z. B. eine Glasscheibe, näherte, so erlosch der Funke, noch ehe die Verbindungslinie zwischen der Flamme und dem Funken verdeckt wurde. Auf dieselbe Weise wirkte ein Glasstab, und man konnte mit der Spitze desselben in der Luft ein Gebiet bestimmen, innerhalb dessen der Stab den Funken auslöschte. Die Grenzlinien dieses Gebietes in der Ebene durch den Funken und die Flamme endigten auf der einen Seite in der Flamme, auf der anderen in dem Funken. Auf der einen Seite jedoch entfernte sich die Grenzlinie bedeutend mehr nach der Seite, als auf der anderen. Auf dem Tische, auf welchem sich der Funkenmikrometer befand, hatte auch die Holtz'sche Maschine, welche die Funken erzeugte, ihren Platz, und die Seite, auf der sich die Maschine befand, war es, auf der die Grenzlinie am meisten von der Verbindungslinie zwischen dem Funken und der Flamme sich entfernte.

Um den störenden Einfluss der Maschine aufzuheben, wurde die Leitung, in welcher sich der Funke bildete, in ein grosses nebenliegendes Zimmer, das im übrigen vollständig leer war, verlegt. Die vorher benutzten Vorrichtungen wurden im übrigen unverändert beibehalten. Sie sind in der Fig. 1 ersichtlich. C und C' sind die beiden, mit Condensatoren verbundenen Conductoren einer Holtz'schen Maschine. C' ist mit der Erde verbunden und C mit der Kugel A, die durch eine Schraubenvorrichtung der Kugel B genähert oder von ihr entfernt werden kann. Diese wird ihrerseits mit der Erde in leitende Verbindung gebracht, entweder direct oder durch einen Verbindungsdraht mit C'. Da eine genaue Kenntnis der Funkenlänge AB nicht nothwendig war, liess ich bei vielen Versuchen die Funken direct zwischen den Conductoren C und C' überschlagen, wobei AB mit dem Zuleitungsdraht entfernt werden konnte. D und E sind die Kugeln eines allgemeinen Ausladers. Der eine der Arme des Ausladers stand in leitender Verbindung mit dem Conductor C, und durch die Leitung DGE mit E, der zweiten Kugel des Ausladers. Wenn die Maschine in Gang gesetzt wird, wird die ganze Leitung DGE geladen, und wenn der Funke bei AB überspringt, trifft dasselbe bei DE ein, wenn nur der Abstand hier nicht zu gross ist. Die Leitungsdrähte bestanden aus Kupferdrähten, die mit Guttapercha überzogen und an Siegellackstangen auf beweglichen Holzklötzen befestigt waren. Da die Funken-


C
C'
Erde.
A
B
Erde.
D
E
L
Fig. 1.
G
Flamme
Fig. 2
Funke
Fig. 3
Funke
Fig. 4

länge DE bei einer gegebenen Schlagweite AB in demselben Grade grösser wird, wie sich die Länge der Leitung DGE vergrössert, war diese im allgemeinen 13 m. Machte man die Leitung kürzer, so änderte sich die Erscheinung hierdurch nicht, aber es war dann mit grösseren Schwierigkeiten verbunden, die Funkenlänge richtig abzupassen. Bei den folgenden Versuchen war diese gewöhnlich 1 à 4 mm. Die Kugeln des Ausladers waren aus Messing (2,23 cm im Durchmesser), und an 28,5 cm langen und 0,635 cm dicken, von Glasröhren umgebenen Messingstangen befestigt. Diese bogen sich horizontal in einem stumpfen Winkel über die runde Scheibe eines Stativs, an dem der Auslader befestigt war. Bei den späteren Versuchen wurde in dieser Hinsicht eine Veränderung vorgenommen. Zwei Bleikugeln, 1,23 cm im Durchmesser, waren an feinen Kupferdrähten befestigt, die durch 43 cm lange Glasröhren gesteckt wurden. In die Röhren wurde geschmolzenes Siegellack eingesogen, so dass das Ganze genügende Festigkeit erhielt. Diese Arme wurden an einem besonderen Stativ befestigt, und gingen horizontal und beinahe parallel von der Leitung aus. Die Kugeln, zwischen denen die Funken überschlugen, waren also soviel als möglich freistehend. Die Scheibe des Stativs, welche sich 34 cm unterhalb der Kugeln befand, war mit einem, in Quadratmillimeter eingeteilten Papier bedeckt. Die Linien waren parallel mit der Symmetrielinie zwischen den Kugeln DE oder standen rechtwinklig gegen dieselbe.

Als Belichtungsmittel benutzte ich eine kleine Gasflamme. Der dabei gebrauchte Brenner war auf folgende Weise eingerichtet. Die knieförmige Zuleitungsröhre eines gewöhnlichen Bunsen'schen Brenners wurde an den Rand eines viereckigen Holzklotzes geschraubt. An dem verticalen Theile der Röhre war eine verticale Glasröhre befestigt, die an ihrem oberen Ende in eine Capillarröhre auslief. Die Gasflamme, die bei diesem Brenner entstand, konnte, wenn man den Gaszufluss verminderte, sehr klein gemacht werden. Gewöhnlich war die Flamme sphärisch mit einem Radius von 1 à 2 mm, so dass die Lichtmengen, die von derselben ausgesandt wurden, minimal waren. Die relativen Coordinaten der Flamme und des Funkens waren leicht dadurch zu bestimmen, dass die Kanten des Fussklotzes des Brenners mit den Linien des carrirten Papiers parallel gestellt wurden und zwar so, dass die Spitze des Brenners sich in der Mitte zwischen den beiden Kugeln befand. Die Coordinaten einer bestimmten Ecke des Klotzes sind dann die Coordinaten des Funkens, und die Coordinaten derselben Ecke geben, wenn der Fussklotz mit sich selber parallel verschoben wird, die Coordinaten der Flamme an.

Auf einem anderen Holzklotze E, der eben so gross war wie der, welcher den Brenner trug, war eine verticale Glasröhre F befestigt.

Diese trug, mit Hilfe eines Korks G, an ihrem oberen Ende die Glasröhre H, die durch den Kork G in die Röhre F hineinragte. Hierdurch wurde es leicht, dieser Röhre die gewünschte Höhe zu geben. An ihrem oberen Ende war ein Kork K befestigt, in welchem quadratische Scheiben von verschiedenem Material festgemacht werden konnten. Dasselbe Fussgestell EF wurde auch dazu benutzt, um Stäbe zu tragen, die dann entweder direct oder vermittelst eines Korks in der Röhre F befestigt wurden. Die Coordinaten für die verticale Kante einer Scheibe wurden dadurch bestimmt, dass der Funke, die Kante und die Flamme in einer geraden Linie aufgestellt wurden, z. B. längs der Ordinatenachse auf dem carrirten Papier, wonach die Abscisse einer Ecke des Klotzes E abgelesen wurde. Darauf wurde dieser so gestellt, dass die Ebene der Scheibe durch die Flamme ging, worauf die Ordinate derselben Ecke abgelesen wurde. Der Fussklotz wurde dabei so verschoben, dass seine Kanten parallel mit den Coordinatenaxen waren; die Scheibe war vertical gestellt, und zwar parallel mit einer der Kanten des Klotzes.

Versuch I.

Die Kugeln des Ausladers befanden sich in einer solchen Entfernung von einander, dass die Funken eben gehindert wurden, überzuspringen, wenn sich nichts auf dem Stativ befand. Wurde nun die Flamme in einer Entfernung von 10 cm von der Funkenstelle auf der Mittellinie (der Symmetrielinie zwischen den Kugeln D und E) aufgestellt, so schlugen die Funken über. Jetzt wurde eine verticale Glasscheibe, deren Dicke 0,134 cm und deren Fläche 10 qcm betrug, von der Seite so genähert, dass ihre Ebene rechtwinklig gegen die Mittellinie stand. Die Höhe der Scheibe war so, dass die Mittelpunkte der verticalen Kanten sich in derselben Höhe befanden wie die Flamme und der Funke. Der Funke erlosch, wenn die der Mittellinie am nächsten liegende Kante der Scheibe die in folgender Tabelle angegebenen Coordinaten hatte. Ich nehme dabei den Funken zum Anfangspunkt und die Mittellinie zur Coordinataxe.

Abscisse	Ordinate
10	89,5
15	81
20	78
25	74
30	66
35	33
40	—
25	8

In Fig. 2 (s. S. 223) sind die Beobachtungen graphisch dargestellt. Die Punkte geben die beobachteten Einstellungen an, und die Curve ist aus freier Hand so gezeichnet, dass sie sich so genau als möglich den Beobachtungen anschliesst.

Wenn der Rand der Scheibe von der Grenzlinie der Mittellinie genähert wird, so springt der Funke auch jetzt nicht über. Man sieht aus der Curve, dass der Funke erlöscht, noch ehe die Kante der Glasscheibe den gradlinigen Weg des Lichtes von der Flamme bis zum Funken verdeckt. In der Mitte zwischen der Flamme und dem Funken ist der Einfluss der Scheibe am grössten, und sie löscht den Funken aus, wenn sich ihr Rand in einer Entfernung von 36 mm von der Mittellinie befindet. Je näher die Scheibe an die Flamme oder den Funken herankommt, desto näher muss sie der Mittellinie gebracht werden, ehe der Funke erlöscht. (Vergl. Versuch 4.)

Platten aus anderem Material ergaben analoge Resultate. Wenn nichts anderes bemerkt wird, hatten die Platten die Form eines Quadrats, dessen Seite 10 cm gross war. Die Platten bestanden aus Zink, Eisendrahtnetz, Glas von drei verschiedenen Dicken, Gelatine, Pappe, Pappe mit Stanniolüberzug auf der einen Seite, Glimmer, Ebonit, Quarz; auch die Hand war wirksam, den Funken auszulöschen. Die Kanten der Zinkplatte und des Drahtnetzes waren mit Siegellack überzogen. Die Form der Glimmer- und der Ebonitplatte war die eines Rechtecks; die Form der Quarzplatte dagegen unregelmässig.

Was die Genauigkeit der Einstellung betrifft, so war es im allgemeinen möglich, die Grenzlinien bis auf 0,5 mm genau zu bestimmen. Bisweilen traten jedoch bei neuer Einstellung sehr bedeutende Abweichungen ein. So löschte einmal die Pappscheibe den Funken aus, als der Rand 2 cm von der Mittellinie entfernt war. Nachdem die Platte ganz nahe an den Auslader herangeschoben war, vermochte die Platte in keiner Stellung den Funken auszulöschen, wenn die Kante eine Entfernung von 2 cm von der Mittellinie hatte. Nachdem die Platte einige Male durch die Flamme eines Bunsen'schen Brenners hindurch geführt worden, schnitt die Grenzlinie die Abscisse 2 cm wieder in 2 Punkten. Die Hand, die das Stativ der Platte führte, übte auch einen gewissen Einfluss aus, weshalb sie nach jeder Einstellung entfernt werden musste, ehe man beurtheilen konnte, ob die Grenzlinie erreicht war, oder nicht. Berührte man mit der Hand die Glasröhre F, die die Platte trägt, so hörten in einer gewissen Lage die Funken einen Augenblick auf, fingen dann aber wieder an. Berührte man die Platte selbst, so erlosch der Funken, wenn sich die Platte in einer grösseren Entfernung befand, als vorher, ehe sie berührt wurde.

Alle diese Umstände zeigen deutlich, dass die Fähigkeit der Platte, den Funken auszulöschen, davon abhängt, ob sie mit Elektricität geladen ist oder nicht. (Vergl. Versuch 15.) Die grösste Gleichförmigkeit war daher nothwendig, damit nicht diese störenden Umstände jede Regelmässigkeit verdeckten.

Einige Versuche wurden angestellt, um zu untersuchen, ob Platten von verschiedenem Material verschiedene Wirkung ausübten oder nicht. Die Platten wurden daher in der Mitte zwischen der Flamme und dem Funken eingestellt und die grösste Entfernung, in der sie die Funken auslöschen konnten, wurde bestimmt. Einige Verschiedenheit ergab sich allerdings bei verschiedenen Platten, aber ein bestimmter Unterschied zwischen Leiter und Nichtleiter fand nicht statt. Es ist möglich, dass die nichtleitenden Platten zuweilen von einer dünnen Schicht condensirten Wasserdampfes bedeckt waren; aber auch stark erhitzte Glasplatten waren wirksam, den Funken auszulöschen, obgleich sie die Mittellinie nicht verdeckten. Die Substanz der Platte scheint also nicht bei dem Phänomen von entscheidender Bedeutung zu sein. Wurde die Quarzplatte benutzt, so erlosch der Funken wie gewöhnlich, sobald die Platte etwas seitwärts von der Mittellinie stand, aber Funken zeigten sich nicht, wenn die Platte die Mittellinie verdeckte. Bei der Benutzung der Ebonitplatte zeigte sich eine eigenthümliche Erscheinung, die für die Beurtheilung des Phänomens von grosser Bedeutung ist. Die Ebonitplatte löschte, wie gewöhnlich, den Funken aus, wenn sie sich ganz und gar seitwärts von der Mittellinie befand, sowie auch gewöhnlich in dem Falle, dass diese Linie von der Platte verdeckt wurde. Aenderte man dagegen die Höhe der Platte etwas, so dass die Mittellinie nicht durch den Schneidepunkt der Diagonalen, sondern etwas oberhalb desselben passirte, so fingen die Funken bei einer bestimmten Lage der Platte wieder an, überzuspringen. Es zeigt sich also, dass die Flamme im Stande ist, den Funken anzuzünden, obgleich der gradlinige Weg des Lichtes verdeckt ist.

Versuch 2.

Nachdem die Funkenlänge DE (Fig. 1) so abgepasst worden ist, dass die Funken überspringen, wenn sich die Flamme in der Nähe und auf der Symmetrielinie befindet, es aber nicht thun, wenn die Flamme ausgelöscht ist, wird von der Seite eine Glasplatte P rechtwinklig gegen die Mittellinie geschoben und zwar so nahe, bis der Funken erlischt. Wird nun von der anderen Seite in derselben Weise eine zweite Glasplatte P_1 herangeschoben, so zündet sich der Funke wieder. Nähert man nun P ein wenig der Mittellinie, so erlischt der

Funke zum zweiten Male, nähert man darauf P_1, so zündet sich der Funke wieder. Auf diese Weise kann man dadurch, dass man das eine Mal P, das andere Mal P_1 nähert, abwechselnd den Funken auslöschen und wieder anzünden, bis die beiden Platten die Mittellinie verdecken, in welchem Falle der Funke nicht mehr überspringt. Man kann auch das umgekehrte Verfahren anwenden, wenn die Platten sich mit ihren Kanten an der Mittellinie befinden, und dadurch, dass man sie successive ein kleines Stück entfernt, abwechselnd den Funken anzünden und wieder auslöschen. Als Platten wurden die im Vorhergehenden genannten benutzt. Verschiedene Resultate ergaben sich nicht bei Platten von verschiedenem Material.

Versuch 3.

Funke und Flamme werden wie vorher eingestellt. Eine Platte P_1 wird der Mittellinie genähert, doch nicht mehr, als dass die Funken mit Leichtigkeit überspringen. Darauf stellt man eine zweite Platte P hinter die erstere, auf derselben Seite der Mittellinie, und sie wird so nahe gebracht, dass die Funken erlöschen. Diese letztere Platte kann dann auch so eingestellt werden, dass, wenn eine von ihnen weggenommen wird, der Funkenstrom sofort wieder einsetzt. Die Substanz der Platte ist hierbei von keinem besonderen Belang.

Versuch 4.

Um zu untersuchen, ob die Breite der Platte von Einfluss sei, vertauschte ich die Platte mit einem Stabe, der vertical in der Röhre F angebracht wurde. Die Versuche 1, 2, 3 ergaben dieselben Resultate, wie oben, als die Platte benutzt wurde. In den Versuchen 2 und 3 konnte die eine Platte gegen einen Stab ausgetauscht werden, ohne dass sich die Natur des Phänomens änderte. Die benutzten Stäbe waren aus Kupfer, Zink, Glas und Holz.

Die Grenzlinien des Auslöschungsgebietes wurden auch bei einigen Stäben bestimmt. Der Abstand der Flamme vom Funken war hierbei 18,5 cm.

P a r a f f i n s t a b, ungefähr 35 cm lang und 0,58 cm im Diameter. Die Grenzlinie schliesst sich dicht an die Mittellinie und das Auslöschungsgebiet wird immer schmäler, je mehr sich der Stab vom Funken entfernt. In einer Entfernung von 10 cm und darüber ist kein Auslöschen mehr möglich.

Bei einem Stabe aus S i e g e l l a c k, 40 cm lang und 0,6 cm im Diameter, verhält es sich analog. Die grösste Breite des Auslöschungsgebietes ist 9 mm; beim Paraffinstabe betrug sie 4,5 mm. Eine Glas-

röhre — 85 cm lang, 0,48 cm äusserer Durchmesser, deren Oberfläche mit Schellack überzogen war, und die während des Versuches mehrere Male an einem Bunsen'schen Brenner erhitzt wurde, — ergab ein bedeutend ausgedehnteres Gebiet. Man kann die Grenzlinie bis dicht an die Flamme und den Funken verfolgen. Der grösste Abstand von der Mittellinie zwischen dem Funken und der Flamme war 54 mm.

Ein Holzstab, von 0,85 cm Durchmesser und 1 m Länge, hatte das grösste Auslöschungsgebiet. Die Grenzlinien wie bei der Glasröhre, aber der grösste Abstand von der Mittellinie 65 mm.

Die Höhe des Stabes ist von grösserem Einfluss, als seine Substanz (vergl. Versuch 10).

Versuch 5.

Die Funkenlänge wurde wie vorher abgepasst. (Dies ist auch der Fall bei allen folgenden Versuchen, wo nicht das Gegentheil angegeben wird, und wird daher nicht weiter erwähnt.) Um das Gebiet zu bestimmen, in welchem die Flamme sich wirksam zeigte, den Funken zu zünden, wurde der Brenner parallel der Abscissenaxe geschoben, und der Werth der Abscisse beobachtet, wenn der Funken erlosch. Die Mittellinie ist der Ordinatenaxe parallel und der Anfangspunkt willkürlich gewählt, doch so, dass die Axe der Abscisse durch den Funken geht.

Hierbei ergaben sich:

Ordinate	Abscissengebiet, in dem der Funke von der Flamme angezündet wird	Mitte des Abscissengebiets
mm		
100	22 . . . 57	39,5
90	23 . . . 55	39
80	26 . . . 54	40
70	26 . . . 54	40
60	27 . . . 53	40
50	28 . . . 52	40
40	29 . . . 51	40
30	32 . . . 46	39
20	35 . . . 43	39
10	36 . . . 39	37,5

Die Grenzlinien des Gebietes sind graphisch in Fig. 3 (s. S. 223) dargestellt. Eine kleine Dissymmetrie zeigt sich in der Nähe des Funkens, wahrscheinlich in Folge irgend welcher dissymmetrischen Stellung der Messingarme des Ausladers. Aus der Form der Curve

geht deutlich hervor, dass man nicht nöthig hat, einen gewissen Punkt auf den Kugeln des Entladers zu belichten, damit der Funke überspringen soll. In einem Abstande von mehr als 40 mm gehen die Grenzcurven beinahe gradlinig gegen den Funken. In einem Abstand von 40 mm erfährt die Grenzcurve eine merkbare Biegung. Dass jedoch die Curve in einem grossen Abstand vom Funken ihren Weg nicht gradlinig fortsetzt, ist daraus zu ersehen, dass die Flamme, wenn man den Abstand der Flamme vom Funken immer mehr vergrössert, zuletzt nicht mehr den Funken anzuzünden vermag. Die beiden Grenzcurven vereinigen sich daher zu einer zusammenhängenden Linie.

Versuch 6.

Verschob man die Flamme parallel mit der Abscissenaxe in einem Abstande von 10 cm von dem Funken, so erlosch der Funke, sobald die Entfernung der Flamme von der Mittellinie nach der einen oder der anderen Seite hin mehr als 18 mm betrug. Ein Zinkdraht, 0,2 cm dick, wurde vertical am Stativ so befestigt, dass sein oberes Ende die Mittellinie etwas überragte, und wurde dann der Mittellinie in der Mitte zwischen der Flamme und der Funkenstelle so weit genähert, bis der Funke erlosch, wenn sich die Flamme auf der Ordinataxe befand. Verschob man die Flamme parallel der Abscissenaxe nach der Seite, wo sich der Draht befand, so zündete sich der Funke wieder, und die Flamme konnte jetzt weiter nach dieser Seite hin verschoben werden, ohne dass der Funke erlosch, als eben, da der Draht fehlte. Das „empfindliche Gebiet“, d. h. das Gebiet, in dem sich die Flamme befinden muss, um das Zünden der Flamme bewirken zu können, ist also näher an den Draht verschoben worden.

Jetzt liess ich den Draht mit Beibehaltung derselben Ordinate 50 mm verschiedene Abscissen einnehmen, und bestimmte das Gebiet, in dem die Flamme den Funken zu zünden vermochte. Diese Einstellungen sind in der ersten und dritten Columne der folgenden Tabelle angegeben. Die zweite Columne gibt an, ob der Funke überspringt oder nicht, wenn die Flamme sich in der Mittellinie befindet. Ausserdem werden die Breite des Gebietes und die Abscisse seines Mittelpunktes angegeben. Der Funke ist Anfangspunkt.

In Fig. 4 (s. S. 223) sind die Beobachtungen graphisch wiedergegeben. Die Abscisse des Drahtes ist zur Abscisse und der Abstand der Grenzlinie von der Mittellinie zur Ordinate genommen. Die Mitte des Gebietes ist auch durch die mittlere Curve angegeben.

Wenn der Zinkdraht sich in der Nähe der Mittellinie befand, war der Funke intermittent. Dass der Funke intermittent wird, trifft

immer am Rande des empfindlichen Gebietes ein, und dadurch wird in nicht geringem Grade die genaue Einstellung erschwert.

Die Abscisse des Stabes	Der Funke springt über	Die Flamme zündet den Funken zwischen Absc. bis Absc.	Breite d. Gebietes	Mitte d. Gebietes
			mm	
45	Immer	31 ... 0	31	15,5
40	Zuweilen	26 ... 1	25	13,5
35	Nicht	29 ... 3	26	16
30	"	32 ... 7	25	19,5
25	"	36 ... 0	36	18
20	"	37 ... 6	31	21,5
10	Selten	26 ... — 1	27	12,5
0	"	16 ... —14	30	1
— 10	Nicht	— 4 ... —29	25	—16,5
— 20	"	— 9 ... —44	33	—26,5
— 30	"	— 4 ... —33	29	—18,5
— 40	Zuweilen	+ 2 ... —32	34	—15
— 50	Recht oft	+ 5 ... —31	36	—13
— 60	Immer	+ 7 ... —29	36	—11
— 70	"	+ 9 ... —26	35	— 8,5
— 80	"	+11 ... —25	36	— 7
— 90	"	+11 ... —24	35	— 6,5
—100	"	+12 ... —23	35	— 5,5
—110	"	+13 ... —23	36	— 5
— ∞	"	+18 ... —18	36	0

Wird ein Stab aus Glas oder Kupfer benutzt, so verhält es sich ebenso, wie vorhin beschrieben ist. Der Stab wird in verticaler Stellung der Mittellinie genähert, bis der Funke erlischt; dieser zündet sich wieder, wenn man die Flamme nach dem Stabe hin verschiebt. Bei dem langen Holzstabe gelang der Versuch vortrefflich, doch kann der Funke nicht wieder durch Verschiebung der Flamme gezündet werden, wenn sich der Stab in der Nähe der Mittellinie befindet. Aehnliche Resultate ergaben sich, wenn man einen Bleistift als Stab benutzte. Auch ein Stab aus Paraffin vermochte das empfindliche Gebiet zu verrücken. Das Fussgestell des Stativs, an welchem die Stäbe befestigt waren, änderte dagegen nicht in wahrnehmbarem Grade die Lage des empfindlichen Gebietes.

Versuch 7.

Bei den vorhergehenden Versuchen waren die Stäbe stets senkrecht gestellt, also im rechten Winkel gegen die Richtung des Funken und gegen die Ebene durch den Funken und die Flamme. Die vorigen

Versuche gelingen inzwischen auch, wenn die Stäbe wagerecht gehalten werden. Hier zeigt sich jedoch der Unterschied, dass sie nur in der Nähe der Mittellinie sich wirksam zeigen, den Funken auszulöschen. Das Gebiet, in welchem sie den Funken auszulöschen vermögen, wenn sich das Flämmchen in der Mittellinie befindet, hat also in der senkrechten Richtung eine kleinere Ausdehnung, als in der wagerechten. In der letzteren Richtung ist das Gebiet 10 bis 20 Mal ausgedehnter, als in der ersteren.

Dieser Unterschied kann nicht von der Form der Flamme abhängen, da dieselbe fast kugelförmig war. Die Arme des Ausladers waren wagerecht, und der Unterschied hätte vielleicht hiervon abhängen können. Dass dies jedoch nicht der Fall war, sondern dass die Ursache in der Richtung des Funkens lag, ersieht man aus folgendem Versuche.

Durch eine kleine Verschiebung der Arme des Ausladers konnte die eine von den Kugeln senkrecht über die andere gestellt werden. Hierdurch wurde die wagerechte Hauptrichtung der Arme nur unbedeutend geändert, obgleich sie nicht mehr in derselben Ebene lagen. Nachdem die Funkenlänge so abgepasst worden, dass der Funke empfindlich wurde, ergab es sich, dass man in wagerechter Richtung eine Glasscheibe mit senkrechten Kanten beinahe bis ganz an die Mittellinie schieben konnte, ehe der Funke erlosch. Dagegen konnte man, wenn man die Scheibe von oben oder von unten näherte, den Funken auslöschen, wenn sich die Scheibe in einer grossen Entfernung von der Mittellinie befand.

Die in Versuch 2 und 3 dargestellten Versuche gelingen nun leicht, wenn die wagerechten Stäbe oder Scheiben von oben oder von unten der Mittellinie genähert werden.

Werden die Kugeln des Ausladers so eingestellt, dass die Richtung des Funkens gegen den Horizont einen Winkel bilden, so verrückt sich auch das Auslöschungsgebiet. Seine grösste Ausdehnung besitzt es in der Ebene, die durch den Funken und die Flamme geht, seine kleinste rechtwinklig gegen dieselbe.

Versuch 8.

Um zu untersuchen, welchen Einfluss die Grösse der Flamme ausüben könnte, wurde folgender Versuch angestellt. Der Funke war wagerecht, und die vorher erwähnte Glasplatte wurde von der Seite so weit genähert, dass die Funken gerade weigerten, überzuspringen. Vermehrte man nun den Gaszufluss durch Aufdrehen des Hahnes, so entstand in der capillären Oeffnung des Brenners eine schmale Flamme von einigen Centimeter Höhe; ihre Intensität war natürlich bedeutend

grösser, als die der vorigen Der Funkenstrom setzte sofort ein, die Funken erloschen aber, sobald der Gaszufluss vermindert wurde. Indem man nun den Hahn bald in die eine, bald in die andere Richtung drehte, konnte man den Funkenstrom abwechselnd anzünden oder auslöschen.

Dieser Versuch dürfte von Bedeutung sein bei der Beurtheilung des Zusammenhangs, den die im Vorigen mitgetheilten Erscheinungen besitzen, mit dem, was vorher schon über den Einfluss einer Lichtquelle auf den elektrischen Funken bekannt ist. Bei den oben geschilderten Versuchen ist die Intensität der Lichtquelle auf das Minimum beschränkt worden, während bei den meisten vorher veröffentlichten Untersuchungen der galvanische Lichtbogen als Lichtquelle benutzt worden ist, also die Intensität das Maximum gewesen ist. Der elektrische Funke muss auch für eine sehr intensive Lichtquelle gehalten werden. (Vergl. Versuch 14.)

Versuch 9.

Bei den folgenden Versuchen wurden einige Lichtquellen von verschiedener Natur benutzt. Eine U-förmige Röhre wurde angefertigt, deren einer Arm capillär war. In den anderen, weiteren Arm wurde eine passende Flüssigkeit gegossen, und in die Capillarröhre ein baumwollener Faden gesteckt, der als Docht diente. Eine besondere Vorrichtung, um die Höhe der Flamme reguliren zu können, war nicht vorhanden, weshalb die Grösse der Flammen in den verschiedenen Fällen nicht ganz dieselbe war. Gewöhnlich wechselten die Durchmesser zwischen 5 und 10 mm. Die U-förmige Röhre wurde mit Siegellack an einem Kork befestigt, der an dem Stativ angebracht war, das sonst die Scheiben oder Stäbe zu tragen pflegte.

Eine Spiritusflamme zeigte sich wirksam, den Funken anzuzünden. Steht die Flamme in einer Entfernung von 8 cm von dem Funken, aber etwas seitwärts von der Mittellinie, so kann man den Funken mit der Hand auslöschen, und zwar in einer Entfernung von mehr als 40 cm von den Funken hinter der Flamme. Der Funke erlischt auch, wenn man die Hand unmittelbar hinter der Flamme hält. Wenn die Flamme 17 cm vom Funken entfernt ist, so springen noch alle Funken über. In einer Entfernung von 25 cm verschwindet nur hier und da einer, und deutliche Wirkung ist noch bei einer Entfernung von 52 cm wahrnehmbar. Wenn die Flamme nicht angezündet ist, so wirkt noch die Spitze der Glasröhre zündend in einer Entfernung von ein paar Centimetern. (Vergl. Versuch 12.)

Benzin. Die Flamme ist wirksam. In einer Entfernung von 35 cm sind die Funken noch ziemlich zahlreich, und noch bei 59 cm gehen einige über.

Aether. Die Flamme scheint weniger wirksam zu sein, als die vorigen. Bei 17 cm springt noch jeder Funke über, aber schon bei 35 cm ist die Anzahl der Funken eine sehr geringe. Beträgt die Entfernung 50 cm, so springt kein Funke mehr über. Ebenso wie bei den beiden vorhergehenden Flammen kann man den Funken in derselben Weise anzünden und auslöschen, wie in den Versuchen 1, 2, 3, 4. Auch ein hinter der Flamme aufgestellter Gegenstand zeigt sich wirksam, den Funken auszulöschen.

Schwefelkohlenstoff. Die Flamme war kaum wirksam. In einer Entfernung von 2 cm sprangen allerdings die Funken intermittent über, aber erloschen nicht unmittelbar darauf, wenn eine Glasscheibe zwischen die Flamme und den Funken geschoben wurde. Es ist daher möglich, dass das Zünden des Funkens eine Folge der Erwärmung durch die Flamme ist. Die Spitze der Lampe wirkt nur unbedeutend, wenn die Flamme ausgelöscht ist. Einige Funken entstanden allerdings, wenn sie sich zwischen den Kugeln des Ausladers befand [1]).

Petroleum. Die Flamme zündete jeden Funken, wenn die Entfernung nicht mehr als 3 cm betrug, aber jede Wirkung hörte bei 10 cm Entfernung auf.

Wasserstoffflamme. Die Flamme zündete jeden Funken, wenn die Entfernung nicht mehr als 10 cm betrug. Alle Wirkung hörte bei einer Entfernung von 15 cm auf. Besondere Vorsichtsmaassregeln, um das Gas zu trocknen, wurden nicht getroffen, weshalb ein Einfluss der Ausströmungsröhre selbst nicht ausgeschlossen ist.

Stearinkerzen. Die Flamme zündet jeden Funken bis zu einer Entfernung von 6,5 cm. Eine Wirkung ist noch wahrnehmbar in einer Entfernung von 28 cm, indem einzelne Funken überspringen. Der Funke wird sowohl durch eine Glasscheibe als auch durch einen Holzstab ausgelöscht, ehe diese die Mittellinie verdecken.

---

1) Auf Grund der Wirkungslosigkeit der Schwefelkohlenstoffflamme verglich ich sie mit einer ebenso grossen Gasflamme in Bezug auf die Leichtigkeit, mit der ein galvanischer Strom durch die Flamme ging. Die Flamme wurde in eine Leitung eingeschaltet, die ein Daniell'sches Element und ein empfindliches Galvanometer enthielt, wobei zwei feste Kupferdrähte als Elektroden dienten. Wenn die Gasflamme zwischen die Elektroden placirt wurde, erhielt ich einen ersten Ausschlag auf dem Galvanometer von 12 Scalentheilen, wenn aber die Gasflamme gegen die Schwefelkohlenstoffflamme ausgetauscht wurde, so war der Ausschlag kaum wahrnehmbar, höchstens 0,2 Scalentheile.

Nähert man den Finger der Flamme, so flackert sie in demselben Takte wie die Funken, und biegt sich gegen den Finger. Nähert man der Flamme einen Metalldraht, der in der Hand gehalten wird, so zieht sie sich nach unten und wird abgeplattet, wenn die Spitze hinter der Flamme ist. Sie richtet sich schnell wieder in die Höhe, wenn der Funke überspringt. Wird der Draht in den unteren Teil der Flamme gesteckt, so biegt sich die Spitze der Flamme sehr stark gegen den Funken und hindert dabei zuweilen die Funken am Ueberspringen wegen der entstehenden starken Elektricitätsausströmung. Ein isolirter Metalldraht übt nur geringen Einfluss auf die Flamme aus; dasselbe ist bei einem Glasstabe der Fall.

Eine Flamme von Holz oder Papier wirkt nur in einer Entfernung von höchstens 3 cm. Lässt man einen Tropfen Leinöl auf das Hölzchen fallen, so wirkt die Flamme in einer etwas grösseren Entfernung.

Magnesiumlicht. Eine Lampe für Magnesiumlicht wurde so eingestellt, dass sich der Lichtpunkt auf der Mittellinie befand, und zwar in einer Entfernung von 20 cm von der Funkenstelle. Der zu der Lampe gehörige Reflector wurde abgenommen, weil die Erscheinung dann deutlicher hervortrat. Mit dieser ausserordentlich intensiven Lichtquelle konnten alle die im Vorhergehenden erwähnten Versuche wiederholt werden.

Nachdem die Lampe angezündet worden, wurde also eine mit Schellack überzogene quadratische Glasscheibe gegen die Mittellinie zwischen den Funken und den Lichtpunkt geschoben. Der Funke erlosch, ehe der senkrechte Rand der Scheibe die Spitze des glühenden Magnesiumdrahtes, von dem Funken aus gesehen, verdeckte, obgleich sie allerdings der Mittellinie recht nahe stand.

Wurde darauf von der anderen Seite eine andere Glasscheibe, die kurz vorher an einem Bunsen'schen Brenner getrocknet worden war, hinlänglich genähert, so zündete sich der Funke wieder, und wenn eine von den Scheiben entfernt wurde, so erlosch der Funke.

Zwei Glasplatten vermochten den Funken auszulöschen, wenn sie sich auf derselben Seite von der Mittellinie befanden, und zwar in einer solchen Stellung, dass eine von beiden es nicht allein vermochte. Nähert man nun von der anderen Seite die Hand, eine Glasscheibe oder eine Glasröhre, so zündet sich der Funke wieder. Eine Stanniolscheibe löscht den Funken aus, wenn sie von der Seite genähert wird, aber dies trifft in grösserer Entfernung von der Mittellinie ein, wenn sie mit der Hand berührt wird.

Ein langer Holzstab löscht den Funken in grösserer Entfernung von der Mittellinie, wenn er senkrecht gehalten wird. Wenn er wage-

recht gehalten wird, so muss er beinahe bis dicht an die Mittellinie gebracht werden, ehe der Funke erlischt. Das Auslöschungsgebiet hat also in der wagerechten Richtung eine grössere Ausdehnung als in der senkrechten. Bei diesen Versuchen waren die Arme des Entladers so eingestellt, dass sie einen sehr spitzen Winkel bildeten.

Der lange Holzstab wurde senkrecht in der Mittellinie zwischen dem Funken und der Flamme aufgestellt. In diesem Falle erlosch der Funke. Rückte man nun die Lampe etwas auf die eine Seite, so zündete sich der Funke nicht, obgleich die Kugeln belichtet wurden. und die Funken fingen erst dann an, überzuspringen, wenn sich die Lampe recht weit von der Mittellinie befand. Rückte man nun den Stab etwas aus der Mittellinie, fuhren die Funken fort, überzuspringen, sowohl wenn der scharfe Schatten des Stabes beide Kugeln des Ausladers bedeckte, als auch, wenn er es nicht that.

Versuch 10.

Schon das erste Mal, als ich bemerkte, dass der Einfluss der kleinen Flamme auf den elektrischen Funken dadurch aufgehoben werden konnte, dass man einen Gegenstand von der Seite näherte und zwar, ohne die Verbindungslinie zwischen der Flamme und dem Funken zu verdecken, zeigte es sich, dass eine abgeleitete Metallspitze ganz dieselbe Wirkung auf den Funken wie die Flamme ausübte. Um dieses zu constatiren, löthete ich eine feine Nähnadel an einen Kupferdraht, dessen zweites Ende mit der Gasleitung in leitende Verbindung gesetzt wurde. Die Nadel und das ihr am nächsten liegende Ende des Kupferdrahtes wurden in eine Glasröhre gesteckt, die an ihrem einen Ende in eine Capillarröhre ausgezogen war. Die Spitze der Nadel reichte eben aus dem capillären Theile der Röhre hervor, der senkrecht an einem viereckigen Fussklotze befestigt war. Das Ganze hatte daher dasselbe Aussehen und dieselbe Höhe wie der Gasbrenner, nur mit dem Unterschiede, dass die Nadel die Flamme ersetzte.

Die in den Versuchen 1—7 erwähnten Experimente können vorgenommen werden, ohne dass sich irgend ein qualitativer Unterschied ergibt, wenn man eine abgeleitete Spitze anstatt der Flamme benutzt. Das Gebiet, in welchem sich die Spitze befinden muss, um sich wirksam zu zeigen, den Funken zu zünden, scheint eine grössere Breite zu besitzen, als wenn man eine Flamme benutzt, für den Fall, dass die Arme des Entladers mit einander einen stumpfen Winkel bilden. Wenn die Arme einen sehr spitzen Winkel bildeten, erstreckte sich dies empfindliche Gebiet seitwärts von den Kugeln, so dass die Spitze noch dann wirkte, wenn sie sich auf der Verbindungslinie zwischen den

Mittelpunkten der Kugeln befand. Wenn die Leitung mit Elektricität geladen wird, bis die Funken an der Maschine überspringen, so entsteht hierdurch eine kräftige Induction auf die Spitze. Wenn sich diese den Kugeln hinreichend nahe bfindet, so wird diee durch die Induction veranlasste Ausströmung der Elektricität so stark, dass sich keine Funken bilden, sondern die durch die Maschine erzeugte Elektricitätsmenge wird durch die Ausströmung aus der Spitze neutralisirt. Das empfindliche Gebiet wird daher in der Nähe der Kugeln lacunär. Aber auch in grösseren Entfernungen treten solche „dunkle Bänder" auf, wenn man eine Scheibe oder einen senkrechten Stab zwischen den Funken und die Spitze stellt. Die Höhe des Stabes ist hierbei von wesentlicher Bedeutung, wie folgende Beobachtungen zeigen.

Ein Glasstab wurde senkrecht am Stativ befestigt und wurde im rechten Winkel gegen die Mittellinie, auf der sich die Spitze befand, geführt.

1. Wenn sich das Ende des Stabes unter der Mittellinie befindet, nimmt man keine Wirkung wahr, sondern die Funken fahren fort, überzuspringen.

2. Wenn sich das Ende des Stabes in derselben Höhe wie die Mittellinie befand, so entstand ein „dunkles Band" auf der einen Seite der Mittellinie.

3. Wenn das Ende des Stabes die Mittellinie etwas überragte, so entstanden zwei „dunkle Bänder", und zwar eines auf jeder Seite der Mittellinie; wenn sich aber der Stab in der Nähe der Mittellinie befand, so fuhren die Funken fort.

4. Wenn das Ende des Stabes noch höher reichte, erhielt man ein breites dunkles Band, das sich von der Mittellinie nach beiden Seiten erstreckte.

Dieselben vier Phänomene zeigten sich, wenn ein Kupferdraht (2,8 mm im Durchmesser) benutzt wurde. Das Vorhandensein solcher dunkeln Bänder, wie sie in 3. erwähnt werden, bewirkt, dass man zuweilen den Funken dadurch wieder anzünden kann, nachdem er durch die Annäherung eines Stabes ausgelöscht worden, dass man die Spitze aus der Mittellinie vom Stabe fortschiebt. (Im Versuch 6 wurde die Flamme gegen den Stab geschoben.)

Ist die abgeleitete Spitze senkrecht gerichtet oder wird der Draht so gebogen, dass die Spitze wagerecht gegen den Funken gerichtet wird, so entsteht kein Unterschied. Ob die Spitze aus Eisen, Zink oder Kupfer bestand, war von keiner Bedeutung.

Versuch 11.

Bei den vorhergehenden Versuchen war die Spitze abgeleitet. Wird die Spitze isolirt, ändern sich die Umstände. Bildet die isolirte

Metallspitze den Theil eines ganz kurzen Leiters, z. B. einer Nadel, so gehen die Funken über, wenn der Abstand der Spitze von den Funken unerheblich ist, und er zeigt sich wirksam, den Funkenstrom beliebig lang zu unterhalten. Steht die Spitze mit einem Leiter von nicht allzu kleinen Dimensionen in Verbindung, so vermag sie auch jetzt den Funken in grösserer Entfernung zu zünden, aber der Funkenstrom hört bald auf. Dies zeigte sich deutlich bei folgendem Versuch. Ein Zinkdraht wurde spiralförmig zusammengerollt und in eine hohle Messingkugel gelegt, deren Durchmeser 11 cm betrug. Das eine Ende des Drahtes wurde spitz gefeilt und diese Spitze in einer solchen Entfernung von der Funkenstelle eingestellt, dass die Funken mit Leichtigkeit übersprangen, wenn die Spitze mit der Hand abgeleitet wurde.

Rollte man den Draht auf, so konnte die isolirte Kugel immer weiter entfernt werden, und die Anzahl der Funken, die anfänglich übersprangen nachdem die Kugel berührt worden war, wurde desto grösser, je mehr die Länge des aufgerollten Drahtes vergrössert wurde. In jedem Fall hörten jedoch die Funken bald auf, fingen aber wieder an, wenn man die Kugel oder den Draht mit der Hand berührte oder auf andere Weise Ableitung bewirkte. Hieraus folgt deutlich, dass sich die Spitze nur so lange wirksam zeigt, als Elektricität in genügender Menge derselben entströmt. Je mehr die Ladung des Systems in Folge der Ausströmung vermehrt wird, desto geringer wird diese, und die Spitze wird dann unwirksam. Dass die Kugel und die Leitung mit gleichnamiger Elektricität geladen wurden, war mit einem Elektroskop leicht nachzuweisen.

Wie wesentlich die Ausströmung der Elektricität ist, geht aus folgenden zwei Experimenten hervor:

a) Eine Glaskugel wurde durch einen kurzen Gummischlauch mit einer Glasröhre verbunden, deren Ende in eine feine Capillarröhre auslief. Der Schlauch war mit einem Klemmer versehen, so dass man, wenn man Quecksilber in die Kugel goss, nach Belieben das Quecksilber aus der Röhre ausströmen lassen oder den Strom unterbrechen konnte. Dieser Collector wurde nahe an der Funkenstelle eingestellt, und zeigte sich dann nicht wirksam, den Funken zu zünden. Klemmte man an dem Klemmer, so dass ein Strahl Quecksilber hervorkam, der sofort in Tropfen zerfiel, zeigten sich auch keine Funken. Ebenso verhielt es sich, wenn das Quecksilber mit der Erde in leitende Verbindung gebracht wurde. Auch wenn sich die Ausströmungsöffnung so nahe der Funkenstelle befand, dass eine nebenstehende abgeleitete Metallspitze wegen des starken Ausströmens von Elektricität aus der Spitze jede Funkenbildung verhinderte, vermochte der Quecksilbercollector nicht den Funkenstrom zu unterhalten. Dasselbe war der

Fall, wenn das Ausströmungsgefäss durch einen leitenden Draht mit der einen Belegung eines Condensators, dessen andere Belegung zur Erde abgeleitet war, verbunden wurde. Der Condensator wurde hierdurch so stark geladen, dass man Funken von einem Millimeter Länge von demselben erhielt.

b) Ein isolirter Kupferdraht wurde mit dem einen Conductor einer Holtz'schen Maschine (von kleinerem Modell) verbunden, deren zweiter Conductor zur Erde abgeleitet war. Das andere Ende des Drahtes wurde spitz gefeilt und diese Spitze so weit von den Kugeln des Ausladers in die Mittellinie eingestellt, dass keine Funken übersprangen, wenn der Draht zur Erde abgeleitet wurde. Setzte man jetzt die Maschine in Thätigkeit, so sprangen Funken über, und zwar unabhängig von der Art Elektricität, die der Spitze entströmte.

Versuch 12.

In Bezug auf die Ladung der Luft mit Elektricität spielt bekanntlich der Staub eine grosse Rolle [1]). Um zu untersuchen, inwiefern die Ladung der Luft und zugleich das Vorhandensein von Staub bei dem Phänomene von irgend welcher Bedeutung sein könnte, wurden einige Versuche angestellt. Ein Gefäss mit Salzsäure und ein anderes mit kaustischem Ammoniak wurden in einen kleinen Kasten gestellt, und der Kasten luftdicht geschlossen. Der entstehende Salmiakrauch wurde durch eine Seitenröhre, deren capilläre Spitze sich in derselben Horizontalebene wie die Funkenstelle befand, hinausgeblasen. Durch eine andere Röhre wurde die Luft zugeführt, die den Salmiakrauch hinaustrieb. An dieser Röhre war ein Kautschukschlauch befestigt, der entweder mit einem Gasometer in Verbindung stand, oder in den man direct mit dem Munde hineinblies. Anfänglich erwies sich dieser Rauchapparat wirksam, den Funken zu zünden. Liess man einen continuirlichen Luftstrom vom Gasometer durch den Rauchapparat gehen, so sprangen die Funken über, so lange wie der Luftstrom andauerte. Indem man an dem Hahn des Gasometers drehte, konnte man den Funken abwechselnd auslöschen und anzünden, je nachdem der Luftstrom dabei abgesperrt wurde oder passiren konnte. Es genügte auch, das gewöhnlich am Gasometer befestigte Ende des Schlauches an den Mund zu halten und leise hineinzuatmen, um zu bewirken, dass Funken übersprangen. Stellt man sich jetzt an einen passenden Platz, kann man sehen, wie der Rauchfaden in demselben Augenblicke, wo die Funken überspringen, hervordringt. Die Versuche 1—7 konnten alle wiederholt werden.

---

1) Vergl. Nahrwold: Wied. Ann. Bd. 31 S. 418. 1887.

Es zeigte sich inzwischen bald, dass der Rauch oder der Staub hierbei von gar keiner Bedeutung waren. Sammelte man im Zimmer niedergefallenen Staub auf einem Handtuche und schlug es mit den Händen, so dass die Kugeln des Ausladers in eine Staubwolke eingehüllt wurden, so sprangen die Funken trotzdem nicht über. Ebenso wirkungslos war ein Strom von trockener pulverisirter Kreide, der durch eine Pipette gegen die Kugeln geblasen wurde. Schaltete man eine Chlorcalciumröhre ein zwischen den Rauchapparat und den Gasometer, so wurde der hervordringende Rauchfaden wirkungslos. Dasselbe war auch der Fall, wenn man die feuchte Luft des Gasometers durch den Rauchapparat passiren liess, wenn nur die Ausströmungsröhre mit der Flamme eines Bunsen'schen Brenners erhitzt worden war. Die Wirkung der Ausströmungsröhre war also davon abhängig, dass sie von einer dünnen Schicht condensirten Wasserdampfes überzogen wurde, und diese leitende Schicht wirkte also wie eine Spitze. Dies wird auch durch den Umstand bekräftigt, dass, wenn man den Rauchapparat entfernte und der Schlauch den feuchten Luftstrom des Gasometers zum Gasbrenner leitete, dieser jetzt den Funkenstrom zu zünden im Stande war. Schob man eine Chlorcalciumröhre zwischen den Brenner und den Gasometer, oder wurde der Brenner genügend erhitzt, so war er wirkungslos.

Aus dem oben Angeführten ziehe ich den Schluss, dass das Vorhandensein von Staub in der Luft an den Kugeln und folglich die statische Ladung der Luft für das Phänomen von keiner Bedeutung sind.

Versuch 13.

Bei den vorhergehenden Versuchen bildete sich der Funke zwischen den Kugeln des Ausladers in der Weise, dass die ganze Leitung so lange mit Elektricität geladen wurde, bis ein Funke an der Maschine übersprang. Ob die Leitung mit positiver oder negativer Elektricität geladen wurde, übte auf das Phänomen im ganzen keinen Einfluss. Ein Unterschied zeigte sich jedoch bei verschiedener Ladung darin, dass bei derselben Funkenlänge nicht dieselbe Empfindlichkeit des Funkens erzielt wurde. Wählte man eine solche Funkenlänge, dass die Funken bei positiver Ladung eben übersprangen, so weigerten sie bei negativer. Dies trat nicht nur dann ein, wenn sich die Flamme oder die Spitze in der Nähe des Funkens befanden, sondern auch dann, wenn sie von demselben entfernt waren. Die Folge hiervon ist die, dass die Funkenlänge bei positiver Ladung grösser gemacht werden muss als bei negativer, um dieselbe Empfindlichkeit des Funkens zu erzielen. Der Wechsel der Elektricität in der Leitung geschah ent-

weder dadurch, dass die Drähte an der Maschine die Plätze wechselten, oder auch dadurch, dass die Maschine von neuem umgeladen wurde.

Da es von gewissem Interesse war, zu sehen, ob die Erscheinung an die Art und Weise gebunden sei, wie der Funke sich bildete, benutzte ich einige andere Anordnungen.

Die von Edlund für das Studium der Disjunctionsströme angegebene Anordnung erwies sich als sehr brauchbar. Man erhält sie, wenn man sich in Fig. 1 den Arm E des Ausladers mit dem Conductor C' durch einen isolirten Draht verbunden denkt, und die Funkenstrecke AB in diesen Theil der Leitung verlegt. War der Conductor C' isolirt oder mit der Erde verbunden, der Conductor C aber isolirt, so dass die ganze Leitung DGE mit positiver oder negativer Elektricität, wie bei der vorigen Anordnung, geladen war, so war der Funke DE für die kleine Flamme oder die abgeleitete Spitze, gerade, wie vorher, empfindlich. Verlegte man dagegen die Erdleitung nach C oder einem Punkt in der Leitung DGE, so dass diese nicht geladen wurde, so zeigte sich der Funke bei DE sehr wenig empfindlich. Man muss die Spitze oder die Flamme beinahe bis dicht an die Kugeln bringen, damit der Funke zündet. Der Funke erlosch jedoch, wenn die gefirnisste Glasscheibe dazwischengestellt wurde. Hieraus folgt, dass die statische Ladung der Leitung für das deutliche Hervortreten der Erscheinung von grosser Bedeutung ist. Dies erklärt auch, weshalb die Erscheinung bei einigen anderen Anordnungen nur sehr undeutlich hervortrat. So zeigte sich der Funke nur wenig empfindlich, wenn er von einer Ruhmkorff'schen Rolle, von mittelgrossem Modell, die durch ein Bunsen'sches Element in Thätigkeit gesetzt wurde, hervorgebracht wurde. Dasselbe war der Fall, wenn die Holtz'sche Maschine in der Anordnung Fig. 1 durch eine Ruhmkorff'sche Rolle ersetzt wurde.

Versuch 14.

Auf mannigfache Weise kann man bewirken, dass ein elektrischer Funke zu gleicher Zeit wie der Funke zwischen den Kugeln des Ausladers DE (Fig. 1) überspringt. Benutzte man einen solchen Funken, um den Funken DE zu beleuchten, so erschien es änfänglich immer nothwendig, die Verbindungslinie zwischen den beiden Funken zu verdecken, ehe der Funke DE erlosch. Auf Grund des Versuches 8, nach welchem bei einer stärkeren Flamme eine Platte der Mittellinie näher gerückt werden musste, um den Funken auszulöschen, als bei einer schwächeren, war es wahrscheinlich, dass ebengenannter Umstand von der grossen Intensität des Funkens abhing. Nach mehreren

vergeblichen Versuchen genügend schwache Funken zu erhalten, bestätigte sich auch diese Vermuthung bei folgender Anordnung. Ungefähr 2 mm über der abgeleiteten Spitze wurde eine kurze, isolirte und wagerechte Messingstange eingestellt, die mit der Richtung des Funkens *DE* parallel war. Jedes Mal, wenn der Funke an der Maschine überging, sprang auch ein äusserst lichtschwacher Funke von der Spitze nach der Messingstange über. Seine Lichtstärke war so gering, dass man denselben nur gegen einen passenden Hintergrund wahrnehmen konnte. Wenn die Entfernung bis zum Auslader nicht zu gross war, so vermochte dieser Funke den Funken *DE* zu zünden. Die Anordnung war wie die in Fig. 1 angegebene. Näherte man nun von der Seite eine Zinkplatte oder eine eben gewärmte Glasscheibe, so erlosch der Funke *DE*, ehe noch die Verbindungslinie zwischen dem kleinen senkrechten Funken und der am nächsten stehenden Elektrode verdeckt wurde, und zwar unabhängig davon, ob sich die Platte auf der einen oder der anderen Seite befand. Die Leitung war mit positiver Elektricität geladen.

Versuch 15.

Im Versuch 1 wurden einige Umstände erwähnt, die darlegten, dass die Fähigkeit eines Körpers den Funken dann zu löschen, wenn er ohne die Mittellinie zu verdecken von der Seite genähert wurde, davon abhing, ob er mit Elektricität geladen war oder nicht. Um über diesen Umstand ins Klare zu kommen, wurde eine isolirte Messingkugel von 11 cm Durchmesser in der Nähe der Mittellinie zwischen dem Funken und der abgeleiteten Metallspitze aufgestellt. Die isolirende Stütze der Kugel war höher als die Spitze, weshalb die Arme des Entladers um so viel erhöht wurden, dass sich der Funke *DE*, das Centrum der Kugel und die Spitze in derselben Ebene befanden. Die Spitze befand sich in der Verticalebene durch die Mittellinie, und die Entfernung der Kugel von dieser Linie wurde so gross gemacht, dass die Funken unter dem Einfluss der Spitze übersprangen, wenn die Kugel neutral war. Die Kugel wurde darauf durch einen isolirten Kupferdraht mit dem einen Conductor einer Holtz'schen Maschine in leitende Verbindung gesetzt. Wurde jetzt die Kugel mit Elektricität, ungleichnamig mit derjenigen der Leitung, geladen, so erlosch der Funke. Wurde sie mit gleichnamiger Elektricität geladen, so fuhren die Funken noch immer fort. Der in der Einleitung erwähnte Einfluss der Holtz'schen Maschine findet hierin seine Erklärung.

Wenn die Leitung mit negativer Elektricität geladen wird, und man von der Seite den mit positiver Elektricität geladenen Deckel eines Elektrophors so nahe schiebt, dass die Funken erlöschen, so

zündet sich wieder der Funkenstrom, wenn man den Teller berührt. Ein Glasstab, der durch Reiben positiv elektrisch geworden ist, löscht den Funken in grosser Entfernung, aber je mehr seine Elektricität verschwindet, desto näher muss er gebracht werden.

Bei den vorhergehenden Versuchen war die Funkenlänge DE so gross gemacht worden, dass die Funken nicht übersprangen, wenn nicht die Spitze oder die Flamme sich in der Nähe befanden. Jetzt nahm ich eine solche Funkenlänge, dass die Funken eben überspringen konnten, ohne dass die Spitze in der Nähe zu sein brauchte. Wurde jetzt die isolirte grosse Messingkugel genähert, so erloschen die Funken; wurde die Kugel in solcher Entfernung aufgestellt, dass die Funken noch immer übersprangen, und wurde sie darauf mit negativer Elektricität geladen (die Leitung war mit positiver geladen), so erloschen die Funken, zündeten sich aber wieder, wenn sich die Kugel entlud. Wurde die Kugel mit positiver Elektricität geladen und ihr Abstand von der Mittellinie verkleinert, so erloschen die Funken, wenn die Kugel sich entlud, sprangen aber wieder über, wenn die Kugel geladen wurde.

Ein solcher, die Funkenbildung hemmender Einfluss, den die isolirte neutrale Kugel ausübte, zeigte sich auch, wenn eine isolirte Zinkscheibe oder der lange Holzstab genähert wurde.

Wollen wir nun zusehen, welche Schlüsse sich aus dem vorliegenden Beobachtungsmaterial ziehen lassen.

Dass der elektrische Funke in grösserer Entfernung überspringt, wenn die kleine Flamme sich in der Nähe des Funkens befindet, würde nach der Erklärung, die Herr Hertz von seinen schönen Versuchen gegeben[1]), von dem directen Einfluss des aus der Flamme ausstrahlenden ultravioletten Lichtes herrühren. Dass die Spitze auf dieselbe Art wirkt, braucht dem nicht zu widerstreiten. Es hat sich nämlich gezeigt, dass Elektricität der Spitze entströmen muss, wenn sie wirken soll. Wenn diese Ausströmung stark genug ist, so ist sie von deutlichen Lichterscheinungen begleitet, und es ist wahrscheinlich, dass jedes Mal, wenn sich die Spitze wirksam zeigt, auch eine Lichterscheinung existirt, obgleich diese zuweilen viel zu schwach ist, um vom Auge aufgefasst werden zu können. Aber mehrere Umstände deuten darauf hin, dass die Erscheinung keine Wirkung des Lichtes ist.

1) Hertz, Wied. Ann. Bd. 31 S. 983. 1887.

Erstens kann man den Funken löschen, indem man einen Gegenstand von der Seite nähert, ohne dabei den gradlinigen Weg des Lichtes zu verdecken, ja dies kann sogar dann eintreffen, wenn man den Gegenstand im Verhältnis zum Funken der Flamme von hinten nähert. Dieser Grund braucht jedoch nicht entscheidend zu sein, da es sich gezeigt hat, dass ein Leiter in der Nähe des Funkens hemmend auf die Funkenbildung wirkt; sondern man kann es so auffassen, dass diese hemmende Einwirkung grösser ist als die vom Licht ausgeübte, welche die Funkenbildung fördert. Ohne alle Bedeutung ist die Sache jedoch nicht, da auch Isolatoren denselben Einfluss ausüben. In gewissen Fällen sind diese mit einer leitenden Schicht überzogen gewesen, in anderen Fällen aber kann dies nicht statt gefunden haben. Ausserdem wirkt der genäherte Körper am kräftigsten (in der grössten Entfernung von der Mittellinie), wenn er sich in der Mitte zwischen dem Funken und der Flamme befindet, also wenn sein Abstand von beiden der grösstmöglichste ist.

Weit wichtiger ist der Umstand, dass sich die Lichtquelle und die Spitze unter gewissen Bedingungen auch dann wirksam zeigen, wenn der gradlinige Weg zum Funken von einem undurchsichtigen Gegenstande verdeckt ist. Ein directer Einfluss des Lichtes ist hier kaum denkbar. Ein Lichtinterferenzphänomen kann den Umstand nicht erklären. Man könnte sich möglicherweise denken, dass diffuses Licht von den Wänden des Zimmers das Ueberspringen der Funken bewirkte, aber dies ist allzu unwahrscheinlich. Eine unbedeutende Verschiebung z. B. der Magnesiumlampe, die so eingestellt ist, dass die Funken übergehen, wenn die Funkenstrecke sich im Schatten eines Stabes befindet (9), kann bewirken, dass die Funken nicht mehr überspringen, obgleich die Kugeln des Ausladers infolge der Verschiebung einer intensiven Belichtung ausgesetzt werden. Das diffuse Licht kann durch diese unbedeutende Verschiebung nicht merkbar verändert werden.

Eine Menge von Umständen deuten darauf hin, dass elektrische Kräfte die Erscheinung bestimmen. So ist die Flamme wenig wirksam, den Funken zu zünden, wenn die Leitung nicht geladen, im Vergleich mit dem, was der Fall ist, wenn die Leitung geladen ist. Die Fähigkeit eines Leiters, den Funken zu löschen, hängt davon ab, ob er geladen ist oder nicht, und ob die Ladung dasselbe Vorzeichen hat wie die der Leitung. Das Gebiet, in welchem die Flamme den Funken zu zünden vermag, wird verschoben infolge der Nähe eines Körpers u. s. w. Dass also die Richtung der Kraftlinien von wesentlichem Einfluss auf das Phänomen ist, darf man wohl für ein Factum halten.

Man könnte sich nun denken, die Wirkung der Spitze bestehe darin, dass ein Punkt in der Luft in der Nähe der Funkenstelle ab-

geleitet sei und daher das Potential Null habe. Daher würden sich die Aequipotentialflächen dichter aneinanderlegen als in dem Falle, wenn die Spitze fehlt, und die Funkenbildung würde auf diese Weise erleichtert. Als jedoch ein Punkt in der Nähe der Funkenstelle vermittelst Quecksilber, das einer feinen Röhre entströmte (11), abgeleitet wurde, so wurde die Funkenbildung nicht gefördert, weshalb die Ableitung selbst kein Hauptmoment zu sein scheint.

Ist das Phänomen auch ein elektrisches, so scheint es darum doch kein elektrostatisches zu sein. Diese Ansicht wird dadurch bestärkt, dass sich Isolatoren ungefähr wie Leiter verhalten, und man hat sich also die Sache so vorzustellen, dass die elektrische Bewegung in sehr schnellen Oscillationen besteht, bei welchen die durch dielektrische Polarisation verschobenen Elektricitätsmengen von derselben Grössenordnung sind wie in einem Leiter. Schon vor 30 Jahren zeigte Kirchhoff[1]), dass sich die Bewegung der Elektricität in drahtförmigen Leitern unter Umständen, die denen analog sind, unter welchen hier der Funke sich bildet, in der Form einer Fourier'schen Serie ausdrücken lassen; und die von Herrn Hertz[2]) in jüngster Zeit angestellten Experimente über elektrische Schwingungen haben deren Existenz auch in Isolatoren ausser allem Zweifel gestellt.

Nachdem vorstehende Untersuchung schon abgeschlossen war, erhielt ich Kenntnis der von Herrn Hertz[3]) auf Grund der Maxwell'schen Theorie ausgearbeiteten Darstellung der Kraftvertheilung um eine elektrische Schwingung. Es ist wahrscheinlich, dass sich das im Vorstehenden Mitgetheilte in Uebereinstimmung mit dieser Theorie erklären lässt. Die von der Schwingung (Funkenstelle) herrührende Kraft erregt elektrische Schwingungen in der kleinen Flamme oder in der durch die elektrische Ausströmung aus der Spitze in denselben eigenthümlichen Zustand, wie die Gase der Flamme versetzten Luft. Die Richtung dieser Schwingungen hängt von der Lage der Flamme zur Funkenstelle ab, aber von der Richtung dieser Schwingung muss natürlich das Resultat von ihrer Interferenz mit der primären Schwingung abhängen. Da ferner die Kraftlinien durch einen in der Nähe befindlichen Körper eine andere Richtung erhalten müssen, wird auch hierdurch das Resultat der Interferenz der beiden Schwingungen geändert. Dass man die Flamme als eine besondere Schwingung aufzufassen hat, dafür spricht das Erlöschen des Funkens durch einen Körper hinter der Flamme (9), sowie der Umstand, dass die Grenzlinien des Aus-

---

1) Kirchhoff, Gesammelte Arbeiten, S. 131—182.
2) Hertz, Wied. Ann. Bd. 34 S. 273. 1888.
3) Hertz, Wied. Ann. Bd. 36 S. 1. 1889.

löschungsgebietes nach der Flamme hin convergiren. Dass jedoch diese Schwingungen der Flamme keine Lichtschwingungen sind, sondern einer grösseren Wellenlänge entsprechen, ist eine Folge davon, dass der gradlinige Weg zwischen der Flamme und dem Funken und seine nächste Umgebung durch einen undurchsichtigen Körper verdeckt sein kann, ohne dass die Wirkung der Flamme verschwindet.

Ohne Ausführung der mathematischen Berechnungen hierhergehöriger Fragen geräth man jedoch leicht in das weite Gebiet der unsicheren Vermuthungen. Ich beschränke mich daher auf vorstehende Andeutungen.

Ueber Linsen von sehr grosser Dicke.

Eine Berichtigung und Erweiterung.

Von

Richard Getschmann.

Am Schlusse des Artikels 34 von Ferraris' „Fundamentaleigenschaften der dioptrischen Instrumente“ findet sich eine Definition der convergenten und divergenten Systeme, welche nicht dem entspricht, was man ganz allgemein unter diesen Worten versteht und was Ferraris selbst wohl auch im Auge gehabt hat. Dies letztere lässt sich wenigstens vermuthen aus dem Schlusse des Artikels 18, wo für ein System von nur zwei Medien die richtigen Definitionen gegeben sind. Die Resultate, welche Ferraris in dem Abschnitte „über Linsen und Linsensysteme“ erhält, sind infolge dieser falschen Definitionen ebenfalls zum grossen Theil unrichtig, und zwar erweckt die dortige Entwicklung besonders über Linsen von grosser Dicke manche falsche Vorstellung.

Im folgenden sollen nun die Eigenschaften der Linsen und besonders dicker Linsen in Bezug auf Convergenz und Divergenz möglichst vollständig entwickelt werden.

Um zunächst an einem Beispiele ein falsches Resultat bei Ferraris aufzuweisen, wählen wir das erste von ihm gegebene. Dasselbe handelt von Biconvexlinsen und findet sich auf Seite 89. Eine Biconvexlinse wäre hiernach immer convergent, wenn

$$\Delta < \frac{\mu}{\mu - 1}(r + R'),$$

oder für eine gleichseitige Glaslinse

$$(r = R',\ \mu = \tfrac{3}{2}),$$

wenn

$$\Delta < 6r.$$

Danach wäre eine gleichseitige Linse, deren Dicke z. B. fünfeinhalbmal so gross ist als der Krümmungsradius, convergent. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie Fig. 1 zeigt.

In dieser sind die Krümmungsradien gleich 8 mm, die Dicke der Linse also gleich 44 mm angenommen, Der Strahl AB kommt parallel zur Axe von links und trifft die Tangentialebene zur ersten Grenzfläche V in B, er wird gebrochen in der Richtung BD. Die Construction von BD ist nach Artikel 10 ausgeführt und an dem in C auf der Axe errichteten Lothe zu ersehen. In D wird der Strahl BD

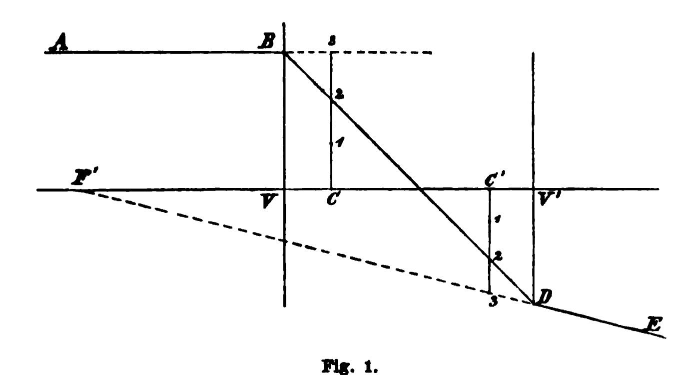


Fig. 1.

in der Richtung DE gebrochen (Construction wie oben) und trifft die Axe in F', dem zweiten Brennpunkte, links von der Linse. Alle parallell zur Axe einfallenden Strahlen scheinen also nach der Brechung aus F' zu kommen, d. h. sie treten aus der zweiten Grenzfläche V' divergent aus. Eine solche Linse wird wohl Niemand convergent nennen.

Ein ferneres Beispiel entnehmen wir Seite 90. Hier wird behauptet, dass eine biconvexe, gleichseitige Linse ($\mu = \frac{3}{2}$), bei der

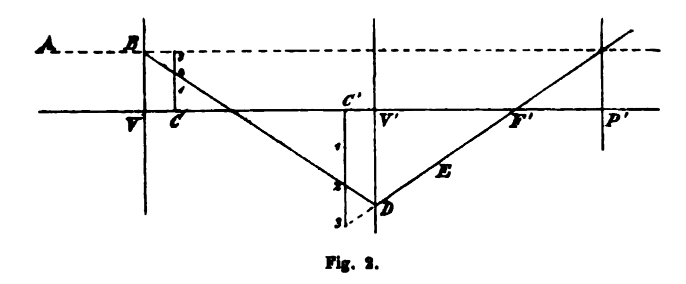


Fig. 2.

$\varDelta > 6r$ ist, divergent sei, also z. B. eine gleichseitige Linse, bei der $\varDelta = 8r$ ist.

Dieser Fall wird dargestellt durch Fig. 2.

Die Buchstaben bedeuten hier dasselbe wie oben, die Krümmungsradien sind gleich 5 mm gewählt. Man sieht, dass diese Linse vielmehr convergent ist. Die Rechnung nach den Formeln 1', 2', 3' auf Seite 88 ergibt dieselben Resultate. Für Fig. 1 z. B. ist zu setzen:

$$r = 8\text{ mm},\ r' = -8\text{ mm},\ \Delta = 44\text{ mm},$$

also wird

$$V'P' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{-8}{-16 + \frac{1}{3} \cdot 44} \cdot 44 = -176\text{ mm},$$

$$\varphi = 2 \cdot \frac{-64}{-16 + \frac{1}{3} \cdot 44} = +96\text{ mm}.$$

Also liegt der zweite Hauptpunkt 176 mm links vom zweiten Scheitel, der zweite Brennpunkt 96 mm rechts vom zweiten Hauptpunkt, also 80 mm links vom zweiten Scheitel: Diese Linse ist also divergent. Dasselbe liesse sich bei Fig. 2 ausführen.

Nachdem somit dargethan ist, dass im Ferraris unrichtige Resultate enthalten sind, gehen wir über zur Betrachtung der Gründe, wodurch dieselben veranlasst sind.

Werden durch ein dioptrisches System im ersten Medium parallele Strahlen so gebrochen, dass sie sich im letzten Medium in einen Punkt vereinigen, so dass also aus der letzten Grenzfläche ein convergentes Strahlenbüschel austritt, so heisst das System convergent; werden dagegen im ersten Medium parallele Strahlen (scheinbar) in einen Punkt vereinigt, der nicht im letzten Medium, sondern in einem der früheren liegt, so dass also aus der letzten Grenzfläche ein divergentes Strahlenbüschel austritt, so heisst das System divergent. Bei einem convergenten Systeme liegt also der zweite Brennpunkt im letzten Medium; diese Bedingung ist nothwendig und hinreichend. Sie fällt jedoch nicht mit der Bedingung zusammen; dass f negativ und f' positiv ist, welche im Artikel 34 aufgeführt wird. (f und f' sind die Brennweiten des dioptrischen Systemes und werden gerechnet vom ersten Hauptpunkt zum ersten Brennpunkt einerseits und vom zweiten Hauptpunkt zum zweiten Brennpunkt andrerseits; positiv, wenn man sich dabei im Sinne der Lichtfortpflanzung bewegt; negativ im anderen Falle.) Denn sind V, V' die Scheitelpunkte der ersten und letzten Grenzfläche; F, F' die Brennpunkte, so können dieselben folgendermaassen angeordnet sein:

$$P\ F\ V\ V'\ F'\ P'.$$

Das Licht möge wie gewöhnlich von links kommen. Hierin ist $P'F' = f'$ negativ, und doch ist das System convergent, da F' im letzten Medium liegt. Dass eine solche Anordnung möglich ist, zeigt Fig. 2. Das wahre Kriterium für Convergenz und Divergenz ist also das Vorzeichen von $V'F'$.

Um einen Ausdruck für $V' F'$ aufzustellen, hat man nach Artikel 62,3

$$V' P' = -\frac{r' \Delta}{(\mu - 1)\left[\Delta + \frac{\mu (r' - r)}{\mu - 1}\right]},$$

worin diese Entfernung vom Scheitelpunkt V' zum Hauptpunkt P' und zwar wie oben im Sinne der Lichtfortpflanzung gerechnet ist. Addirt man hierzu den Werth $\varphi = f'$ Artikel 62,1, so erhält man

$$V' F' = \frac{\mu r r'}{(\mu - 1)^2\left[\Delta + \frac{\mu (r' - r)}{\mu - 1}\right]} - \frac{r' \Delta}{(\mu - 1)\left[\Delta + \frac{\mu (r' - r)}{\mu - 1}\right]}$$

$$= \frac{r' [\mu r - \Delta (\mu - 1)]}{(\mu - 1)^2\left[\Delta + \frac{\mu (r' - r)}{\mu - 1}\right]}$$

$$= \frac{r'\left[r - \frac{\mu - 1}{\mu} \Delta\right]}{(\mu - 1)\left[r' - r + \frac{\mu - 1}{\mu} \Delta\right]},$$

oder, wenn man

$$r - \frac{\mu - 1}{\mu} \Delta = \alpha$$

setzt,

$$V' F = \frac{r' \alpha}{(\mu - 1)(r' - \alpha)}.$$

Da wir $\mu - 1$ immer positiv voraussetzen, indem wir nur Linsen betrachten, welche aus einem optisch dichteren Stoffe als das umgebende Medium hergestellt sind, so hängt das Zeichen von $V' F'$ ab von dem Ausdruck

$$y = \frac{r' \alpha}{r' - \alpha}$$

den wir jetzt für die einzelnen Linsenarten untersuchen wollen. Wir schicken voraus:

Ist $\Delta < \frac{\mu r}{\mu - 1}$, so ist $\alpha > 0$

ist $\Delta = \frac{\mu r}{\mu - 1}$, so ist $\alpha = 0$

ist $\Delta > \frac{\mu r}{\mu - 1}$, so ist $\alpha < 0$.

I. Biconvexlinsen. (Artikel 63.)

Es ist r positiv, $r' = - R'$ negativ; also erhalten wir

$$\frac{+ R' \alpha}{R' + \alpha}.$$

Ist $\Delta < \frac{\mu r}{\mu - 1}$ oder $\alpha > 0$, so ist $y > 0$, die Linse ist convergent.

Ist $\Delta = \frac{\mu r}{\mu - 1}$ oder $\alpha = 0$, so ist $y = 0$ $\left\{\begin{array}{l}\text{der zweite Brennpunkt}\\ \text{liegt im zweiten Scheitel.}\end{array}\right.$

Ist $\Delta > \frac{\mu r}{\mu - 1}$ oder $\alpha < 0$, so kann y negativ, unendlich oder positiv sein, je nach dem Betrage von α; die Linse selbst kann also divergent, teleskopisch oder convergent sein. Setzen wir für diesen Fall $\alpha = - \alpha_1$, so ist

$$y = \frac{- R' \alpha_1}{R' - \alpha_1}.$$

Es ist also $y \lesseqgtr 0$, je nachdem $\alpha' \lesseqgtr R'$ ist, oder $- \alpha \lesseqgtr - r'$, oder $\alpha \gtreqless r'$. Setzt man den Werth von α ein, so erhält man die Bedingungen

$$r - \frac{\mu - 1}{\mu} \Delta \gtreqless r'$$

aus welchen folgt

$$\Delta \lesseqgtr \frac{\mu (r - r')}{\mu - 1}$$

oder

$$\Delta \lesseqgtr \frac{\mu (r + R')}{\mu - 1}.$$

Nach **Ferraris** wäre nun eine Biconvexlinse convergent, wenn

$$\Delta < \frac{\mu}{\mu - 1} (r + R').$$

Dies ist jedoch, wie die obige Entwicklung zeigt, nicht richtig, sondern die Linse ist nur convergent; wenn

$$\Delta \leqq \frac{\mu r}{\mu - 1}$$

ist. Ist aber

$$\Delta > \frac{\mu r}{\mu - 1},$$

dabei aber

$$< \frac{\mu (r + R')}{\mu - 1},$$

so ist die Linse divergent; ist dabei

$$\varDelta = \frac{\mu (r + R')}{\mu - 1},$$

so ist die Linse teleskopisch; ist

$$\varDelta > \frac{\mu (r + R')}{\mu - 1},$$

so wird die Linse wieder convergent.

Für das von Ferraris ausgeführte Beispiel einer gleichseitig ($r' = - r$) biconvexen Linse ($\mu = \frac{3}{2}$) ergibt sich:

Ist $\varDelta < 3r$, so ist die Linse convergent.

Ist $\varDelta = 3r$, so liegt der zweite Brennpunkt im zweiten Scheitel.

Ist $\varDelta > 3r$, so sind 3 Fälle möglich:

1. $\varDelta < 6r$, die Linse ist divergent.
2. $\varDelta = 6r$, die Linse ist teleskopisch.
3. $\varDelta > 6r$, die Linse ist convergent.

Fast alle Resultate im Ferraris, die sich auf biconvexe Linsen von einiger Dicke beziehen, sind unrichtig.

2. Biconcavlinsen. (Artikel 64.)

Es ist r' positiv, $r = - R$ negativ, also wird

$$y = \frac{r' \alpha}{r' - \alpha}.$$

Da nun

$$\alpha = r - \frac{\mu - 1}{\mu} \varDelta$$

in diesem Falle seiner Natur nach negativ ist, so ist die Linse immer divergent. Das Resultat im Ferraris ist trotz falscher Ableitung richtig.

3. Planconvexlinsen. (Artikel 65.)

Erster Fall: r positiv, $r' = \infty$ (Figur 28 im Ferraris). Das Licht tritt auf der convexen Seite in die Linse ein.

$$y = \frac{r' \alpha}{r' - \alpha} = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{r'}} = \alpha.$$

Das Zeichen von α ist also allein maassgebend.

Ist $\varDelta < \frac{\mu r}{\mu - 1}$ oder $\alpha > 0$, so ist die Linse convergent.

Ist $\varDelta = \frac{\mu r}{\mu - 1}$ oder $\alpha = 0$, so liegt der zweite Brennpunkt im zweiten Scheitel.

Ist $\varDelta > \frac{\mu r}{\mu - 1}$ oder $\alpha < 0$, so ist die Linse divergent.

Folgerung 1 in Artikel 65 ist also unrichtig. Sei wiederum $\mu = \frac{3}{2}$, so ergibt sich, dass die Linse divergent ist, wenn $\varDelta > 3r$, was auch aus den bei Ferraris aufgeführten Gleichungen $\varphi = 2r$, $V'P' = - \frac{2}{3} \varDelta$ folgt.

Zweiter Fall: $r = \infty$, $r' = -R'$ negativ (Fig. 29).

$$y = \frac{R' \alpha}{R' + \alpha} = \frac{R'}{\frac{R'}{\alpha} + 1}.$$

α ist positiv und unendlich, also ist $y = R'$ immer positiv und die Linse convergent, was auch ohne diese Ableitung aus anderen Gründen folgt. Für diesen zweiten Fall ist also das im Ferraris gegebene Resultat richtig. Die beiden Fälle lassen sich aber überhaupt nicht gemeinschaftlich behandeln.

4. Planconcavlinsen. (Artikel 66.)

Erster Fall: $r = -R$, $r' = \infty$ (Fig. 30).

$$y = \frac{r' \alpha}{r' - \alpha} = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{r'}} = \alpha.$$

α ist negativ, also ist die Linse immer divergent.

Zweiter Fall: $r = \infty$, r' positiv (Fig. 31).

$$y = \frac{r' \alpha}{r' - \alpha} = \frac{r'}{\frac{r'}{\alpha} - 1}.$$

α ist unendlich, also wird $y = -r'$; die Linse ist immer divergent. Die Resultate im Ferraris sind richtig.

5. Menisken. (Artikel 67.)

A. Die convexe Seite sei dem Gegenstande zugekehrt. Dann sind r und r' positiv.

(Es ist zu bemerken, dass im Ferraris zu Art. 67 erster Fall die Figur 33, und und zu Art. 67 dritter Fall die Figur 32 gehört.)

Erster Fall: $r' > r$ (Fig. 33).

$$y = \frac{r' \alpha}{r' - \alpha}.$$

α ist (positiv oder negativ) kleiner als r, also auch kleiner als r', also ist der Nenner dieses Ausdrucks immer positiv. Sein Zeichen hängt also von dem Zeichen des Zählers, also von dem Zeichen von α ab.

Ist $\alpha > 0$ oder $\Delta < \frac{\mu r}{\mu - 1}$, so ist die Linse convergent;

ist $\alpha = 0$ oder $\Delta = \frac{\mu r}{\mu - 1}$, so liegt der zweite Brennpunkt im zweiten Scheitel;

ist $\alpha < 0$ oder $\Delta > \frac{\mu r}{\mu - 1}$, so ist die Linse divergent.

Das Resultat im Ferraris ist unrichtig.

Zweiter Fall: $r = r'$.

$$y = \frac{r\alpha}{r - \alpha} = \frac{r\alpha}{\frac{\mu - 1}{\mu}\Delta}.$$

Auch hier ist das Zeichen von α bestimmend, und wir haben dasselbe Resultat wie im ersten Falle.

Auch hier ist das Resultat im Ferraris falsch.

Dritter Fall: $r > r'$ (Figur 32).

Es sei zunächst

$$\Delta < \frac{\mu r}{\mu - 1},$$

dann ist $\alpha > 0$ und wie früher

$$y = \frac{r'\alpha}{r' - \alpha};$$

Ist nun ferner $\alpha < r'$ oder

$$\Delta > \frac{\mu (r - r')}{\mu - 1},$$

so ist die Linse convergent.

Ist $\alpha = r'$ oder

$$\Delta = \frac{\mu (r - r')}{\mu - 1},$$

so ist die Linse teleskopisch.

Ist $\alpha > r'$ oder

$$\Delta < \frac{\mu (r - r')}{\mu - 1},$$

so ist die Linse divergent.

Dieselben Bedingungen finden sich bei Ferraris, doch ist die Grund- und Hauptbedingung

$$\Delta < \frac{\mu r}{\mu - 1}$$

übersehen.

Ist nämlich

$$\Delta = \frac{\mu r}{\mu - 1}$$

so ist $\alpha = 0$ und $y = 0$, also fällt der zweite Brennpunkt in den zweiten Scheitel.

Ist $\Delta > \frac{\mu r}{\mu - 1}$, so ist $\alpha < 0$, $y < 0$ und die Linse ist divergent.

Nach Ferraris wäre im letzten Falle, wenn nämlich

$$\Delta > \frac{\mu r}{\mu - 1}$$

also auch

$$\Delta > \frac{\mu (r - r')}{\mu - 1}$$

ist, diese Linse convergent, was nicht zutrifft.

B. Die concave Seite sei dem Gegenstande zugekehrt; dann sind r und r' negativ, $r = -R$, $r' = -R'$.

Erster Fall: $r < r'$ oder $R > R'$.

Es ist dies dieselbe Linse, die in A, erster Fall behandelt ist, nur mit der anderen Seite dem Gegenstande zugekehrt. In

$$y = \frac{r' \alpha}{r' - \alpha}$$

ist α seiner Natur nach negativ, also ist der Zähler positiv; ferner ist $\alpha < r$, also auch kleiner als r', daher ist auch der Nenner positiv, also auch y. Die Linse ist also convergent. Für diese Stellung der Linse gilt also das Resultat von Ferraris.

Zweiter Fall: $r = r'$.

α ist negativ, kleiner als r, also auch kleiner als r'. Die Linse ist convergent.

Dritter Fall: $r' < r$, α ist negativ.

$$y = \frac{r' \alpha}{r' - \alpha}.$$

Ist nun $\alpha < r'$ oder

$$\Delta > \frac{\mu (r - r')}{\mu - 1},$$

so ist $y > 0$ und die Linse ist convergent; ist $\alpha = r'$ also

$$\Delta = \frac{\mu (r - r')}{\mu - 1},$$

so ist $y = \infty$: die Linse ist teleskopisch; ist $\alpha > r'$ oder

$$\Delta < \frac{\mu (r - r')}{\mu - 1},$$

so ist $y < 0$, die Linse ist divergent.

Ueberblickt man die erlangten Resultate, die sich leicht auch durch Construction verificiren lassen, noch einmal, so zeigt sich, dass die Resultate im Ferraris für Linsen, deren Dicke $> \frac{\mu r}{\mu - 1}$ ist, falsch sind. Möglich ist die Bedingung $\Delta > \frac{\mu r}{\mu - 1}$ natürlich nur für solche Linsen, welche dem Gegenstande eine convexe Seite zukehren. Dass aber gerade diese Bedingung zur kritischen wird, hängt damit zusammen, dass die zweite Brennweite der ersten brechenden Fläche $f_1' = \frac{\mu r}{\mu - 1}$ ist, und also der parallel zur Axe einfallende Strahl an der ersten Fläche so gebrochen wird, dass er in Linsen, deren Dicke $> \frac{\mu r}{\mu - 1}$ ist, in der Entfernung $V F_1' = \frac{\mu r}{\mu - 1}$ die Axe schneidet und auf die andere Seite derselben tritt.

Zum Schlusse möge noch kurz erwähnt werden, dass die Bilder, welche dicke Linsen $\left(\Delta > \frac{\mu r}{\mu - 1}\right)$ geben, von denen dünner Linsen in Bezug auf ihre Stellung abweichen. Wir sind gewohnt, reelle Linsenbilder umgekehrt, virtuelle aufrecht zu denken; dies trifft jedoch für dicke Linsen nicht immer zu. Die in Fig. 1 abgebildete Linse ist divergent; sie gibt von entfernten Gegenständen umgekehrte virtuelle Bilder, von nahen Gegenständen (zwischen V und F') umgekehrte reelle. Die in Fig. 2 abgebildete Linse ist convergent; sie gibt von entfernten Gegenständen aufrechte, von nahen (zwischen V und F) umgekehrte reelle Bilder.

Apparat zur Demonstration der Wirkungsweise des Telephons.

Von

Dr. L. **Grunmach.**

In meiner Arbeit über die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene der strahlenden Wärme (Wied. Ann. **14**, 113; 1881) habe ich zur Messung der Intensität des magnetischen Feldes einen Apparat construirt und angewandt, der sich zur Demonstration der Wirkungsweise des Telephons eignet. Er hat, wie aus der beigegebenen Seitenansicht ersichtlich, folgende Einrichtung: Die an dem einen Ende mit dem Griffe g versehene Spindel s ist durch die beiden Lager l_1 und l_2 so unterstützt, dass sie in ihrer Längsrichtung nach Ueberwindung einer geringen Reibung leicht bewegt werden kann; das andere Ende der Spindel trägt eine mit einer cylindrischen Vertiefung versehene

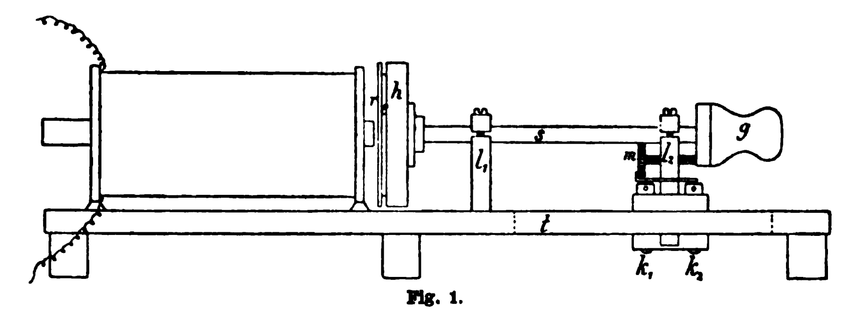


Fig. 1.

Holzplatte h, in welche Eisenplatten e von verschiedener Dicke durch den Ring r festgeklemmt werden können. Um die Grösse der Verschiebung der Spindel s mit ihren Teilen verändern zu können, ist das eine Lager l_2 auf dem Tische t in einer Nute verschiebbar und kann an jeder Stelle durch die Klemmschrauben k_1 und k_2 festgeklemmt werden, während die durch den Lagerkörper l_2 gehende, mit einer Trommel versehene Mikrometerschraube m zur feineren Einstellung der Verschiebungsgrösse der Spindel in ihrer Axenrichtung dient. Gegenüber der Eisenplatte befindet sich eine Spirale, in deren Oeffnung ein starker Magnet fest gelagert ist. Verbindet man die Enden der Spirale mit einem Galvanometer, so tritt bei jedem Nähern oder Entfernen der Eisenplatte in der Spirale ein Inductionsstrom auf, dessen Stärke durch die Grösse der Ablenkung der Galvanometernadel gemessen werden kann. Diese Inductionsströme entsprechen den durch die schwingende Membran im Telephon hervorgerufenen Inductionsströmen.

Protokoll

der zur Feier des zwanzigjährigen Bestandes abgehaltenen Sitzung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 10. December 1889.

Vorsitzender: Hofrath E. Ludwig.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Der Vorstand, Hofrath E. Ludwig, begrüsst die zahlreich erschienenen Gäste und gibt einen Ueberblick über die Geschichte des Vereins. Er bespricht die durch Hlasiwetz unter Mitwirkung von Bauer, C. v. Hauer, v. Lang, Lippmann, Loschmidt, Ludwig, Oser, Patera, Pierre, Pohl, Redtenbacher, Schneider, v. Schrötter, Stefan, Tschermak und Weselsky erfolgte Gründung der Gesellschaft, ihre Thätigkeit in den Versammlungen, der Unterstützung wissenschaftlicher Arbeiten durch Subventionen und Preisausschreibungen u. s. w. und schliesst unter lebhaftem Beifalle der Versammelten mit dem Wunsche, die Gesellschaft möge auch in Zukunft blühen, wachsen und gedeihen.

Hofrath Dr. L. v. Barth verkündet folgenden Beschluss der chemischen Preiscommission.

„Infolge Beschlusses der ausserordentlichen Generalversammlung vom 1. Februar 1887 wurde zur Feier des zwanzigjährigen Bestandes der Gesellschaft im December 1889, ein Preis von 600 fl. ausgeschrieben für die in wissenschaftlicher Hinsicht verdienstlichste Arbeit auf dem Gebiete der Chemie.

Die zur Beurtheilung der eingesendeten Arbeiten und zur Zuerkennung des Preises in der Generalversammlung vom 15. Februar 1887 gewählte Commission hat ihre Aufgabe in drei Sitzungen im Juli, October und November l. J. zu Ende geführt und beehrt sich Folgendes mitzuteilen. Die Preiscommission constatirt zunächst mit besonderer Befriedigung, dass unter den zahlreich eingelaufenen Concurrenzarbeiten

in überwiegender Mehrzahl sich solche befinden, welche ihrer trefflichen Leistungen wegen sehr wohl verdienen würden mit einem Preise betheilt zu werden, so dass die Commission in Erwägung zog, ob nicht eine Theilung des ausgeschriebenen Preises wünschenswert sei. Nachdem aber hierzu im Wortlaute der Ausschreibung ein Anhaltspunkt nicht zu finden war, wurde mit Stimmenmehrheit beschlossen, eine solche Theilung nicht vorzunehmen, und sodann mit Stimmeneinhelligkeit der Preis der Arbeit des Herrn Dr. Guido Goldschmiedt: „Untersuchungen über Papaverin" als der in streng wissenschaftlicher Hinsicht bedeutendsten und abgerundetsten zuerkannt. — Diese Arbeit, deren Resultate in einer Reihe von Abhandlungen niedergelegt sind, welche in den Sitzungsberichten der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften veröffentlicht wurden, hat die Constitution des Papaverins bis in die kleinsten Details vollständig aufgeklärt, so dass dieses Alkaloid wohl als das bestuntersuchte gelten kann. Sie hat ferner durch den Nachweis, dass das Papaverin ein Derivat des Isochinolins ist, zum ersten Male gezeigt, dass dieses letztere auch zum Aufbaue von Alkaloidmolekülen dienen könne, und durch Auffindung dieser wichtigen Thatsache der späteren Forschung einen neuen Weg eröffnet, der auch schon in neueren Arbeiten anderer Fachgenossen mit Erfolg betreten wurde.

Wien, am 30. November 1889.

„Barth, Lieben, Dr. A. Bauer, Brücke, Wiesner".

Hofrat Dr. J. Stefan verkündet folgenden Beschluss der physikalischen Preiscommission:

„Die Unterzeichneten haben sich geeinigt, unter den eingereichten Abhandlungen die: „Ueber eine Consequenz des Fresnel-Huyghens'schen Princips", welche den Herrn Prof. Karl Exner zum Verfasser hat, als diejenige zu erklären, welcher der von der chemisch-physikalischen Gesellschaft bestimmte Preis von 600 fl. zuzuerkennen sei.

Nach der Fresnel'schen Theorie der Reflexion, der Brechung und allgemeiner der Beugung des Lichtes gehen von jedem Punkt der Trennungsebene zweier Medien, welcher von einer einfallenden Lichtwelle getroffen wird, Elementarstrahlen nach allen möglichen Richtungen aus, eine Fortpflanzung von wahrnehmbaren Lichtwellen findet aber nur in jenen Richtungen statt, für welche sich die Elementarstrahlen nicht durch Interferenz aufheben.

Nach dieser Auffassung sind auch im Falle der totalen Reflexion Elementarstrahlen im zweiten Medium vorhanden, es gibt aber keine Richtung, für welche dieselben der Bedingung der Wahrnehmbarkeit genügen.

Herr Professor K. Exner schliesst nun, dass, wenn man einen Theil dieser Elementarstrahlen unterdrückt, auch in diesem Falle im zweiten Medium wahrnehmbare Wellen entstehen müssen, und er liefert für die Richtigkeit dieses Schlusses den experimentellen Beweis. Er versieht die total reflectirende Fläche mit einem Beugungsgitter, dessen Linien senkrecht zur Einfallsebene stehen. Es pflanzt sich jetzt Licht auch in dem zweiten Medium in mehreren Richtungen fort. Der Herr Verfasser hat diese Richtungen durch Messung bestimmt und auch nach den Grundlagen Fresnel's berechnet. Messung und Rechnung stimmen überein.

Soviel den Unterzeichneten bekannt ist, wurde ein solcher Versuch bisher nicht ausgeführt; es ist ein neuer Versuch der eine neue Thatsache feststellt und zugleich einen neuen Beweis für die Fruchtbarkeit des Fresnel'schen Princips bildet.

Wien, den 11. December 1889.

J. Stefan, (Berichterstatter), Lang, J. Loschmidt.

Der Vorsitzende beglückwünscht Namens der Gesellschaft die Verfasser der preisgekrönten Arbeiten.

Sodann hält Herr Dr. E. Lecher den angekündigten Vortrag: „Ueber die oscillatorische Bewegung der Elektricität (mit Vorführung der Hertz'schen Versuche)".

Wien, den 4. Februar 1890.

Der Secretär.

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:	Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert & Co., Kommandit-Gesellschaft, Nürnberg. (2/4)	Fabrik elektrischer Maschinen für Beleuchtung, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.
Hartmann & Braun, Bockenheim-Frankfurt a/M.	Elektrische und magnetische Messinstrumente. Vollständige Einrichtungen von Laboratorien.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

SCHUCKERT & Co.,

Kommandit-Gesellschaft,

Nürnberg.

Elektrische Maschinen für Hand- und Maschinenbetrieb. (1/4)

Anerkannt vortheilhafte Konstruktion für Lehrzwecke.

Im Verlag von R. Oldenbourg in München und Leipzig ist erschienen:

Leitfaden

zur

Anfertigung mikroskopischer Dauerpräparate

von

Otto Bachmann.

Lehrer an der kgl. Ackerbauschule in Landsberg a. L.

Mit 87 Abbildungen. Preis broschirt M. 4.—. geb. M. 5.—.



Volt- & Amperemeter

HARTMANN & BRAUN, BOCKENHEIM-FRANKFURT.

Voltmeter für electrische Lichtbetriebe mit grossen Intervallen an der Gebrauchsstelle, oder mit ziemlich gleichmässiger Scale in verschiedenen Aichungen

Voltmeter als Controllinstrument für Monteure.

Einfachere Spannungszeiger für galvanoplastische Betriebe.

Ampèremeter in allen Aichungen bis 1000 Amp.

Einfache Stromzeiger bis 5, 10 und 25 Amp.

Electricitätszähler, Erdschluss- resp. Isolationsprüfer.

Messbrücken, Rheostaten u. Galvanometer für Werkstätte u. Montage.

Blitzableiter-Untersuchungsapparate.

Trocken-Elemente, eigene Construction, für alle Zwecke vorzüglich geeignet.

Preislisten mit Abbildungen zur Verfügung.

(5/4)

XXVI. Band. 5. Heft.

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 5. Heftes.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1890.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

(Fortsetzung auf Seite 3 des Umschlags.)

Untersuchungen über das Gesetz der Temperaturabnahme in der Verticalen auf Grund verschiedener Formeln zur barometrischen Höhenmessung.

Von

Dr. E. Korselt.

Die barometrische Höhenmessung hat es mit der Aufgabe zu thun, auf Grund der Luftdruck- und Temperaturbeobachtungen, die man an zwei nicht zu weit von einander gelegenen Orten vornimmt, die Höhe zu finden, in welcher der eine Ort über dem andern liegt. Bezeichnet dp das Element des Luftdruckes, dh das der Höhe, d_r die Dichtigkeit der Luft an der betreffenden Stelle und g die Schwere, so besteht zwischen p und h die Differentialgleichung:

$$dp = -g \cdot d_r \cdot dh$$

und es ergibt sich h selbst hieraus durch Integration zwischen den Grenzen p_1 und p_2 einerseits und r_1 und r_2 andrerseits. Dabei ist indessen zu bedenken, dass d_r nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetz:

$$\frac{p}{d_r} = R(1 + at) = RT$$

sowohl vom Luftdruck, wie auch von der Temperatur abhängt und dass, so lange nicht die Temperatur ihrerseits wieder als Function des Luftdrucks oder der Höhe gegeben ist, die ganze Aufgabe unbestimmt, resp. unendlich vieldeutig ist. Die Aufgabe, eine richtige barometrische Höhenformel abzuleiten, ist hiernach identisch mit der Aufgabe, das Gesetz des Temperaturganges in verticaler Richtung oder die etwa bestehende Abhängigkeit des Luftdrucks von der Temperatur zu ermitteln.

Es ist von vornherein nicht wahrscheinlich, dass eine genaue Höhenbestimmung mittels des Barometers und Thermometers möglich ist, wenigstens nicht in der Nähe der Erdoberfläche. Denn schon eine oberflächliche Betrachtung des Temperaturganges daselbst lehrt, dass

derselbe gegenüber dem des Luftdruckes oft eine grosse Willkürlichkeit aufweist. Aber selbst, wenn man annimmt, dass Temperaturen und Luftdrucke in zwei verschiedenen Stationengruppen dieselben seien, so würde daraus noch nicht folgen, dass auch die Höhen dieselben sein müssten, und zwar aus folgendem Grunde: Sind Luftdruck und Temperatur an den beiden Endflächen einer Luftsäule p_1 T_1 und p_2 T_2, so kann man inmitten derselben beliebig Wärme zu- oder abführen, ohne dass innerhalb einer längeren Zeit Luftdruck und Temperatur an den Enden geändert werden. Denn es ist der Luftdruck einerseits Funktion des Gewichtes der über der betreffenden Stelle lagernden Luftsäule, andrerseits abhängig von der Temperatur der benachbarten Luftmassen; beide brauchen durch Zuführung oder Entziehung von Wärme im Innern des Luftkörpers auf längere Zeit hinaus keine Aenderung zu erfahren, und doch würde eine Verringerung des Wärmeinhaltes ein Nähern der Endflächen, also eine Verkleinerung der Höhe, und eine Vermehrung des Wärmeinhaltes eine Vergrösserung derselben zur Folge haben.

Trotzdem wäre es falsch, wenn man die barometrische Höhenmessung als wertlos verwerfen wollte. Abgesehen davon, dass sie oft das einzige Mittel zur Bestimmung einer in Frage kommenden Höhe bildet, gibt sie in jedem Falle einen angenäherten Werth. Es kommt nur darauf an, dass man die Fehlerquellen genügend studirt und auf ihren wahren Werth zurückführt, um durch Vermeidung derselben möglichst genaue Resultate für die Höhen zu erhalten. Da in den abzuleitenden Höhenformeln in erster Linie die Barometerstände für den Werth der Höhen bestimmend, dagegen die Temperaturen nur von secundärem Einfluss sind, so vermag selbst die Zugrundelegung eines falschen Temperaturgesetzes die Resultate nur ungenau, aber nicht werthlos zu machen.

Ein weiterer Vortheil der barometrischen Höhenformeln ist aber der, dass man mit Hilfe derselben einigen Aufschluss über das Gesetz der Temperaturabnahme in der Verticalen selbst erhält. Denn da die Ableitung einer richtigen Höhenformel und das Gesetz des Temperaturganges mit der Höhe im Grunde genommen identisch sind, und man durch trigonometrische Messungen die Höhen vieler Orte bestimmt hat und noch bestimmen kann, so kann man durch Umkehrung der Aufgabe und gleichzeitige Anwendung barometrischer Höhenformeln auf solche Orte Rückschlüsse auf die Temperaturabnahme in verticaler Richtung für diese Orte und für die betreffende Beobachtungszeit machen.

Dieser Weg ist es, der im folgenden eingeschlagen werden soll. Zunächst müssen jedoch die dabei zur Verwendung kommenden barometrischen Höhenformeln abgeleitet werden.

I.

Man unterscheidet in der Mechanik drei verschiedene Gleichgewichtszustände, einen stabilen, einen indifferenten und einen labilen. Um einen Körper aus dem stabilen Gleichgewichtszustande in Bewegung zu versetzen, ist ein gewisser Arbeitsaufwand erforderlich. Umgekehrt wird Arbeit geleistet, wenn ein Körper aus dem labilen Gleichgewichtszustande in Bewegung übergeht, und zwar geschieht das letztere ohne einen Kraftaufwand, z. B. durch einen unendlich kleinen Stoss. Ein Beispiel dazu bietet uns das Pendel, bei welchem man von stabilem, indifferentem und labilem Gleichgewichte spricht, je nachdem der Schwerpunkt unter, in oder über dem Unterstützungspunkte liegt. Um das Gleichgewicht im ersten Falle zu stören, muss eine gewisse Arbeit geleistet werden; um im letzten Bewegung hervorzurufen, genügt die geringste Verrückung und es vermag das Pendel durch das Herunterfallen (Uebergang vom labilen zum stabilen Gleichgewichte) eine Arbeit zu leisten.

Auch für die Atmosphäre kann das Gleichgewicht ein dreifaches sein; nur tritt hier an die Stelle einer Arbeitsleistung, die man nötig hat, um das stabile Gleichgewicht dem labilen entgegenzuführen, zumeist eine Wärmezufuhr. Da nach der mechanischen Wärmetheorie Arbeit und Wärme äquivalent sind, so ist eine Vermehrung des Wärmeinhaltes gleichbedeutend mit einer Vermehrung der Fähigkeit, Arbeit zu leisten. In der Regel ist der Gleichgewichtszustand des Luftmeeres ein stabiler. Die Erfahrung jedoch, dass die Luft zuweilen aus dem Zustande vollständiger Ruhe in heftige Bewegungen überzugehen vermag, die in sog. Convectionsströmungen ihren Ausdruck findet, deutet darauf hin, dass auch der labile Gleichgewichtszustand vorkommt. Es entsteht nun die Frage: Wodurch ist die Grenze zwischen beiden Zuständen, das indifferente oder convective Gleichgewicht, charakterisirt; wie gestaltet sich in diesem Falle Luftdruck- und Temperaturvertheilung in der Verticalen?

Den obigen Bemerkungen entsprechend stellt der indifferente Gleichgewichtszustand die Grenze zwischen dem stabilen und labilen dar, und es ist deshalb eine Arbeitsleistung oder, was auf dasselbe hinausläuft, eine Wärmezufuhr nicht erforderlich, wenn man eine bestimmte Luftmasse aus einer Lage in eine beliebige andere überführt. Da nun ein Luftquantum, wenn es sich in verticaler Richtung bewegt, an Volumen zunimmt und hierbei durch Zurückschieben des Druckes der umgebenden Luft eine Arbeit leistet, so muss die hierzu erforderliche (äquivalente) Wärmemenge der Luft selbst entzogen werden. Es geschieht die Arbeitsleistung auf Kosten der inneren Energie der Luft, während die Gesammtenergie dieselbe bleibt. Nach den Sätzen der

mechanischen Wärmetheorie ist dann, wenn $p_0 v_0$ und $p v$ Druck und Volumen ein und derselben Luftmasse in zwei verschiedenen Zuständen darstellen:

$$p v^k = p_0 v_0^k = \text{Const. und hierin } k = \frac{c_p}{c_k} = 1{,}4011. \tag{1}$$

Zwischen Luftdruck und Temperatur besteht dabei die Beziehung:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\varepsilon}, \tag{2}$$

wenn T und T_1 die absoluten Temperaturen sind. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Luft vollkommen trocken sei, eine Voraussetzung, die vor der Hand beibehalten werden soll.

Sprung[1]), der sich nach Peslin, Reye und Guldberg-Mohn wieder mit der Frage nach dem indifferenten Gleichgewichte für die Atmosphäre beschäftigt hat, gelangt nun auf folgende Weise zu der entsprechenden barometrischen Höhenformel:

Er geht von der vielfach durch die Erfahrung bestätigten Annahme aus, dass die Abnahme der Temperatur für gleiche Höhen constant sei. Bezeichnen T und T_1 die absoluten Temperaturen unter den Drucken p und p_1, ferner $p_1 T_1$ den Anfangszustand und ist ϑ die Temperaturabnahme für die Höhe von 1 m, so ist dieser Annahme zufolge:

$$T = T_1 - \vartheta h \tag{3}$$

Legt man dann die Differentialgleichung des vorigen Abschnittes in der Form:

$$dp = -\frac{g p}{R T} dh \tag{4}$$

zu Grunde, indem man d_r aus dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetz:

$$\frac{p}{d_r} = R T$$

entnimmt, so wird:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \cdot \frac{dh}{T_1 - \vartheta h}. \tag{5}$$

Dies integrirt ergibt:

$$\text{Lognat } \frac{p}{p_1} = \frac{g}{R \vartheta} \text{ Lognat } \left(\frac{T_1 - \vartheta h}{T_1}\right). \tag{6}$$

Setzt man hierin noch zur Abkürzung:

$$\frac{g}{R \vartheta} = m,$$

so folgt nach einer einfachen Reduction:

1) Sprung, Lehrbuch der Meteorologie pag. 168—169.

$$\frac{p}{p_1} = \left(1 - \frac{\vartheta h}{T_1}\right)^m = \left(\frac{T_1 - \vartheta h}{T_1}\right)^m. \tag{7}$$

Kombinirt man mit dieser Formel, die für den allgemeinen Fall der constanten Temperaturabnahme gilt, die Gleichung 2, indem man dort zur Unterscheidung für die dem indifferenten Gleichgewichtszustande entsprechende Temperatur unter dem Drucke p T^1 setzt, also die Gleichung:

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{T^1}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{T^1}{T_1}\right)^{\varepsilon}, \tag{8}$$

so zeigt sich ohne weiteres, dass, wenn man für $r = m$, also

$$\vartheta = \frac{g}{R} \cdot \frac{k-1}{k}$$

setzt:

$$T^1 = T_1 - \vartheta_\varepsilon h \tag{9}$$

wird.

In Worten ausgedrückt, heisst dies: Das indifferente Gleichgewicht entspricht demjenigen Falle der constanten Temperaturabnahme, in welchem

$$\vartheta = \frac{g}{R} \cdot \frac{k-1}{k}$$

wird.

Mit Beziehung auf die numerischen Werthe von g, R und k ist:

$$\vartheta = 0{,}00993^\circ \text{ C.}$$

Die Auflösung von Gl. 9 nach h ergibt ohne weiteres die Höhenformel für indifferentes Gleichgewicht; ebenso die Auflösung von Gl. 7 die für den allgemeinen Fall der für gleiche Höhenintervalle constanten Temperaturabnahme. Während indessen die Grösse ϑ für indifferentes Gleichgewicht den festen Werth $\vartheta = 0{,}00993$ besitzt, wird die Gl. 7 erst brauchbar, wenn ϑ durch Beobachtung ermittelt ist.

Da diese Ermittlung im Grunde auf eine directe Messung der Höhe, oder wenigstens eines Theiles derselben hinauslaufen würde, so kann man auch die Sprung'sche Lösung der durch Gl. 3 charakterisirten Aufgabe eine vollständige nicht nennen. Die Auffindung der Grösse ϑ ist indessen leicht zu umgehen, wenn man derselben eine andere Form gibt. Sind T_1 und T_2 die Temperaturen in der unteren und oberen Station, deren Höhenunterschied h zu finden ist, so hat man:

$$\vartheta = \frac{T_1 - T_2}{h}.$$

Dies eingesetzt in Gl. 7 und für $p = p_2$ gesetzt, ergibt:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(1 - \frac{T_1 - T_2}{T_1 h} \cdot h\right)^{\frac{gh}{R(T_1 - T_2)}} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{gh}{R(T_1 - T_2)}}. \tag{10}$$

Diese Gleichung lässt sich noch in der Form schreiben:

$$\frac{p_2}{p_1} = e^{\frac{g\,h}{R\,(T_1 - T_2)}\log\frac{T_2}{T_1}}. \tag{11}$$

Es sind hierin alle Werthe ausser h bekannt oder durch Beobachtung leicht zu ermitteln, und es kann deshalb h durch blosse Auflösung von Gl. 10 gefunden werden.

Die Gl. 10 muss alle Fälle einer constanten Temperaturabnahme umfassen: im besonderen den Fall des indifferenten Gleichgewichtes, wie sich schon zeigte, und den Fall, dass die Temperaturabnahme für gleiche Höhenintervalle gleich Null ist. In dem letzten Falle ist $\vartheta = 0$ $T_1 = T_2 = T$ zu setzen und es erhält $\frac{p_2}{p_1}$ die unbestimmte Form $\infty \cdot 0$, die später noch ermittelt werden soll. Für das indifferente Gleichgewicht besteht zwischen p und T die Poisson'sche Gleichung:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

worin $k = 1{,}4011$ ist, und es ist die Temperaturabnahme für 100 m 0,993° C. Soll, wie zu vermuten ist, eine ähnliche Beziehung für alle andern Fälle einer constanten Temperaturabnahme bestehen, so würde sich für den Fall $T_1 = T_2 = T$ aus

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

für k die Bedingung

$$\left(\frac{p^1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} = 1 \text{ also } \frac{k-1}{k} = 0 \text{ oder } k = 1$$

ergeben. Bedenkt man nun, dass die Erfahrung als Temperaturabnahme für 100 m in der Regel einen zwischen 0 und 0,993° C liegenden Werth ergeben hat, so wird man in dem Gedanken bestärkt, dass jeder zwischen 1 und 1,4011 liegende Werth von k einen besonderen Fall der constanten Temperaturabnahme repräsentiren wird und dass man, anstatt:

$$T = T_1 - \vartheta h$$

zu setzen, allgemein die Annahme:

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

wird machen können, wenn man nur unter k einen noch näher zu bestimmenden Werth zwischen 1 und 1,4011 versteht.

Um dies zu beweisen und um den entsprechenden Werth, der zum Unterschiede von $k = 1{,}4011$ mit dem Buchstaben ν bezeichnet werden soll, zu finden, combiniren wir die Gleichung:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\nu}{\nu - 1}}$$

mit Gl. 10, nämlich

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{g\,h}{R\,(T_1 - T_2)}}.$$

Soll zwischen beiden Identität bestehen, so muss

$$\frac{\nu}{\nu - 1} = \frac{g\,h}{R\,(T_1 - T_2)}$$

sein, oder wenn man die Gl. 11 zu Hilfe nimmt, so muss

$$\frac{p_1}{p_2} = e^{\frac{\nu}{\nu - 1} \log \frac{T_2}{T_1}}$$

sein. Da nun

$$\frac{\nu}{\nu - 1} \log \frac{T_2}{T_1} = \log \frac{p_2}{p_1}$$

ist und

$$e^{\log \frac{p_2}{p}} = \frac{p_2}{p_1},$$

so ist diese Identität thatsächlich vorhanden und man erhält den Satz:

Die Annahme einer constanten Temperaturabnahme zwischen den Niveaux $p_1\,T_1$ und $p_2\,T_2$ ist identisch mit der Annahme:

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{\nu}{\nu - 1}},$$

wenn man darin für:

$$\frac{\nu - 1}{\nu} = \log \frac{T_1}{T_2} : \log \frac{p_2}{p_1}$$

setzt.

Durch Auflösung nach h erhält man noch als Höhenformel:

$$h = \frac{R}{g}\,\frac{\nu}{\nu - 1} \cdot (T_1 - T_2) = \frac{R}{g} \cdot \frac{T_1 - T_2}{\log T_1 - \log T_2} \cdot (\log p_1 - \log p_2). \quad (12$$

II.

Bisher ist angenommen worden, dass die Atmosphäre aus vollkommen trockener Luft bestehe; thatsächlich befindet sich in derselben immer eine bestimmte Menge Wasser in gasförmiger, flüssiger oder fester Form, und es fragt sich nun, inwieweit die erhaltenen Resultate noch für ein solches Gemisch von Luft und Wasser giltig sind. Da es sich hier um den Zusammenhang von Höhe und Luftdruck (bezw.

Temperatur) in einer in Gleichgewicht befindlichen Atmosphäre handelt, aber nicht um Bewegung der Luftmassen, in welchem Falle das vorhandene gasförmige Wasser zum Theil in flüssiges oder festes (Eisnadeln) übergehen würde, so kann von dem Vorhandensein condensirten Wasserdampfes abgesehen werden, und es soll weiter angenommen werden, dass in der Luft der Wasserdampf in solchem Zustande vorhanden sei, dass für denselben die gleichen Gesetze wie für ein vollkommenes Gas gelten. Bezeichnet ϱ die Dichtigkeit eines Luftquantums, in welchem der Gesammtdruck p, der Dunstdruck f, die absolute Temperatur T und die Gasconstante für trockene Luft $a = 287{,}09$ ist, so hat man nach Guldberg-Mohn[1]):

$$p = \frac{a \cdot \varrho \cdot T}{1 - 0{,}378 \frac{f}{p}} \tag{1}$$

und dem entsprechend für den Anfangszustand:

$$p' = \frac{a \cdot \varrho_1 T_1}{1 - 0{,}378 \frac{f_1}{p_1}}.$$

Durch Division folgt:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\varrho}{\varrho_1} \cdot \frac{T}{T_1} \left(\frac{1 - 0{,}378 \frac{f}{p}}{1 - 0{,}378 \frac{f_1}{p_1}} \right). \tag{2}$$

Wenn man sich in verticaler Richtung bewegt, so ist die Grösse $\frac{f}{p}$, da f, wie Hann gezeigt hat, sich nach einem andern Gesetz als p ändert, nicht constant. Es ist vielmehr diejenige Grösse a, die man für jedes einzelne Gas die Gasconstante nennt, mit dem Gesammtluftdruck (bezw. Dunstdruck) veränderlich, sobald man es wie hier mit einem Gemisch zweier Gase zu thun hat. Wegen der Kleinheit des Quotienten $\frac{f}{p}$ und mit Rücksicht auf den Umstand, dass ein genauer Werth für die Höhen aus der abzuleitenden Höhenformel überhaupt nicht zu erwarten ist, weil das Gesetz der Temperaturabnahme in der Verticalen durch manche Zufälligkeiten durchbrochen wird, wird man jedoch nur einen sehr kleinen Fehler begehen, wenn man die Grösse

$$\frac{p_1}{\varrho_1 T_1} \left(\frac{1 - 0{,}378 \frac{f}{p}}{1 - 0{,}378 \frac{f_1}{p_1}} \right),$$

1) Guldberg-Mohn, Études sur les mouvements de l'atmosphère. § 1.

die Gasconstante für feuchte Luft, auch wirklich als constant ansieht und dafür einen noch näher zu definirenden Mittelwerth setzt. Unter dieser Voraussetzung behalten die bisherigen Enwicklungen auch für feuchte, nicht gesättigte Luft ihre Giltigkeit. Ob man, wie Guldberg-Mohn für die Grösse

$$\frac{273 + T}{1 - 0{,}378 \frac{f}{p}}$$

den Namen virtuelle Temperatur einführt und mit diesem Begriffe weiter rechnet, oder für die Gasconstante einen mittleren Werth annimmt, kommt im Grunde auf dasselbe hinaus. Für das Folgende würde die Einführung des Begriffs der virtuellen Temperatur nur den Nachtheil haben, dass die abzuleitenden Höhenformeln wärmetheoretisch nicht mehr scharf fundirt wären. Denn man kann sich unter „virtueller Temperatur" ebenso wenig denken, als unter einer Constante, die nicht genau constant ist.

Da im folgenden vielfach auf die Rühlmann'sche[1]) Arbeit über barometrische Höhenmessungen Bezug genommen werden soll, und um die beiden Schwerecorrectionen mit in die entsprechenden Höhenformeln aufzunehmen, soll die Aufgabe des vorigen Abschnittes noch auf dem Wege gelöst werden, welcher der Rühlmann'schen Ableitung der bisher üblichen Barometerformel entspricht.

III.

Wir gehen von der Differentialgleichung:

$$dp = -(g)\, d_r \cdot dh \tag{1}$$

aus, welche mit Gl. 4 in I identisch ist, wenn man $dr = dh$, $d_r = \frac{p}{RT}$ und $g = (g)$ setzt. (g) bedeutet die Schwerebeschleunigung in der in Betracht kommenden Höhe und unter der geographischen Breite ψ. Es ist deshalb:

$$(g) = \frac{(\gamma)\, r_0^2}{r^2}.$$

wenn r_0 den mittleren Erdradius und (γ) die Schwere im Meeresniveau unter ψ^0 Breite darstellt. Dies eingesetzt, gibt:

$$dp = -d_r\, (\gamma)\, \frac{r_0^2}{r^2}\, dr.$$

Zum Zwecke der Integration soll weiter die Substitution:

$$s = 1 - \frac{r_0}{r} \text{ oder } ds = \frac{r_0}{r^2}\, dr$$

1) Rühlmann, Barometrische Höhenmessungen und ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre. Leipzig 1870.

gemacht werden, wodurch Gl. 1 übergeht in:

$$dp = -(\gamma)\, r_0\, d_r\, ds.$$

Nach I deckt sich nun die Annahme einer für gleiche Höhenintervalle constanten Temperaturabnahme mit der Beziehung:

$$p v^{\nu} = p_0 v_0^{\nu}, \tag{2}$$

worin

$$p_0 = B(\gamma) D,\quad v = \frac{1}{d_r},\quad v_0 = \frac{1}{d_{r0}}$$

ist.

B ist der Normalbarometerstand $B = 0{,}76$ m, D die Dichtigkeit des Quecksilbers bei 0° C. $D = 13{,}59593$. Aus Gl. 2 folgt:

$$d_r = d_{r0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\nu}}.$$

Dies eingesetzt, gibt:

$$dp = -(\gamma)\, r_0 \cdot d_{r0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\nu}} \cdot ds. \tag{3}$$

Dividirt man mit $\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ und integrirt zwischen den Grenzen p_1 und p_2, beziehentlich s' und s'' oder r_1 und r_2, so folgt:

$$\frac{p_0^{\frac{1}{\nu}}}{\frac{\nu-1}{\nu}}\left(p_2^{\frac{\nu-1}{\nu}} - p_1^{\frac{\nu-1}{\nu}}\right) = -(\gamma)\, r_0^2\, d_{r0}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right) = -(\gamma)\,\frac{r_0^2}{r_1 r_2}\cdot d_{r0}\cdot h. \tag{4}$$

Durch Auflösung nach h folgt hieraus:

$$h = p_0^{\frac{1}{\nu}} \cdot \frac{\nu}{\nu-1}\left(p_1^{\frac{\nu-1}{\nu}} - p_2^{\frac{\nu-1}{\nu}}\right)\frac{r_1 r_2}{r_0^2\cdot(\gamma)\, d_{r0}} =$$

$$= p_0 \cdot \frac{\nu}{\nu-1}\left(\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}}\right)\frac{r_1 r_2}{r_0^2\cdot(\gamma)\, d_{r0}}. \tag{5}$$

Bezeichnet nun T_0 die zum Normaldruck p_0 und zu d_{r0} gehörige absolute Temperatur, so besteht weiter die Beziehung:

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}} = \frac{T_1}{T_0}$$

oder ebenso

$$\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}} = \frac{T_2}{T_0}$$

und es wird aus Gl. 5:

$$h = p_0 \cdot \frac{\nu}{\nu - 1} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_0} \right) \frac{r_1 r_2}{r_0^2 (\gamma) d_{r0}}. \tag{6}$$

Es erübrigt noch, den hier vorkommenden Werthen von $\frac{r_1 r_2}{r_0^2}$, p_0, (γ), d_{r0} eine andere Form zu geben.

Für $\frac{r_1 r_2}{r_0^2}$ ergibt sich, wenn man die Seehöhe der unteren Station s nennt,

$$\frac{r_1 r_2}{r_0^2} = \frac{(r_0 + s)(r_0 + h + s)}{r_0^2} \text{ nahezu } = \frac{r_0^2 + r_0(h + s + s)}{r_0^2} = 1 + \frac{2s + h}{r_0}.$$

Als numerischer Werth von r_0 soll der mittlere Erdradius verwendet werden, nämlich:

$$r_0 = 6378150 \text{ m}.$$

Die Grösse (γ) hängt mit der Schwere unter der Breite von 45° durch die Beziehung zusammen:

$$(\gamma) = \gamma (1 - 0{,}002623 \cos 2\psi).$$

Für p ist allgemein $p = B \gamma D$; deshalb ist:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{g_2}{g_1},$$

und es ist

$$\frac{g_2}{g_2} = \frac{r_1^2}{r_0^2} : \frac{r_2^2}{r_0^2}$$

zu berechnen. Mit Rücksicht auf die Anziehung der Gebirgsschichten, welche sich vom Meeresniveau bis zu der betreffenden Station erstrecken, gibt Poisson hierfür den Werth:

$$\frac{g_2}{g_1} = 1 - \frac{r_2 - r_1}{r_0} \left(2 - \frac{3}{2} \delta \right) = 1 - \frac{h}{r_0} \cdot \frac{5}{4}$$

Es bezeichnet hierin δ das Verhältnis der Dichte der oberen Erdschichten zur mittleren Dichtigkeit, und da dasselbe ungefähr $\frac{1}{2}$ ist, so ist

$$2 - \frac{3}{2} \delta = \frac{5}{4}.$$

Die Grösse d_{r0} ist die Dichtigkeit des die Atmosphäre bildenden Gemisches von Luft, Wasserdampf, Kohlensäure etc. bei einem Barometerstande von 0,76 m und bei einer Temperatur, wie sie der Beziehung

$$\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\nu - 1}{\nu}} = \frac{T_1}{T_0}$$

entspricht, unter 45° Breite. Ist s_σ die Dichtigkeit bei σ mm Dunstdruck, aber bei $T = 273°$ C, so hat man:

$$d_{r0} = \frac{s_\sigma (T = 273)}{1 + 0,00367\,(T_0 - 273)} = \frac{s_\sigma \cdot 273}{T_0}$$

Endlich ist s_σ noch durch $s = 0,001293024$, d. h. die Dichtigkeit der trockenen Luft unter 45° Breite, bei 760 mm Barometerstand und $T = 273°$ C auszudrücken.

Es enthält 1 cbm atmosphärische Luft unter 0° ($T = 273$) Celsius bei einem Dunstdruck von σ mm $\sigma = \varphi B$ nur:

$$s \cdot \frac{B - \varphi B}{B} = s\,(1 - \varphi)$$

reine Luft, dagegen

$$\lambda \frac{\varphi \cdot B}{B} = \lambda \varphi$$

Wasserdampf. Hierin ist λ das Gewicht des gesättigten Wasserdampfes in 1 cbm von 0° ($T = 273$) Temperatur. Das Gewicht von 1 cbm des Gemisches ist also:

$$s\,(1 - \varphi) + \lambda \varphi = s - \varphi\,(s - \lambda) = s - s \cdot \varphi \left(1 - \frac{\lambda}{s}\right).$$

Nun ist nach Regnault

$$\frac{\lambda}{s} = 0,6219 \quad 1 - \frac{\lambda}{s} = 0,378.$$

Mithin wird:

$$d_{r0} = \frac{s_\sigma \cdot 273}{T_0} = \frac{s \cdot 273}{T_0}\,(1 - 0,378\,\varphi) = \frac{s \cdot 273}{T_0}\left(1 - 0,378\,\frac{\sigma}{b}\right).$$

Dem Werthe von $\alpha = 0,00367$ entsprechend, soll hierin für 273 noch der genauere Werth 272,48 angenommen werden.

Setzt man die Werthe von $\frac{r_1 r_2}{r_0^2}$, (γ), d_{r0} und p in Gl. 6 ein, so fällt die Temperatur T_0 weg, und man erhält:

$$\left.\begin{aligned} h = \frac{BD}{s \cdot 272,48}\left(1 + 0,002623 \cos 2\psi\right)\left(1 + 0,378\,\frac{\sigma}{b}\right) \\ \left(1 + \frac{2z + h}{r_0}\right)\frac{\nu}{\nu - 1} \cdot (T_1 - T_2). \end{aligned}\right\} \quad (A$$

Hierin ist

$$\frac{\nu}{\nu - 1} = \frac{\log \frac{T_1}{T_2}}{\log \frac{p_1}{p_2}} = \frac{\log T_1 - \log T_2}{\log\left(\frac{b_1}{b_2}\left(1 - \frac{5}{4}\frac{h}{r_0}\right)\right)} = \frac{\log T_1 - \log T_2}{\log b_1 - \log b_2 + \frac{5}{4\,\text{Mod}} \cdot \frac{h}{r_0}}.$$

Da die Grösse $\frac{\nu}{\nu - 1}$ für ein und denselben Ort eine Constante ist, wenn man sich in verticaler Richtung bewegt, so erhält man, wenn man Gl. A auf zwei verschiedene Höhen h_2 und h_3 anwendet und dividirt:

$$\frac{h_2}{h_3} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_3},$$

eine Beziehung, welche die zu Grunde liegende Annahme der constanten Temperaturabnahme wiedergibt.

Bei der Auswerthung der Gleichung A berechnet man h erst mit Hinweglassung aller Schwere-, und Dunstdruckcorrectionen angenähert aus:

$$h = \frac{BD}{s \cdot 272{,}48} \cdot \frac{\log T_1 - \log T_2}{\log b_1 - \log b_2} \cdot (T_1 - T_2)$$

und setzt diesen angenäherten Werth von h zur genaueren Bestimmung von ν und

$$1 + \frac{2z + h}{r_0}$$

ein.

Die Formel A sowohl, wie auch die entsprechende Gleichung 13 in I gibt für die Höhe h den unbestimmten Werth $0 \cdot \infty$, wenn man für $\nu = 1$ also $T_1 = T_2 = T$ setzt. Um diesen Werth zu ermitteln, knüpfen wir an die Gleichung 5 an, und es gilt dann

$$\frac{\nu}{\nu - 1}\left(p_1^{\frac{\nu-1}{\nu}} - p_2^{\frac{\nu-1}{\nu}}\right)$$

für $\nu = 1$ oder

$$\frac{\nu - 1}{\nu} = \beta = 0$$

zu finden.

Setzt man hier

$$\frac{\nu}{\nu - 1} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\psi(\beta)}$$

und

$$p_1^{\frac{\nu-1}{\nu}} - p_2^{\frac{\nu-1}{\nu}} = \varphi(\beta)$$

und bildet:

$$\left[\frac{\varphi'(\beta)}{\psi'(\beta)}\right]_{\beta=0}$$

so folgt, da $\psi'\beta = 1$ und $\varphi'\beta = \text{Log}\, p_1 \cdot (p_1^\beta) - \text{Log}\, p_2 \cdot (p_2^\beta)$ ist:

$$\left[\frac{p_1^\beta \,\text{Log}\, p_1 - p_2^\beta \,\text{Log}\, p_2}{1}\right]_{\beta=0} = \text{Log}\, p_1 - \text{Log}\, p_2 = \text{Log}\,\frac{p_1}{p_2} = \log\frac{p_1}{p_2} \cdot \text{Mod.}$$

Demnach ist auch

$$\frac{\varphi(\beta)}{\psi(\beta)} = \text{Log}\,\frac{p_1}{p_2}$$

und man erhält aus Gl. 5, da $p_0^{\frac{1}{\nu}} = p_0$ ist:

$$h = p_0 \cdot \frac{r_1 r_2}{r_0^2 (\gamma)\, d_{r0}} \cdot \text{Log}\,\frac{p_1}{p_2} = p_0 \,\frac{r_1 r_2}{r_0^2 (\gamma)\, d_{r0}} \cdot \frac{1}{\text{Mod}} \left(\log b_1 - \log b_2\, \frac{5}{4}\frac{h}{r_0}\,\text{Mod}\right).$$

Setzt man hierin für $\frac{r_1 r_2}{r_0^2}$, (γ) und p_0 die oben gegebenen Werthe ein und beachtet, dass jetzt, wo man die Temperatur der Luftsäule von der Höhe h als constant, und zwar $= \frac{t_1 + t_2}{2}$ ansieht,

$$d_{r0} = \frac{s_\sigma}{1 + 0{,}00367\,\frac{t_1 + t_2}{2}} = \frac{s\left(1 + 0{,}378\,\frac{\sigma}{b}\right)}{1 + \alpha\,\frac{t_1 + t_2}{2}}$$

ist, so erhält man die übliche Höhenformel in der Rühlmann'schen Fassung:

$$\left.\begin{aligned} h = \frac{BD}{\text{Mod}\cdot s}\left(1 + \alpha\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)\right)\left(1 + 0{,}378\,\varphi\right)\left(1 + 0{,}002623\cos 2\psi\right) \\ \left(1 + \frac{2z + h}{r_0}\right)\left(\log b_1 - \log b_2 + \text{Mod}\cdot\frac{5}{4}\,\frac{h}{r_0}\right) \end{aligned}\right\} \text{(B}$$

Die Ableitung der Formel B als besonderen Fall von Gl. A konnte man auch auf folgendem Wege bewerkstelligen:

Man entwickelt aus der Gleichung

$$dp = -g\,d_r \cdot dh$$

mit Zugrundelegung der Beziehung:

$$d_r = d_{r1}\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\nu}}$$

in ähnlicher, elementarer Weise wie Wüllner in seinem Lehrbuch der Physik die Abhängigkeit von p_1 und p_2 und erhält auf diese Weise die Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} p_2 = p_1 \Big[1 - \frac{d_{r1}}{p_1}\,h + \frac{1}{1\cdot 2\nu}\left(\frac{d_{r1}}{p_1}\,h\right)^2 - \frac{1\,(2-\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\nu^2}\left(\frac{d_{r1}}{p_1}\,h\right)^3 + \\ + \frac{1\,(2-\nu)\,(3-2\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \nu^3}\left(\frac{d_{r1}}{p_1}\cdot h\right)^4 \mp \ldots \Big]. \end{aligned} \quad 7)$$

Es ergibt sich diese Reihenentwicklung auch durch Umformung der Gl. 5 und Entwicklung nach dem binomischen Satze. Setzt man in derselben $\nu = 1$, so hat man ohne weiteres:

$$p_2 = p_1 \left(1 - \frac{d_{r1}}{p_1} h + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{d_r \cdot h}{p_1}\right)^2 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{d_{r1} \cdot h}{p_1}\right)^3 + \cdots\right) = \\ = p_1 e^{-\frac{d_{r1}}{p_1} h} . \qquad 8)$$

Da nun in diesem Falle

$$\frac{p_1}{d_{r1}} = \frac{p_0}{d_{r0}}$$

ist und d_{r0} wie oben

$$d_{r0} = \frac{s(1 + 0{,}378 \varphi]}{1 + \alpha \frac{t_1 + t_2}{2}}$$

zu setzen ist, so folgt mit Rücksicht auf die numerischen Werthe von p_0, g etc., die von Wüllner gegebene Formel:

$$h = 18405 \left(1 + \alpha \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \left(1 + 0{,}378 \varphi\right) \left(\log b_1 - \log b_2\right) \cdot \qquad (9$$

Es bleibt nun noch übrig, den oben erwähnten Mittelwerth für die Gasconstante der feuchten, nicht gesättigten Luft oder, was auf dasselbe hinauskommt, den in den abgeleiteten Formeln vorkommenden Werth von $1 + 0{,}378 \varphi$ zu definiren. Es bedeutet $\varphi = \frac{\sigma}{B}$ das Verhältnis von Dunst- und Luftdruck an irgend einer Stelle, und da, wie schon oben erwähnt, dieses Verhältnis nicht constant ist, wenn man sich in der Verticalen bewegt, so wäre es nicht richtig, wenn man bei der Bestimmung der Grösse s_σ, d. i. der Dichtigkeit der feuchten, nicht gesättigten Luft bei Normalbarometerstand und 0° C, lediglich den Dunstdruck σ zu Grunde legen wollte, der dem Normalbarometerstande entsprechen würde. Hann hat für die Abnahme des Dunstdruckes in verticaler Richtung folgende empirische Formel aufgestellt:

$$e = E\, 10^{-\frac{h}{6517}},$$

während der Luftdruck annähernd das Gesetz:

$$p = P\, 10^{-\frac{h}{18401}}$$

befolgt. Beide dividirt, gibt:

$$\frac{e}{E} = \left(\frac{p}{P}\right)^{\frac{18401}{6517}} \tag{10}$$

oder approximativ:

$$\frac{e}{E} = \left(\frac{p}{P}\right)^{3}. \tag{11}$$

Wenn nun der mittlere Werth des Argumentes y in der Function $y = f(x)$ zu finden ist, während x alle Werthe von x_1 bis x_2 durchläuft, so hat man bekanntlich zu bilden $\int_{x_1}^{x_2} (f(x))\, dx$ und dies durch $x_1 - x_2$ zu dividiren, wie sich aus geometrischen Betrachtungen leicht ergibt. Legt man in unserem Falle das Hann'sche Gesetz in der angenäherten Form (Gl. 11) zu Grunde, so hat man zu setzen:

$$\varphi \equiv \frac{e}{p} = \frac{E}{P^3} \cdot p^2 \equiv f(x)$$

und zwischen den Grenzen p_1 und p_2 zu integriren. Man erhält so;

$$\Phi = \frac{1}{p_1 - p_2} \int_{p_1}^{p_2} \frac{E\, p^2}{P^3} \cdot dp = \frac{1}{p_1 - p_2} \cdot \frac{E}{P^3} \left[\frac{p^3}{3}\right]_{p_1}^{p_2}.$$

Setzt man hierin noch $P = p_1$ $E = \sigma$, so ist

$$\Phi = \frac{\sigma}{3\,p_1^3} \left[\frac{p_2^3 - p_1^3}{p_2 - p_1}\right] = \frac{\sigma}{3\,p_1^3} \left(p_2^2 + p_1 p_2 + p_1^2\right) =$$

$$= \frac{\sigma}{p_1} \left(\frac{1 + \frac{p_2}{p_1} + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2}{3}\right). \tag{12}$$

Der auf diese Weise abgeleitete Mittelwerth ist der einzig richtige, so lange das Hann'sche Gesetz in voller Strenge Giltigkeit hat; indessen dürfte auch der von Rühlmann gegebene Mittelwerth, die halbe Summe aus den Verhältnissen von Dunst- und Luftdrucken in beiden Stationen,

$$\varphi = \frac{\frac{\sigma_1}{b_1} + \frac{\sigma_2}{b_2}}{2},$$

der Wahrheit in den meisten Fällen sehr nahe kommen und sogar empfehlenswerther sein, wenn das Hann'sche Gesetz nicht erfüllt ist. Einige Beispiele mögen dies erläutern:

Für die zwei Stationen Genf und St. Bernhard haben die sechsjährigen Beobachtungen von Luftdruck und Dunstdruck als Mittel folgende Werthe ergeben:

Januar: $\begin{cases} b_1 = 727{,}24 & \sigma_1 = 4{,}28 \\ b_2 = 560{,}93 & \sigma_2 = 1{,}50 \end{cases}$ April: $\begin{cases} b_1 = 726{,}69 & \sigma_1 = 6{,}17 \\ b_2 = 563{,}52 & \sigma_2 = 2{,}89 \end{cases}$

Juli: $\begin{cases} b_1 = 727{,}66 & \sigma_1 = 10{,}61 \\ b_2 = 568{,}5 & \sigma_2 = 5{,}26 \end{cases}$

Mit Zugrundelegung des Hann'schen Gesetzes in der angenäherten Form (Gl. 11) berechnet sich hieraus σ_2 zu:

Januar: $\sigma_2 = 1{,}964$ **April:** $\sigma_2 = 2{,}877$ **Juli:** $\sigma_2 = 5{,}06$.

Wählt man statt des Exponenten 3 den genaueren Werth

$$\frac{18401}{6517} = 2{,}82,$$

so sind die entsprechenden Werthe von σ_2:

2,058 3,012 5,29

Vergleicht man damit die beobachteten Werthe:

1,50 2,89 5,26,

so zeigt sich, dass das Hann'sche Gesetz für die Monate April und Juli sehr gut erfüllt ist, während dies für den Januar nicht der Fall ist. Schreibt man die beiden in Frage kommenden Mittelwerthe in der Form

$$\Phi = \frac{\sigma_1}{p_1}\left(\frac{1 + \frac{p_2}{p_1} + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2}{3}\right)$$

einerseits und

$$\Phi = \frac{\sigma_1}{p_1}\left(\frac{1 + \frac{\sigma_2 p_1}{\sigma_1 p_2}}{2}\right)$$

andrerseits und berechnet die beiden Factoren

$$\frac{1 + \frac{p_2}{p_1} + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2}{3}$$

und

$$\frac{1 + \frac{\sigma^2 p_1}{\sigma_1 p_2}}{2}.$$

so erhält man nach

$\dfrac{1 + \frac{p_2}{p_1} + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2}{3}$ **bezw.** 0,7931 0,7923 **und** 0,7972 **und nach:**

$\dfrac{1 + \frac{\sigma_2 p_1}{\sigma_1 p_2}}{2}$ **bezw.** 0,733 0,817 0,8185.

Man erkennt daraus, dass für den Fall, dass das Hann'sche Gesetz nahezu erfüllt ist, die nach Rühlmann'scher Methode berechneten Mittelwerthe zwar ein wenig zu gross ausfallen, dass aber, wenn das Hann'sche Gesetz nicht zutrifft, wie für den Januar, die letztere Methode den Vorzug verdient. Da nun eine solche Gesetzmässigkeit im Gange des Dunstdruckes, wie sie das Hann'sche Gesetz ausspricht, sich nur in den Mitteln aus grösseren Zeitabschnitten zeigt, während die Vertheilung des Wasserdampfgehaltes im einzelnen vielen Zufälligkeiten unterworfen ist, so ist es bei einer einzelnen Höhenbestimmung in der Regel wohl vorzuziehen, für φ das Mittel aus den beiden durch Beobachtung gefundenen Verhältnissen von Dunst- und Luftdruck zu wählen. Aus demselben Grunde würde es auch für die Praxis wenig Nutzen bringen, wenn man die ursprüngliche Differentialgleichung 1 in III unter der Annahme des Hann'schen Gesetzes integriren wollte. Die diesbezügliche Höhenformel, deren Ableitung keine wesentlichen Schwierigkeiten verursacht, würde zwar, wenn die zu Grunde gelegten Gesetze für den Gang der Temperatur und des Dunstdruckes wirklich erfüllt wären, eine durchaus exacte sein, sie würde indessen eine für den practischen Gebrauch viel zu complicirte Form annehmen.

IV.

Die gewöhnliche, unter Gl. B gegebene Höhenformel versagt den Dienst, wenn man sie dazu benutzen will, die Höhe der Atmosphäre zu berechnen; sie gibt wenigstens in diesem Falle, in welchem für $b_2 = 0$ und für $t_2 = -272{,}48$ bezw. $T_2 = 0$ zu setzen ist, das widersinnige Resultat $h = \infty$. Man sieht ohne weiteres, dass die Gl. A, in welcher ν einen constanten Werth hat, sich in eine solche Schwierigkeit nicht verwickelt; sie gibt auch für den Grenzfall $p_2 = 0$ und $T_2 = 0$ einen endlichen Werth. Es soll zunächst dahingestellt bleiben, ob man berechtigt ist, sie auf diesen Grenzfall auch wirklich anzuwenden, und die ungefähre Höhe, welche die Atmosphäre unter gewissen Umständen an einem gewissen Orte annehmen müsste, berechnet werden. Hierzu soll der September von Genf gewählt werden, und zwar zunächst unter der Annahme, dass indifferentes Gleichgewicht besteht, also $\nu = k = 1{,}4011$ ist. Wärmetheoretisch betrachtet, würde dies heissen: Man sucht die Höhe, die das Luftmeer annehmen würde, wenn die Wärme durch Aufhören von Einstrahlung und Ausstrahlung sich vollständig ins Gleichgewicht setzte, und die Temperatur der Luft an der Erdoberfläche nach Vollziehung dieses Ausgleiches die mittlere Temperatur für den September von Genf geworden wäre.

Nach den dem obenerwähnten Rühlmann'schen Werke entnommenen Aufzeichnungen hat man für den September von Genf:

$b_1 = 728,35 \qquad T_1 = 287,10 \qquad \sigma_1 = 9,66$ und es ist weiter zu setzen:
$b_2 = 0 \qquad T_2 = 0 \qquad \sigma_2 = 0.$

Für k soll $= 1,40$, also für

$$\frac{k}{k-1} = \frac{7}{2} = 3,5$$

gesetzt werden.

Dies in Gl. A eingesetzt, gibt als angenäherten Werth:

$$h = \frac{B\,D}{s} \cdot \frac{287,10}{272,48} \cdot \frac{7}{2}$$

oder logarithmirt:

$$\begin{aligned} \log h = \log B &= 0,88081 - 1 \\ + \log D &= 1,13341 \\ + \log 287,10 &= 2,45803 \\ + \log 3,5 &= 0,54407 \\ &\overline{\ 4,01632} \\ &-(0,546946 - 1) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} - \log 272,48 &= 2,435338 \\ - \log 0,001293 &= 0,111608 - 3 \\ &\overline{\ 0,546946 - 1} \end{aligned}$$

$$h = n \log 4,469374 = 29480 \text{ m}.$$

Berechnet man auf Grund dieses Werthes noch:

$$1 + \frac{2z + h}{r_0}$$

so folgt, wennn man $r_0 = 6378150$, $z = 407$ setzt:

$$\log\left(1 + \frac{2z + h}{r_0}\right) = \log(1,004748) = 0,00206$$

$$\log(1 + 0,002623 \cos 2\psi) = 0,99996 - 1$$

$$\log\left(1 + 0,378 \cdot \frac{\sigma_1}{3\,b_1}\right) = \log 1,001670 = 0,002745$$

$$= 0,002745,$$

so dass sich ergibt:

$$h = n \log 4,472119 = 29656 \text{ m} = 29,656 \text{ km} = 3,954 \text{ Meilen}.$$

Wäre der Zustand der Atmosphäre nicht der des indifferenten Gleichgewichtes, sondern die constante Temperaturabnahme eine derartige, dass ν in der ganzen Höhe $= 1,2$ wäre, so hätte man an Stelle von

$$\frac{1,4}{0,4} = 3,5 \text{ zu setzen } \frac{1,2}{0,2} = 6$$

und man erhielte durch Multiplication mit $\frac{12}{7}$ für diesen Fall als Höhe der Atmosphäre:

$$h = \frac{3,954 \cdot 12}{7} = \frac{47,448}{7} = 6,778 \text{ Meilen.}$$

Da der Zustand der Atmosphäre für Genf ein derartiger ist, dass ν im jährlichen Durchschnitt thatsächlich ungefähr 1,2 ist, und da der Werth von ν in verticaler Richtung eher kleiner als grösser wird, so kann der eben gewonnene Werth als eine untere Grenze für die Höhe der Atmosphäre angesehen werden. Natürlich ist auch dieser Werth, wie der für indifferentes Gleichgewicht, nur ein ungefährer.

Es ist indessen zu bezweifeln, ob man berechtigt ist, diese barometrische Höhenformel und ebenso die Formel B auf den Grenzfall $p = 0$ anzuwenden, und zwar aus doppeltem Grunde:

Einmal ist dieselbe gegründet auf die unbedingte Giltigkeit des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes:

$$v p = R T,$$

wo $R = 287$ die Gasconstante ist. Will man nun für die Höhe der Atmosphäre nicht den Werth unendlich zulassen, so darf hierin mit $p = 0$ nicht $v = \infty$ werden, weil damit auch $h = \infty$ würde; es muss vielmehr mit $p = 0$, $T = 0$ oder $t = -272,48\,^0$ C sein, wenn das Gesetz auch in dieser Grenze noch zu Recht bestehen soll. Es wird sich bald zeigen, dass der Werth $T = 0$ an der Grenze des Luftmeeres kaum annehmbar ist, und es ist deshalb auch nicht wahrscheinlich, dass das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz in der Grenze $p = 0$ überhaupt noch giltig ist.

Andrerseits darf es als erwiesen angenommen werden, dass die Abnahme der Temperatur in den höheren Regionen der Atmosphäre keineswegs constant ist, sondern dass die Temperaturabnahme für gleiche Höhenintervalle in den oberen Luftschichten immer kleiner und kleiner wird. Die Luftballonfahrten von Tissendier, Rykatschew und vor allem von Glaisher haben dies aufs deutlichste dargethan. Glaisher findet als Temperaturabnahme für 100 m folgende Zahlen:

Höhe in Taus. v. engl. Fuss.	Temperaturabn. f. 100 m im Sommer:	im Winter:
0 — 3	0,88 ⁰ C	0,71 ⁰ C
3 — 6	0,60	0,50
6 — 9	0,49	0,43
9 — 12	0,42	0,43
12 — 15	0,37	0,44
15 — 18	0,36	0,34
18 — 22	0,21	0,18
22 — 29	0,17	

In einer Höhe, in welcher der Luftdruck nur noch etwa ein Drittel des normalen beträgt, ist demnach die Temperaturabnahme schon äusserst

gering, und es steht zu vermuthen, dass sich dieselbe mit wachsender Höhe sehr schnell dem Werthe Null nähern wird, so dass die Temperatur in den oberen Luftschichten, etwa von einer Höhe von zwei bis drei Meilen an, als nahezu constant angesehen werden muss. Woiekof[1]) gibt nach seinen Untersuchungen als den wahrscheinlichsten Werth dieser Constanten $C = -42{,}2^{\circ}$ C an. Da in solcher Höhe $T_1 = T_2 = T$ sein muss, so folgt aus

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}} = \frac{T_1}{T_2}$$

für $\frac{\nu - 1}{\nu} = 0$ oder $\nu = 1$.

Dass die Temperatur mit wachsender Höhe mehr und mehr von Wärme-Ein- und Ausstrahlung unabhängig und nur noch Funktion von p wird, ist auch insofern sehr wahrscheinlich, als in den höheren Luftschichten kein Wasserdampf mehr vorhanden ist, und die Temperatur von trockener Luft durch strahlende Wärme erwiesenermaassen sehr wenig verändert wird. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass mit $p = 0$ auch $\nu = 1$ wird, also $\nu - 1 = 0$, und dass überhaupt nach der obigen Zusammenstellung die Temperaturabnahme und damit auch $\nu = 1$ sich mit p rasch der Null nähert, liegt es nun nahe, ν in folgender Weise von p abhängig zu machen:

$$\frac{p}{\nu - 1} = c = \text{Constant.}$$

Diese Hypothese soll im folgenden Abschnitt weiter verfolgt werden.

V.

Um die Gleichung B, die eine constante Temperaturabnahme zur Voraussetzung hatte, zur Höhenmessung zu benutzen, war der Werth ν zu bestimmen aus:

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{1}$$

Dieses Verfahren ist natürlich jetzt, wo ν mit der Höhe veränderlich ist, nicht mehr zulässig; wenigstens würde ein so bestimmter Werth von ν nur ein angenähertes Resultat ergeben. Dagegen muss es erlaubt sein, die Beziehung (Gl. 1) noch auf unendlich kleine Höhendifferenzen oder, was auf dasselbe hinaus kommt, unendlich kleine Luftdruck- und Temperaturdifferenzen anzuwenden. Dann ergibt sich, wenn man für:

1) Woiekof, „Klimate der Erde“. Jena 1887.

$$p_2 = p_1 - d p_1, \quad T_2 = T_1 - d T_1$$

setzt:

$$\frac{\nu}{\nu - 1} = \frac{\log \frac{p_1}{p_1 - d p_1}}{\log \frac{T_1}{T_1 - d T_1}} \tag{2}$$

Entwickelt man hierin $\log (p_1 - d p_1)$ und $\log (T_1 - d T_1)$ in Reihen, so folgt:

$$\log p_1 - \log (p_1 - d p_1) = \log p_1 - \log p_1 +$$
$$+ \left[\frac{d p_1}{p_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{d p_1}{p_1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{d p_1}{p_1}\right)^3 \cdots\right] \frac{1}{\text{Mod}}$$

und ebenso:

$$\log T_1 - \log (T_1 - d T_1) = \log T_1 - \log T_1 +$$
$$\left(\frac{d T_1}{T_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{d T_1}{T_1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{d T_1}{T_1}\right)^3 \cdots\right) \frac{1}{\text{Mod}}.$$

Vernachlässigt man hier ausser der ersten Potenz alle höheren Potenzen von $\frac{d p_1}{p_1}$ und $\frac{d T_1}{T_1}$ als unendlich kleine Grössen höherer Ordnung, so ist:

$$\frac{\nu}{\nu - 1} = \frac{\frac{d p_1}{p_1}}{\frac{d T_1}{T_1}}$$

und wenn man für $p_1 = p$, für $T_1 = T$ setzt:

$$\frac{\nu - 1}{\nu} \cdot \frac{d p}{p} = \frac{d T}{T}$$

Macht man nun die Annahme:

$$\frac{p}{\nu - 1} = c \text{ oder } \nu = \frac{p}{c} + 1, \quad \frac{\nu - 1}{\nu} = \frac{1}{1 + \frac{c}{p}}, \tag{3}$$

so ist:

$$\frac{1}{1 + \frac{c}{p}} \cdot \frac{d p}{p} = \frac{d T}{T} = \frac{d p}{p + c} \tag{4}$$

und integrirt

$$\log (p + c) = \log T + \text{Const.}; \text{ d. h. } p + c = e^{\log T + \text{Const}} = c_1 T \tag{5}$$

oder:

$$p = c_1 T - c \tag{6}$$

In Worten heisst dies: Die Annahme Gl. 3 kommt darauf hinaus, dass p als lineare Function von T anzusehen ist.

Die Constanten c und c_1 bestimmen sich, natürlich unter der Voraussetzung, dass das zu Grunde gelegte Gesetz für die Temperaturabnahme in der Verticalen für die in Betracht kommende Luftsäule auch wirklich erfüllt ist, aus den in zwei verschiedenen Niveaux vorgenommenen Barometer- und Thermometerablesungen. Es ist:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = c_1 T_1 - c \\ p_2 = c_2 T_2 - c. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Hieraus folgt:

$$c_1 = \frac{p_1 - p_2}{T_1 - T_2}; \quad c = \frac{p_1 - p_2}{T_1 - T_2} \cdot T_1 - p_1 = \frac{p_1 T_2 - p_2 T_1}{T_1 - T_2}. \tag{8}$$

Hierdurch geht Gl. 6 über in:

$$p = \frac{p_1 - p_2}{T_1 - T_2} \cdot T - \frac{p_1 T_2 - p_2 T_1}{T_1 - T_2}. \tag{9}$$

Diese Formel steht in inniger Beziehung zu dem von Mendeleef aufgestellten Gesetz für die Temperaturabnahme in der Verticalen, nämlich:

$$p = p_1 \left(\frac{C - t}{C - t_1}\right) \tag{10}$$

worin $C = -42{,}2^{\circ}$ C, d. h. die constante Temperatur in der Grenze der Atmosphäre ist. Setzt man hierin nämlich die absoluten Temperaturen ein, und zwar für:

$$C = T_2 - 273{,}48 \quad t = T - 272{,}48 \quad t_1 = T_1 - 272{,}48,$$

so ist:

$$p + p_1 \left(\frac{T - T_2}{T_1 - T_2}\right), \tag{11}$$

eine Formel, die mit Gl. 9 identisch ist, wenn man dort für $p_2 = 0$ setzt, wie dies dem Werthe von $C = T_2 - 272{,}48 = -42{,}2^{\circ}$ C entspricht. Sprung hat unter Benutzung des Gesetzes Gl. 10 und des Hann'schen Gesetzes für den Gang des Dunstdruckes die entsprechende barometrische Höhenformel abgeleitet und findet:

$$h = \frac{p_0}{[\varrho]_0 \, g_{45}} \left[\frac{1 + \alpha C}{\text{Mod}} \log \frac{P}{p} + \alpha (T - C) \frac{P - p}{P}\right] \left(1 + 0{,}378 \frac{E}{P} F\right) f(\varphi z).$$

Es bedeuten hierin:

$$f(\varphi z) = \left(1 = 0{,}0026 \cos 2\varphi\right) \left(1 + \frac{2z + h}{r_0}\right)$$

$$F = \frac{4383}{h} \left(1 - 16 - \frac{h}{10091}\right)$$

P und p die Luftdrucke in der unteren und oberen Station, T und C die Temperaturen an der unteren Station und an der Grenze des Luftmeeres.

Legt man statt des Mendeleef'schen Gesetzes die etwas allgemeinere Annahme (Gl. 9) zu Grunde, so wird dadurch neben T_1 noch eine zweite durch Beobachtung zu findende Temperatur T_2 in die Rechnung eingeführt, was insofern von Vortheil sein kann, als alsdann die Grösse C, über deren numerischen Werth die Meinungen noch einigermaassen auseinandergehen, und die möglicherweise überhaupt nicht für alle Breiten denselben Werth hat, aus der Rechnung herausfällt. Die Ableitung der Höhenformel gestaltet sich für diesen Fall folgendermaassen:

Setzt man in die Differentialgleichung:

$$dp = -d_r(\gamma)\frac{r_0^2}{r^2}dr \tag{12}$$

für

$$d_r = \frac{p s_\sigma}{\gamma D B(1+\alpha t)} = \frac{p s_0}{\gamma D B}\cdot\frac{272{,}48}{T}$$

und aus Gl. 9

$$T = \frac{p_1 T_2 - p_2 T_1 + p(T_1 - T_2)}{p_1 - p_2},$$

so erhält man:

$$\frac{dp}{p}\left(\frac{p_1 T_2 - p_2 T_1 + p(T_1 - T_2)}{p_1 - p_2}\right) = -\frac{(\gamma) s_\sigma \cdot 272{,}48 \cdot r_0^2}{\gamma \cdot B \,.\, D r^2}\cdot dr. \tag{13}$$

Dies zwischen den Grenzen p_1 und p_2 beziehentlich r_1 und r_2 integrirt, gibt:

$$\frac{1}{p_1 - p_2}\Big[(p_1 T_2 - p_2 T_1)\,\mathrm{Log}\,p + (T_1 - T_2)p\Big]_{p_1}^{p_2} =$$

$$= -\frac{s_\sigma \cdot 272{,}48}{BD}\cdot\frac{(\gamma)}{\gamma}r_0^2\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2},$$

oder:

$$\frac{p_1 T_2 - p_2 T_1}{p_1 - p_2}\,\mathrm{Log}\,\frac{p_2}{p_1} - (T_1 - T_2) = -\frac{s_\sigma \cdot 272{,}48}{BD}\,\frac{(\gamma)}{\gamma}\cdot\frac{r_0^2}{r_1 r_2}\cdot h$$

Setzt man darin für

$$\frac{(\gamma)}{\gamma},\quad \frac{r_0^2}{r_1 r_2},\quad s_\sigma$$

die schon oben abgeleiteten Werthe ein und löst noch h auf, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} h = \frac{BD}{s\cdot 272{,}48}\left(1 + 0{,}0026\cos 2\psi\right)\left(1 + \frac{2s+h}{r_0}\right)\left(1 + 0{,}378\varphi\right) \\ \left[T_1 - T_2 + \frac{\log p_1 - \log p_2}{\mathrm{Mod}}\cdot\frac{p_1 T_2 - p_2 T_1}{p_1 - p_2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Eliminirt man hieraus noch mit Hilfe von Gl. 8 die Luftdrucke p_1 und p_2, so erhält man die nur noch Höhe und Temperatur enthaltende Formel:

$$h = \frac{BD}{272{,}48 \cdot s}\left(1 + 0{,}0026 \cos 2\psi\right)\left(1 + \frac{2s + h}{r_0}\right)\left(1 + 0{,}378\varphi\right) \left[T_1 - T_2 + \frac{c}{c_1 \operatorname{Mod}} \log\left(\frac{T_1 - \frac{c}{c_1}}{T_2 - \frac{c}{c_1}}\right)\right]. \quad \text{(C}$$

Die Grösse $\frac{c}{c_1}$ bedeutet hierin weiter nichts, als die absolute Temperatur in der Grenze des Luftmeers, wie sie sich aus den beobachteten Werthen p_1 p_2, T_1 und T_2 durch Rechnung ergibt. Denn setzt man in der zweiten Gl. 7 für $p_2 = 0$, nachdem man dieselbe zuvor mit c dividirt hat, so ergibt sich:

$$T_2 - \frac{c}{c_1} = 0,$$

also

$$\frac{c}{c_1} = \left[T_2\right]^{p_2 = 0}.$$

Um noch nachzuweisen, dass die von Sprung gegebene Formel mit Gl. C indentisch ist, wenn man in der letzteren für $\frac{c}{c_1}$ den festen Werth $\frac{c}{c_1} = \mathrm{C} + 272{,}48 = -42 + 272{,}48 = 230{,}48$ wählt, sind die beiden Ausdrücke zu vergleichen

$$\frac{T_1 - T_2 + \frac{c}{\operatorname{Mod} c_1} \log \frac{\left(T_1 - \frac{c}{c_1}\right)}{T_2 - \frac{c}{c_1}}}{272{,}48}$$

und

$$\frac{1 + \alpha C}{\operatorname{Mod}} \log \frac{P}{p} + \alpha\,(T - C)\,\frac{P - p}{P}.$$

Wegen

$$\frac{1}{272{,}48} = \alpha$$

und

$$\log \frac{T_1 - \frac{c}{c_1}}{T_2 - \frac{c}{c_1}} = \log \frac{p_1}{p_2} = \log \frac{P}{p}$$

folgt zunächst:

$$\frac{T_1 - T_2 + \frac{c}{c_1 \operatorname{Mod}} \log \frac{T_1 - \frac{c}{c_1}}{T_2 - \frac{c}{c_1}}}{272{,}48} = \alpha (T_1 - T_2) + \frac{C}{\operatorname{Mod} 272{,}48} \log \frac{p_1}{p_2} +$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{Mod}} \cdot \log \frac{p_1}{p_2} = \alpha (T_1 - T_2) + \frac{1 + \alpha C}{\operatorname{Mod}} \log \frac{P}{p}.$$

Es ist deshalb noch zu zeigen, dass:

$$\alpha (T_1 - T_2) = \alpha (T - C) \frac{P - p}{P}$$

ist. Es ist nun nach Gl. 7:

$$T_2 = \frac{p_2 + c}{c_1} = \frac{p_2}{c_1} + \frac{c}{c_1} = 272{,}48 + C + \frac{p_2}{c_1},$$

und da

$$c_1 = \frac{p_1}{T - C}$$

ist:

$$T_1 - T_2 = T - C - \frac{p_2 (T - C)}{p_1} = (T - C)\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) = (T - C)\left(\frac{P - p}{P}\right).$$

Es ist demnach Uebereinstimmung vorhanden.

Will man die Formel C oder auch 14 wieder dazu verwenden, die Höhe der Atmosphäre zu bestimmen, so hat man:

$$p_2 = 0, \quad T_2 = 273 - 42{,}2\,^{\circ}\,\mathrm{C}$$

zu setzen und erhält:

$$H = \frac{B\,D}{s \cdot 272{,}48} \cdot f(\psi, h, z) \cdot \left(T_1 - T_2 + T_2 \log \frac{p_1}{0}\right) = \infty.$$

Man erhält demnach den Werth unendlich. Es darf dies Resultat nicht wundernehmen, wenn man bedenkt, dass das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz:

$$v p = R T,$$

da in diesem Falle T nicht gleich Null ist, nur erfüllbar bleibt, wenn mit $p = o$, v oder was auf dasselbe hinaus kommt, $H = \infty$ wird. Will man den letzteren Werth nicht zulassen, so wird man dadurch nur wieder in der Vermuthung bestärkt, dass das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz auf die Grenzen keine Anwendung finden kann.

Die Bedeutung des Vorstehenden ist die, dass damit das Mendeleef'sche Gesetz nicht mehr als bloss empirisch aufgegriffen erscheint, sondern in organischen Zusammenhang mit der Annahme einer con-

stanten Temperaturabnahme gebracht ist. Die Formel C ist durch eine Verallgemeinerung des der Grösse ν zu Grunde liegenden Begriffs entstanden und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das Mendeleef'sche Gesetz in höheren Luftschichten bestätigen wird, dürfte dadurch wesentlich erhöht worden sein.

Durchschnittlicher Temperaturgang in der Verticalen für den Monat September in Genf.

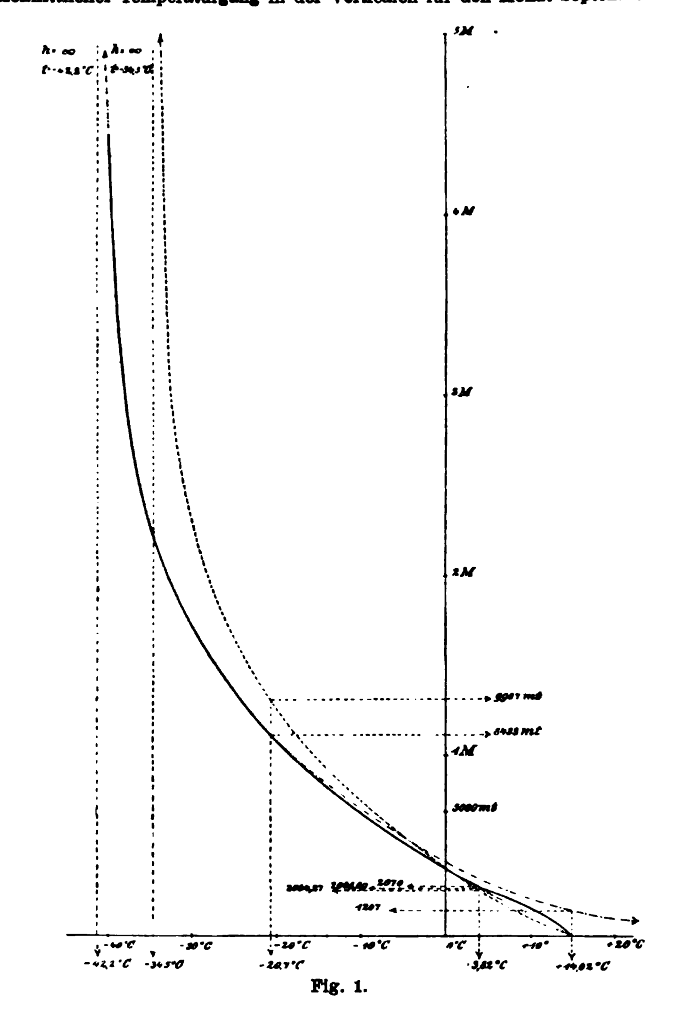


Fig. 1.

VI.

In den vorstehenden Abschnitten sind die Höhenformeln entwickelt worden, wie sie einigen besonders naheliegenden Annahmen für die Temperaturabnahme in der Verticalen entsprechen, und es soll nun geprüft werden, inwieweit diese Annahmen durch die Erfahrung bestätigt werden, indem man mit Hilfe der Formeln A, B und C eine

schon auf trigonometrischem Wege genau bestimmte Höhe für verschiedene Jahres- und Tageszeiten berechnet. Es ist dies derselbe Weg, den schon Rühlmann unter Zugrundelegung der bisher üblichen Höhenformel B eingeschlagen hat und es soll zu den Rechnungen dasselbe Stationenpaar, Genf und St. Bernhard, deren Höhenunterschied Plantamour zu 2070 m bestimmt hat, benutzt werden. Da indessen die Formel B, im Gegensatz zu A und C, auf eine bestimmte Anschauung in Betreff der Wärmevertheilung nicht fusst, so konnte Rühlmann zu einer so vollständigen Klarheit in Betreff der Temperaturabnahme in der Verticalen nicht gelangen, als dies auf Grund von Gl. A und B möglich sein wird. Uebrigens sind die Höhen, die er gibt, nicht nach seiner eigenen Formel berechnet, sondern nach der Bauernfeind'schen, die sich sowohl in der Wahl der nummerischen Werthe der Constanten, z. B. α, als auch in dem Factor $1 + 2\,\frac{h}{r_0}$, der bei ihm mit Rücksicht auf die Poisson'sche Correction $1 + \frac{5}{4}\,\frac{h}{r_0}$ heisst, von der seinigen unterscheidet. Es sind aus diesem Grunde alle Höhen, die nach Gl. A und C ermittelt worden sind, noch einmal nach Gl. B berechnet worden. Um den Gang der Temperaturabnahme im Laufe eines Jahres kennen zu lernen, sollen die folgenden Monatsmittel aus den sechsjährigen Beobachtungen für die Jahre 1860—65 benutzt werden:

	Temperatur in °C		Barometerst. auf 0° reduc.		Dunstdruck	
	Genf	St. Bernh.	Genf	St. Bernh.	Genf	St. Bernh.
December .	+ 0,65	— 8,13	727,55 mm	561,13 mm	4,28	1,95
Januar . .	+ 0,50	— 7,97	727,24	560,93	4,05	1,50
Februar . .	+ 0,91	— 9,12	723,23	560,37	4,16	1,78
März . . .	+ 4,63	— 7,82	723,08	558,02	4,83	2,46
April . . .	+ 9,82	— 2,56	726,69	563,52	6,17	2,89
Mai . . .	+ 14,50	+ 1,63	726,10	565,35	8,37	3,79
Juni . . .	+ 16,64	+ 3,82	727,07	566,83	9,62	4,17
Juli . . .	+ 18,75	+ 6,89	727,66	568,50	10,61	5,26
August . .	+ 18,13	+ 6,56	727,71	568,71	10,43	5,43
September .	+ 14,62	+ 3,82	728,35	568,06	9,66	4,71
October . .	+ 10,56	+ 0,17	726,59	565,21	7,92	3,88
November .	+ 5,20	— 4,64	725,60	561,64	5,65	2,72

Die Aufführung aller Einzelheiten der Rechnung dürfte für das Folgende von nur geringem Interesse sein; es wird genügen, je ein Beispiel für die Höhenberechnung nach der Formel A, B und C zu geben und es soll hierzu der Monat September benutzt werden.

Die Vergleichung der Formeln A, B und C zeigt, dass dieselben in dem Factor

$$\frac{BD}{s}\left(1+0{,}002623\cos 2\psi\right)\left(1+\frac{2z+h}{r_0}\right)\left(1+0{,}378\varphi\right)$$

übereinstimmen, und es wird sich deshalb empfehlen, diesen zuerst zu berechnen.

Es ist

$B = 0{,}76 \quad \log B = 0{,}88081 - 1; \quad D = 13{,}59593 \quad \log D = 1{,}1334089.$
s, das Gewicht von 1 cbm trockener Luft bei 0° C und 0,76 m Barometerstand, ist mit Rücksicht auf den geringen Gehalt an Kohlensäure (mit Rühlmann) zu $s = 0{,}00129304$, statt nach Regnault zu 0,00129278 gewählt worden; es ist:

$$\log 0{,}00129304 = 0{,}1116062 - 3$$

Um $(1 + 0{,}002623 \cos 2\psi)$ zu finden, ist zu beachten, dass die mittlere geographische Breite zwischen Genf und St. Bernhard

$$\frac{46^\circ\, 12' + 45^\circ\, 52'}{2} = 46^\circ 2' = \psi$$

ist. Dann ist:

$$\log(1 + 0{,}002623 \cos 92^\circ\, 4') = \log 0{,}9999054 = 0{,}9999579 - 1.$$

Zur Bestimmung von

$$1 + \frac{2z+h}{r_0}$$

wird angenommen, dass man h mit Hilfe einer rohen Barometerformel gefunden hätte, etwa $h = 2060$. Da $z = 407$ m ist, so wird:

$$1 + \frac{2z+h}{r_0} = 1 + \frac{814 + 2060}{6378150} = 1{,}0004433$$

$$\log\left(1 + \frac{2z+h}{r_0}\right) = 0{,}0001925.$$

Endlich ist noch $(1 + 0{,}378\varphi)$ zu berechnen, worin

$$\varphi = \frac{\frac{\sigma_1}{b_1} + \frac{\sigma_2}{b_2}}{2}$$

genommen werden soll. Es ist nun

$$\frac{\sigma_1}{b_1} = \frac{9{,}66}{728{,}35} = 0{,}0133 \qquad \frac{\sigma_2}{b_2} = \frac{4{,}71}{568} = 0{,}0083.$$

Deshalb ist

$$\varphi = \frac{0{,}0133 + 0{,}0083}{2} = 0{,}01080$$

und weiter:

$$1 + 0{,}378 \cdot \varphi = 1{,}0040824 \quad \log(1 + 0{,}378\varphi) = 0{,}001765.$$

Diese Werthe eingesetzt, gibt:

$$\log\left[\frac{BD}{s}\left(1+0{,}0026\cos 2\psi\right)\left(1+\frac{2z+h}{r_0}\right)\left(1+0{,}378\,\varphi\right)\right]=$$

$$\begin{array}{rl} = & 0{,}8808136-1\\ & 1{,}1334089\\ & 0{,}9999570-1\\ & 0{,}0001925\\ & 0{,}001765\\ \hline & 3{,}0161413-2\\ -\log s = & -(6{,}1116062-3)\\ \hline & 3{,}9045351 \end{array}$$

Nach Gl. A ist nun zu berechnen

$$\frac{\nu}{\nu-1}\cdot\left(\frac{T_1-T_2}{272{,}48}\right)=\frac{\log\frac{p_1}{p_2}}{\log\frac{T_1}{T_2}}\cdot\left(\frac{T_1-T_2}{272{,}48}\right).$$

Es ist $T_1 = 272{,}48 + 14{,}62 = 287{,}10$ $\qquad T_2 = 272{,}48 + 3{,}82 = 276{,}30$

$$\begin{array}{rl} \log T_1 = \log 287{,}1 = & 2{,}4580332\\ -\log T_2 = \log 276{,}3 = & 2{,}4413809\\ \hline & 0{,}0166525 \end{array} \qquad T_1 - T_2 = 10{,}80$$

$$\log\frac{p_1}{p_2}=\log\frac{b_1}{b_2}\cdot\frac{g_1}{g_2}=\log\frac{b_1}{b_2}\left(1+\frac{5}{4}\frac{h}{r_0}\right)=\log\frac{b_1}{b_2}+\mathrm{Mod}\,\frac{5}{4}\,\frac{h}{r_0}$$

$$\mathrm{Mod}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{h}{r_0}=\frac{5}{4}\cdot\frac{2070}{6378150}\cdot 0{,}4342945=0{,}00017615$$

$$\log b_1 = \log 728{,}35 = 2{,}8623401$$
$$\log b_2 = \log 568{,}06 = 2{,}7543942$$

$$\log\frac{p_1}{p_2}=0{,}1079459+0{,}00017615=0{,}10812205.$$

Hiernach wird

$$\begin{array}{rl} \log h = & 3{,}9045351\\ +\log\log\frac{p_1}{p_2} = & 0{,}0339142-1\\ \log(T_1-T_2) = & 1{,}0334238\\ \hline & 3{,}9718731\\ & -0{,}6568082 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log 272{,}48 = & 2{,}4353340\\ \log\log\frac{T_1}{T_2} = & 0{,}2214742-2\\ \hline & 0{,}6568082 \end{array}$$

$h = n \log\ 3{,}3150649 = 2065{,}69$ **m.**

Nach Gl. B ist zu finden:

$$\frac{1}{\text{Mod}}\left(1+\alpha\frac{t_1+t_2}{2}\right)\log\frac{p_1}{p_2}.$$

Nun ist

$$\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{14{,}62+3{,}82}{2}=\frac{18{,}44}{2}=9{,}22.$$

Ferner:

$$9{,}22\cdot 0{,}00367=0{,}0338374 \text{ oder } 1+\alpha\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)=1{,}0338374,$$

$\log\frac{p_1}{p_2}$ ist nach dem Vorigen schon bekannt, man hat demnach:

$$\begin{aligned}
\log h &= 3{,}9045351\\
+\log\log\frac{p_1}{p_2} &= 0{,}0339142-1\\
\log\left(1+\alpha\frac{t_1+t_2}{2}\right) &= \underline{0{,}144528\qquad}\\
&\ 3{,}9529021-1\\
-\log \text{Mod} &= \underline{(0{,}6377843-1)}\\
h = n\log 3{,}3151178 &= \mathbf{2065{,}94\ m.}
\end{aligned}$$

Nach Gl. C bezw. Gl. 14 in V ist zu finden

$$T_1-T_2+\frac{p_1T_2-p_2T_1}{(p_1-p_2)}\text{Mod}\log\frac{p_1}{p_2}.$$

Es ist hierin

$$\frac{c}{c_1}=\frac{p_1T_2-p_2T_2}{p_1-p_2}=\frac{b_1T_2-b_2'T_1}{b_1-b_2'}$$

und

$$b_2'=b_2\frac{g_2}{g_1}=b_2\left(1-\frac{5}{4}\frac{h}{r_0}\right).$$

Da

$$\frac{5}{4}\frac{h}{r_0}=0{,}0004056$$

ist, so wird:

$$b_2'=568{,}063-0{,}23=567{,}835.$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned}
\log b_1 &= 2{,}8623401 & \log b_2' &= 2{,}7542221\\
\log T_2 &= \underline{2{,}4413809} & \log T_1 &= \underline{2{,}4580332}\\
n\log 5{,}3037210 &= 201243{,}1 & n\log 5{,}2122553 &= 163025{,}4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1-b_2' &= 728{,}35\\
&\ \ \underline{-\,567{,}835}\\
&\ \ 160{,}515
\end{aligned}$$

$$\frac{c}{c_1}=\frac{201243{,}1-163025{,}4}{160{,}515}=\mathbf{238{,}095.}$$

Die Temperatur an der Grenze der Atmosphäre müsste hiernach, wenn das Mendeleef'sche Gesetz auch für die unteren Luftschichten Geltung hätte:

$$-272{,}48 + 238{,}095 = -34{,}385^\circ \text{ C}$$

sein, während sie nach Woiekof $-42{,}2^\circ$ C betragen soll.

Weiter ist zu berechnen:

$$\frac{c}{c_1 \cdot \text{Mod}} \cdot \log \frac{p_1}{p_2}.$$

$$\log \frac{c}{c_1} = \log 238{,}095 = 2{,}3767455$$

$$\log \log \frac{p_1}{p_2} = \underline{0{,}0339142 - 1}$$

$$2{,}4106597 - 1$$

$$-\log \text{Mod} = -\underline{(0{,}6377843 - 1)}$$

$$\frac{c}{c_1 \cdot \text{Mod}} \cdot \log \frac{p_1}{p_2} = n \log 1{,}7728754 = 59{,}2755$$

$$+(T_1 - T_2) = \underline{10{,}80}$$

$$70{,}0755$$

$$\log h = 3{,}9045351$$

$$\log 70{,}0755 = \underline{1{,}8455662}$$

$$5{,}7401013$$

$$-\log 272{,}48 = \underline{2{,}4353340}$$

$$h = n \log 3{,}3147673 = \mathbf{2064{,}274 \text{ m.}}$$

Die auf vorstehende Weise nach den Formeln A, B und C für die 12 Monate des Jahres berechneten Höhen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt und es sind zu denselben aus später ersichtlichen Gründen noch die Werthe von $\frac{T_1 + T_2}{2}$ und $b_1 - b_2$ hinzugefügt.

	Berechnete Höhen des St. Bernhard nach:					
	Formel A	Formel B	Formel C	$\frac{T_1 + T_2}{2}$	$b_1 - b_2$	Differenzen d. Werthe nach Gleich. A u. B
December .	2054,35	2054,58	2053,07	268,74	166,42	0,18
Januar . .	2053,65	2053,815	2052,40	268,745	166,31	0,165
Februar . .	2058,86	2059,05	2058,57	268,375	166,86	0,19
März . . .	2066,754	2066,97	2065,42	270,885	165,06	0,216
April . . .	2068,54	2068,78	2067,15	276,11	163,17	0,24
Mai . . .	2069,95	2070,22	2068,52	280,545	160,75	0,27
Juni . . .	2076,03	2076,33	2074,55	282,71	160,24	0,30
Juli . . .	2076,5	2076,83	2074,984	285,05	159,16	0,33
August . .	2072,57	2072,86	2071,11	284,825	159,00	0,29
September .	2065,69	2065,94	2064,274	281,70	160,29	0,25
October . .	2057,34	2057,547	2056,04	277,845	161,38	0,207
November .	2057,67	2057,88	2056,436	272,76	163,96	0,21
Jahresmittel:	2064,825	2065,063	2063,544	Differenz nach Gl. B und C	= 1,519 m	0,238

Da sich in diesen Zahlen bereits ein vollständiger Parallelismus zwischen den nach Gl. A, B und C berechneten Werthen ausspricht, so dürfte es überflüssig sein, auch die tägliche Höhenperiode an sämmtlichen Monaten nach den Formeln A, B und C nachzuweisen, da dies für Gl. B ja schon von Rühlmann geschehen ist. Es wird genügen, die nach Gl. B und A berechneten Werthe für einen Monat auszuführen, und es soll der Monat Mai dazu gewählt werden. Der Rechnung liegen folgende Daten zu Grunde:

Mai	Lufttemperatur		Barometerstand nach 0° C		Berechnete Höhen nach:		$\frac{T_1 + T_2}{2}$	$b_1 - b_2$	Diff. nach Gl. A und B
	Genf	St. Bernh.	Genf	St. Bernh.	Gl. A	Gl. B			
12h Mittags	17,7	+4,1	726,06	565,43	2090,311	2090,712	283,38	160,63	0,401
2h	18,6	+4,4	725,57	565,37	2089,89	2090,33	283,98	160,20	0,44
4h	18,45	+3,75	725,25	565,35	2083,526	2083,996	283,58	159,9	0,470
6h	17,0	+2,4	725,33	565,36	2074,054	2074,525	282,18	159,97	0,471
8h	14,9	+1,05	725,86	565,52	2065,128	2065,54	280,455	160,34	0,412
10h	13,4	+0,7	726,28	565,70	2060,514	2060,871	279,53	160,58	0,351
12h Mittern.	12,2	+0,25	726,42	565,58	2057,792	2058,114	278,705	160,84	0,322
2h	10,75	—0,4	726,35	565,28	2053,628	2053,912	278,155	161,07	0,284
4h	+9,9	—0,8	726,37	565,02	2053,080	2053,266	277,03	161,35	0,186
6h	+10,9	—0,3	726,57	565,04	2060,508	2060,789	277,78	161,53	0,281
8h	+14,0	+1,4	726,68	565,28	2075,986	2076,337	280,18	161,40	0,351
10h	+16,1	+3,0	726,49	565,37	2086,181	2086,55	282,03	161,12	0,369

VII.

Wenn man die nach den Formeln A, B und C erhaltenen Resultate zunächst unter sich vergleicht, so ergibt sich die Thatsache, dass die nach Gl. A erhaltenen Höhen sämmtlich kleiner als die nach Gl. B, und die nach Gl. C erhaltenen wiederum kleiner als die nach Gl. A sind. Besonders auffallend ist die Erscheinung, dass die nach Gl. A berechneten Höhen sich um ein so geringes von den nach Gl. B erhaltenen unterscheiden und dass sich doch selbst in den Differenzen beider noch eine gewisse Gesetzmässigkeit ausspricht. Es liegt deshalb die Vermuthung nahe, dass zwischen den Gleichungen A und B ein einfacher Zusammenhang bestehen wird und es soll zur Auffindung desselben die Entstehungsweise von Gl. B etwas näher untersucht werden.

Bei der Entwicklung von Gl. B integrirt man die Differentialgleichung:

$$dp = -(g)\frac{p}{RT}\cdot dh$$

unter der Annahme, dass die Temperatur T, oder was auf dasselbe hinaus kommt, t in der ganzen Höhe constant ist, und setzt dann für

diese Constante den Mittelwerth aus den beobachteten Temperaturen beider Stationen

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

ein. Der Wahl dieses Mittelwerthes liegt nun als versteckte Voraussetzung offenbar die Annahme zu Grunde, dass nicht die Temperatur selbst, sondern die Temperaturabnahme mit der Höhe constant sei; oder wenigstens die Voraussetzung, dass der Wärmeüberschuss der unteren Hälfte der in Betracht kommenden Luftsäule über den der Temperatur $\frac{t_1 + t_2}{2}$ entsprechenden Wärmeinhalt gerade genügen würde, um der ganzen oberen Hälfte die constante Temperatur $\frac{t_1 + t_2}{2}$ zu ertheilen. Da man nun bei der Integration eine Grösse $(1 + \alpha t)$, die nicht constant ist, auch nicht als constant ansehen darf, so enthält die Formel B, genau betrachtet, einen Widerspruch in sich. Dieser Widerspruch kommt auch zum Ausdruck, wenn man die Entstehungsweise von Gl. B wärmetheoretisch noch weiter verfolgt, indem man sich dieselbe folgendermassen auslegt:

Wenn die Luftsäule, an deren Enden die Luftdrucke p_1 und p_2 sind, die constante Temperatur $\frac{t_1 + t_2}{2}$ hat, wie dies der Integration entspricht, so kann man dieselbe allmählich in den Zustand überführen, dass die Temperatur im unteren Niveau t_1, im oberen t_2 ist und dass die letztere continuirlich und gleichmässig mit der Höhe abnimmt, ohne dass man nötig hätte, von aussen Wärme zuzuführen. Man darf sich nur die Luftsäule in unendlich viele Schichten von gleicher Dicke zerlegt denken und von je zwei symmetrisch zur Mitte gelegenen Schichten der unteren so viel Wärme entziehen als man der oberen zuführt. Wenn bei dieser Manipulation nun die Luftdrucke p_1 und p_2 unverändert blieben, so würde die nach Gl. B erhaltene Höhe genau dieselbe wie die nach Gl. A berechnete sein müssen. Es ist indessen längst erwiesen, dass der Luftdruck nicht einfach das Gewicht der über der in Betracht kommenden Luft befindlichen Luftsäule angibt, sondern auch einigermassen abhängt von der Temperatur der umgebenden Luft. Wenn, wie hier, die Temperatur im oberen Niveau eine Verringerung, die im unteren eine Erhöhung erfährt, so wird damit auch der Luftdruck oben geringer und unten grösser und da mit der Differenz von $p_1 - p_2$ auch der Ausdruck $\log \frac{p_1}{p_2}$ in Gl. B grösser wird, so müssen die nach Gl. B berechneten Höhen etwas grösser ausfallen als die nach

Gl. A gefundenen. Damit erklärt sich auch der oben erwähnte Widerspruch.

Dass die Formel B, also die bisher übliche Höhenformel, weiter nichts ist, als ein Näherungswerth für die Annahme der für gleiche Höhenintervalle constanten Temperaturabnahme, ergibt sich mit Evidenz, wenn man die beiden Ausdrücke vergleicht, in denen sich Gl. A und B unterscheiden, nämlich:

$$\frac{1+\alpha\frac{t_1+t_2}{2}}{\text{Mod}} \quad \text{und} \quad \frac{T_1-T_2}{272{,}48\cdot\log\frac{T_1}{T_2}}.$$

Man erhält einerseits, da

$$\alpha = \frac{1}{272{,}48}$$

ist:

$$\frac{1+\alpha\frac{t_1+t_2}{2}}{\text{Mod}} = \frac{2\cdot 272{,}48+t_1+t_2}{2\cdot\text{Mod}\cdot 272{,}48} = \frac{T_1+T_2}{2}\cdot\frac{1}{272{,}48\cdot\text{Mod}}$$

und andrerseits:

$$\frac{T_1-T_2}{272{,}48\cdot\log\frac{T_1}{T_2}} = \frac{T_1-T_2}{272{,}48\cdot\text{Mod Log}\,\frac{T_1}{T_2}} =$$

$$= \frac{T_1-T_2}{\text{Mod}\cdot 272{,}48\cdot 2}\,\frac{1}{\left[\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}+\frac{1}{3}\left(\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}\right)^5+\cdots\right]}.$$

Hebt man

$$\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}$$

aus, so fällt $T_1 - T_2$ vor der Klammer weg und man behält:

$$\frac{T_1-T_2}{272{,}48\cdot\log\frac{T_1}{T_2}} = \frac{1}{\text{Mod}\cdot 272{,}48}.$$

$$\cdot\left(\frac{T_1+T_2}{2}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}\right)^4+\cdots}\right).$$

Bei den Grenzen, in denen sich T_1 und T_2 bewegen, ist nun in der Regel

$$\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}$$

ein sehr kleiner, aber positiver Werth, so dass:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}\right)^3+\cdots}$$

zwar etwas kleiner als 1, aber doch dem Werthe 1 sehr nahe kommt, und es geht daraus hervor, dass die nach Gl. A und B berechneten Höhen nur sehr wenig sich voneinander unterscheiden können. Es ist die Formel B derjenige Nährungswerth von A, den man erhält, wenn man den der Einheit sehr nahekommenden Factor

$$\frac{1}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}\right)^4+\cdots}$$

in der letzteren weglässt.

Die vorstehende Entwicklung ermöglicht ohne weiteres eine neue Bestimmung des Werthes von

$$\frac{T_1-T_2}{\log\frac{T_1}{T_2}}$$

für den Fall $T_1 = T_2 = T$. Es ist dann $T_1 - T_2 = 0$ und man hat das schon oben abgeleitete Resultat:

$$\left(\frac{T_1-T_2}{\log\frac{T_1}{T_2}}\right)_{T_1=T_2}=\frac{1}{\text{Mod}}\cdot\frac{T_1+T_2}{2}=\frac{T_1}{\text{Mod}}=\frac{T_2}{\text{Mod}}.$$

Die nach der Formel C berechneten Höhen differiren mit denen nach Gl. A und B gefundenen im Mittel um etwa 1¹, beziehentlich 1½ m. Es soll nachgewiesen werden, dass auch diese Erscheinung keine zufällige ist, sondern dass die Formel C allgemein die kleineren Werthe als Gl. B und A ergeben muss. Zu diesem Zweck sollen die Ausdrücke verglichen werden, in denen sich Gl. B und C unterscheiden, nämlich:

$$\left(1+\alpha\frac{t_1+t_2}{2}\right)\log\frac{p_1}{p_2}=\frac{T_1+T_2}{2}\cdot\frac{1}{272{,}48}\log\frac{p_1}{p_2}$$

und

$$\frac{T_1-T_2+\frac{c}{c_1\,\text{Mod}}\log\frac{T_1-\frac{c}{c}}{T_2-\frac{c}{c_1}}}{272{,}48}=\frac{T_1-T_2+\frac{p_1T_2-p_2T_1}{p_1-p}\cdot\text{Log}\frac{p_1}{p^2}}{272{,}48}.$$

Entwickelt man $\mathrm{Log}\,\frac{p_1}{p_2}$, so folgt:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{T_1 + T_2}{2} \cdot \mathrm{Log}\,\frac{p_1}{p_2} = \\ = \left(T_1 + T_2\right) \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} + \frac{1}{3}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^5 + \ldots\right). \end{array}\right\} \quad (1$$

Andrerseits ist:

$$T_1 - T_2 + \frac{p_1 T_2 - p_2 T_1}{p_1 - p_2}\,\mathrm{Log}\,\frac{p_1}{p_2} =$$

$$= T_1 - T_2 + 2\left[\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} + \frac{1}{3}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^5 + \ldots\right]\frac{p_1 T_2 - p_2 T_1}{p_1 - p_2}.$$

Hebt man $\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}$ aus, so folgt:

$$= T_1 - T_2 + 2\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^4 + \ldots\right]\frac{p_1 T_2 - p_2 T_1}{p_1 + p_2} =$$

$$= \frac{(p_1 + p_2)(T_1 - T_2) + 2\,(p_1 T_2 - p_2 T_1) + 2\left[\frac{1}{3}\,(\;)_1^2 \ldots\right](p_1 T_2 - p_2 T_1)}{p_1 + p_2}$$

$$= \frac{(T_1 + T_2)(p_1 - p_2) + 2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^4 + \ldots\right](p_1 T_2 - p_2 T_1)}{p_1 + p_2}. \quad (2$$

Bei Vergleichung von Gl. 1 mit Gl. 2 zeigt sich, dass die ersten Glieder

$$(T_1 + T_2)\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)$$

in beiden dieselben sind. Die Entscheidung darüber, ob Gl. C die grösseren Werthe als Gl. B gibt oder nicht, hängt demnach davon ab, ob:

$$(T_1 + T_2)\left[\frac{1}{3}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^5 + \ldots\right] \lesseqgtr$$

$$\gtreqless 2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}\right)^4 + \ldots\right]\frac{p_1 T_2 - p_2 T_1}{p_1 + p_2}$$

ist, oder wenn man links mit dem Factor $\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2}$ Zähler und Nenner multiplicirt, ob:

$$T_1 + T_2 \lesseqgtr 2\,\frac{p_1 T_2 - p_2 T_1}{p_1 - p_2}$$

ist.

Nun ist aber $T_1 = T_2 + \varepsilon$, worin ε im allgemeinen einen positiven Werth bedeutet; deshalb wird:

$$\frac{T_1 + T_2}{2} \lesseqgtr \frac{p_1 T_2 - p_2 T_2 - p_2 \varepsilon}{p_1 - p_2} = T_2 - \frac{p_2 \varepsilon}{p_1 - p_2}.$$

Da auch p_1 immer grösser als p_2 ist, so ist $\frac{p_1 \varepsilon}{p_1 - p_2}$ stets positiv und man erkennt ohne weiteres, dass $\frac{T_1 + T_2}{2}$ jederzeit grösser sein muss, als

$$T_2 - \frac{p_2 \varepsilon}{p_1 - p_2}.$$

Deshalb muss auch die Formel B immer eine grössere Höhe ergeben als Formel C.

VIII.

Rühlmann spricht mit Beziehung auf die nach Formel B. beziehentlich der Bauernfeind'schen Formel berechneten Höhen die Sätze aus:

I. Die aus Barometer- und Thermometerbeobachtungen berechneten Höhen sind im allgemeinen am Tage wesentlich grösser als bei Nacht; sie zeigen eine bedeutende tägliche Periode.

II. Die aus Tages- und Monatsmitteln der meteorologischen Beobachtungen gerechneten Höhen zeigen eine jährliche Periode. Dieselben sind im Winter zu klein und im Sommer zu gross. Die Amplitude der jährlichen Periode ist jedoch geringer als die der täglichen.

Diese Sätze kann man ohne weiteres ausdehnen auf die nach den Formeln A und C gerechneten Höhen.

Mit Rücksicht auf die wärmetheoretische Grundlage jener Formeln erhält man jedoch leicht noch weitere Sätze und die Erklärung für manche Thatsache, die bisher nur empirisch aufgefunden wurde.

Es ist eine feststehende Erfahrung, dass die tägliche und jährliche Amplitude der Temperatur für Orte mit fester Unterlage im allgemeinen viel grösser ist, als für isolirte Höhen, beziehentlich die freie Atmosphäre. Daraus folgt, dass die Temperaturdifferenz $t_1 - t_2$ oder $T_1 - T_2$ am Tage, bzw. im Sommer grösser sein muss als in der Nacht, bzw. im Winter. Man kann dies in dem Satze aussprechen:

1. Die Temperaturabnahme für ein bestimmtes Höhenintervall ist in den unteren Luftschichten einem doppelten, periodischen Wechsel unterworfen; sie ist am Tage im allgemeinen grösser als in der Nacht und im Sommer grösser als im Winter. In diesem Satze liegt noch

keineswegs ausgesprochen, dass das Gesetz des Temperaturganges in der Vertikalen im Laufe des Tages und des Jahres sich ändern müsse; es könnte die Temperaturabnahme trotz der täglichen und jährlichen Schwankung ihrer Grösse doch eine constante bleiben. Erst der Umstand, dass die nach Gl. A, B und C berechneten Höhen am Tage und im Sommer zu gross und in der Nacht, bzw. im Winter zu klein werden, beweist, dass die wahre Mitteltemperatur im ersten Falle kleiner, im zweiten grösser als die zu $\frac{t_1 + t_2}{2}$ angenommen ist. Mit

Durchschnittlicher Temperaturgang für die untersten Luftschichten von Genf in den Monaten Februar und Juli.

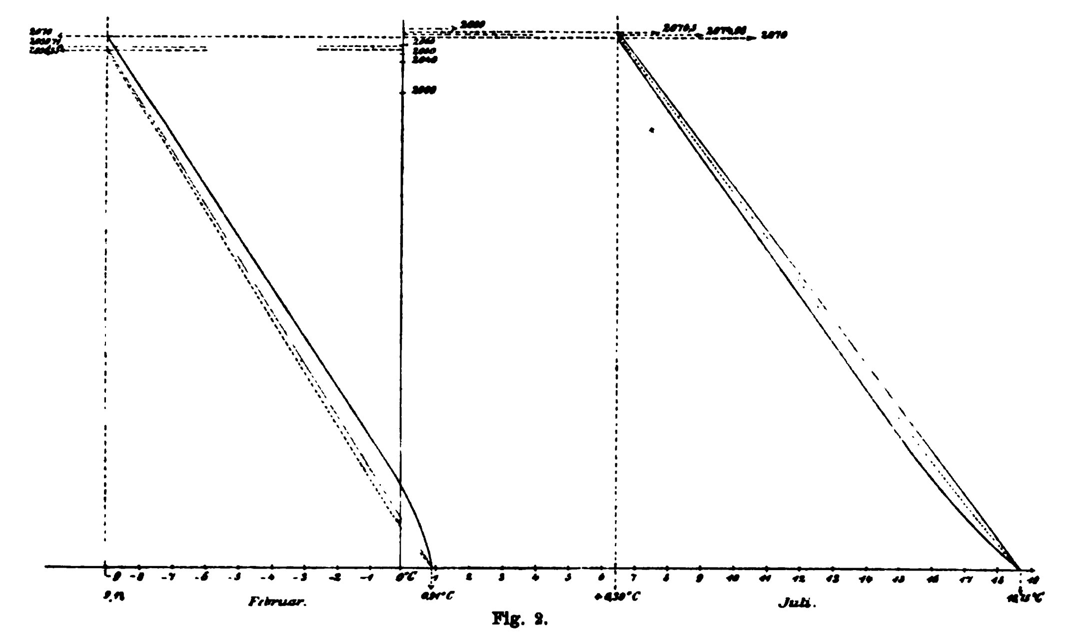


Fig. 2.

Rücksicht auf den schon weiter oben angewandten Mittelwerthsatz folgt daraus weiter, dass die Kurve, die den wahren Zusammenhang von h und t darstellt, im ersten Falle unterhalb, im zweiten oberhalb der geraden Verbindungslinie der Punkte $h t_2$ und $h = o$, t_1 verlaufen muss (siehe auch Fig. 2). Hieraus folgt wieder der Satz:

2. Die Temperaturabnahme ist in den untersten Luftschichten für die Tagesstunden, beziehentlich für den Sommer, im Durchschnitt eine grössere und für die Nachtstunden, beziehentlich für den Winter, eine geringere als in den darüber lagernden Luftschichten.

Für das Stationenpaar Genf - St. Bernhard ist sie z. B. nach den oben berechneten Zahlenwerthen für die Monate Mai bis August

grösser als es der constanten Temperaturabnahme für die ganze Höhe Genf-St. Bernhard entsprechen würde. Für die Monate Juni, Juli und August ist sie sogar grösser, als sie sich nach dem erweiterten Mendeleef'schen Gesetz berechnen würde. Für die übrigen Monate ist umgekehrt die Temperaturabnahme in den untersten Luftschichten im Durchschnitt eine langsamere als weiter hinauf. Im December und Januar vermag selbst die tägliche Wärmeeinstrahlung nicht mehr zu erreichen, dass in den wärmsten Tagesstunden die Temperaturabnahme der untersten Schichten die der darüber befindlichen übersteigt; denn die Rechnung für diese Tagesstunden ergibt Höhen, die die wahre Höhe 2070 m noch nicht ganz erreicht.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass diese ganze Erscheinung nicht auf falschen Thermometerangaben beruht, wie Rühlmann geneigt ist, anzunehmen, sondern, dass sie hauptsächlich eine Folge der Einwirkung ist, welche der feste Erdkörper auf die Temperatur der darüber befindlichen Luft ausübt. Die feste Erdoberfläche erwärmt sich unter der täglichen Wärmeeinstrahlung sehr rasch, und kühlt sich, wenn die Ausstrahlungsbedingungen günstig sind, ebenso rasch in der Nacht ab; die direct darüber befindliche Luft muss natürlich an diesem Process theilnehmen. Es wird dies auch dadurch bestätigt, dass sich die tägliche Periode der Höhen am deutlichsten ausprägt bei Tagen, an denen bei nahezu wolkenlosem Himmel eine regelmässige Bestrahlung durch die Sonne bei Tage und eine ungestörte Ausstrahlung der Wärme des Erdbodens gegen den kalten Himmelsraum stattfindet. Ebenso nimmt im Laufe des Sommers die der Erdoberfläche benachbarte Luft die höhere Temperatur der festen Erdrinde und des Meerwassers allmählich an und kühlt sich im Winter mit derselben langsam ab. Je weiter man sich von der Erdoberfläche entfernt, um so weniger kann natürlich die Temperatur der Luft von dem jähen Wechsel derselben an der Erdoberfläche beeinflusst werden. Ja, es scheint fast, als wenn dieser Einfluss gar nicht weit emporreichte und als wenn eine verhältnissmässig scharfe Grenze vorhanden wäre zwischen den Luftschichten, deren Temperatur von der directen Ein- und Ausstrahlung und denen, deren Temperatur ausserdem von der Erwärmung der Erdoberfläche abhängt. Die bis jetzt darüber vorliegenden Erfahrungen, die Beobachtungen in Ballons captifs von Glaisher in Chelsea bei London und Sherman auf Coney Island bei New-York deuten wenigstens darauf hin. Auch würden, wenn die Convectionsströmungen, durch die die Erwärmung der Luft durch die erhitzte Erdoberfläche am Nachmittage hauptsächlich vermittelt wird, sehr weit emporreichten, die berechneten Höhen nicht so sehr von der wahren abweichen können, als dies thatsächlich geschieht.

Weitere Schlüsse für die Vertheilung der Wärme im Luftmeer, sowie die Erklärung für manche Eigenthümlichkeit, die in den oben berechneten Höhen zum Ausdruck kommt, ergeben sich durch Betrachtung der Formel A, beziehentlich des darin vorkommenden, entscheidenden Factors:

$$\frac{\nu}{\nu - 1} \cdot (T_1 - T_2) = \frac{\log \frac{p_1}{p_2}}{\log \frac{T_1}{T_2}} (T_1 - T_2) =$$

$$= \left(\frac{T_1 + T_2}{2}\right) \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}\right)^4 + \dots}\right) \log \frac{p_1}{p_2}.$$

a) Es zeigte sich, dass die nach Gl. A berechneten Höhen sich von den nach Gl. B gefundenen durch den Werth des Factors

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 - T_2}\right)^4 + \dots}$$

unterschieden. Da nun dieser im wesentlichen von der Differenz $T_1 - T_2$ bestimmt wird und diese Differerenz in der täglichen Periode für die Nacht, in der jährlichen für den Winter ein Minimum wird, so müssen auch die Differenzen der nach Gl. A und B berechneten Höhen in der Nacht und im Winter am kleinsten und in der heissesten Tages- beziehentlich Jahreszeit am grössten werden. Die oben aufgestellte Differenzenreihe für die nach Gl. A und B gerechneten Werthe bestätigt dies vollkommen. Beispielsweise ist diese Differenz für den Mai früh 4 Uhr, wo $T_1 - T_2$ den niedrigsten Werth 10,7 hat, bloss 0,186, während sie zur heissesten Tageszeit, wo $T_1 - T_2 = 14{,}7\,^{\circ}$C ist, 0,47 m beträgt.

b) Die nach Gl. A und nach Gl. B berechneten Höhen hängen ferner ab von der Summe der Temperaturen in der unteren und der oberen Station. Nach der den Höhen beigegebenen Zusammenstellung der Werthe von $\frac{T_1 + T_2}{2}$ zeigt sich nun, dass diese Grösse im Laufe des Jahres und im Laufe jeden Tages bedeutenden Schwankungen unterliegt; sie wird für den Winter und die Nacht einerseits ein Minimum und erreicht im Sommer und in den heissesten Tagesstunden ein Maximum. Die berechneten Höhen zeigen hauptsächlich deshalb die schon oben erwähnte tägliche und jährliche Periode.

c) Diese Perioden werden jedoch zum Theil mit hervorgerufen durch die Variationen des Barometerstandes. Je nachdem der Factor

$\log \frac{p_1}{p_2}$ wächst oder abnimmt, müssen unter sonst gleichen Umständen auch die berechneten Höhen grösser oder kleiner werden. Denkt man sich $\log \frac{p_1}{p_2}$ in der Form:

$$\log \frac{p_1}{p_2} = \text{Mod} \cdot 2 \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} + \frac{1}{3} \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} \right)^5 + \dots \right)$$

geschrieben, so zeigt sich wieder, dass eine Aenderung von $p_1 - p_2$ für den Werth von $\log \frac{p_1}{p_2}$ in viel höherem Maasse ins Gewicht fällt als eine solche von $p_1 + p_2$. Es sind deshalb die Werthe von $b_1 - b_2$ für den täglichen und jährlichen Verlauf zusammengestellt. Daraus geht hervor, dass die Differenz $b_1 - b_2$ im Laufe eines Jahres vom heissesten Monat bis zum kältesten, und im Laufe eines Tages von den heissesten Stunden bis zu den kältesten allmählich wächst. Mit $b_1 - b_2$ steigt und fällt zwar auch der Werth von $b_1 + b_2$, indessen geschieht dies lange nicht in dem Maasse, dass dadurch der Werth des Quotienten $\frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}$, der etwa $\frac{1}{7}$ beträgt, unverändert bleiben könnte.

Die Perioden von $\frac{T_1 + T_2}{2}$ und $b_1 - b_2$ haben hiernach im allgemeinen entgegengesetzte Vorzeichen und sie wirken deshalb auch in entgegengesetztem Sinne auf den Werth der berechneten Höhen ein. Rühlmann spricht dies in dem Satze aus:

IV. Die Perioden der barometrisch gefundenen Höhen, die tägliche sowohl als die jährliche, lassen sich in zwei Theile zerlegen, von denen der eine und zwar der bei weitem grössere, von der Variation der Temperatur und der andere, kleinere, von der Variation der Barometerstände herkommt. Diese beiden Theilperioden haben im allgemeinen entgegengesetzte Vorzeichen.

Die physikalische Erklärung dieser Erscheinung ist mit Rücksicht auf die aufgefundene einfache Periodicität der Werthe von $\frac{T_1 + T_2}{2}$ und $b_1 - b_2$ eine sehr naheliegende. Am Tage und analog im Mittel des Sommers werden durch die starke Erwärmung des Erdbodens und der untersten Luftschichten die Flächen gleichen Druckes gehoben und es wird deshalb der Barometerstand b_2 in der oberen Station grösser, mithin $b_1 - b_2$ kleiner als vorher, während gleichzeitig die Temperaturen im unteren und oberen Niveau steigen. In der Nacht und analog im Mittel des Winters senken sich umgekehrt durch

die starke Wärmeausstrahlung des Erdbodens und der unteren Luftschichten die Flächen gleichen Druckes. Die Luft setzt sich zusammen, und da jetzt über der oberen Station nicht mehr so viel Luft vorhanden ist als vorher, so wird die Differenz $b_1 - b_2$, welche die Masse der zwischen beiden Stationen liegenden Luftsäule misst, grösser. Gleichzeitig sinken natürlich die Temperaturen in beiden Stationen. Zu diesem Heben und Senken der Niveauflächen wird immer eine gewisse Zeit gebraucht, so dass die Maxima und Minima von $b_1 - b_2$ etwas später eintreten müssen, als die Minima und Maxima von $\frac{T_1 + T_2}{2}$. Es drückt sich dies mehrfach in den berechneten Höhen aus. In der jährlichen Periode von $\frac{T_1 + T_2}{2}$ und $b_1 - b_2$ zeigt sich beispielsweise, dass $\frac{T_1 + T_2}{2}$ sein Maximum im Juli hat, während das Minimum von $b_1 - b_2$ erst im August eintritt. In der täglichen Periode des Mai ist das Maximum von $\frac{T_1 + T_2}{2}$ um 2 Uhr Nachmittags, das Minimum früh um 4 Uhr zu finden, das Minimum von $b_1 - b_2$ dagegen erst um 4 Uhr Nachmittags, das Maximum erst um 6 Uhr früh.

In der Regel fällt das Maximum oder Minimum der berechneten Höhen zusammen mit dem Maximum und Minimum von $\frac{T_1 + T_2}{2}$; wenn indessen die Zu- beziehentlich Abnahme von $\frac{T_1 + T_2}{2}$ eine langsame ist, so kann der Einfluss der Differenz der Barometerstände den Eintritt des Höhen-Maximums oder -Minimums verschieben. In der jährlichen Periode ist z. B. $\frac{T_1 + T_2}{2}$ im Februar ein Minimum, während das Höhenminimum schon im Januar eintritt, weil der Einfluss des niedrigen Werthes von $\frac{T_1 + T_2}{2}$ im Februar durch das Ansteigen der Luftdruckdifferenz um 0,55 mm vom Januar zum Februar compensirt wird. In der täglichen Periode des Monats Mai tritt ein ähnlicher Fall ein. Der Werth von $\frac{T_1 + T_2}{2}$ steigt von 12 Uhr Mittags bis 2 Uhr, wo er sein Maximum hat, um 0,6° C.; trotzdem tritt das Maximum der berechneten Höhen schon um 12 Uhr ein, weil der gleichzeitige Fall der Luftdruckdifferenz 0,43 mm beträgt. Von besonderem Interesse sind in dieser Hinsicht die Monate Januar und December. Im folgenden sind die Werthe von $\frac{T_1 + T_2}{2}$ und $b_1 - b_2$

für diese Monate berechnet und mit den nach der Bauernfeind'schen Formel berechneten Höhen, welche den nach Gl. B gerechneten gegenüber durchschnittlich 2,135 m zu gross ausfallen, zusammengestellt:

	December			Januar		
	$\frac{T_1 + T_2}{2}$	$b_1 - b_2$	h	$\frac{T_1 + T_2}{2}$	$b_1 - b_2$	h
12 Uhr Mittags	270,005	166,37	2068,8	270,28	166,42	+2069,2
2h	+270,23	— ,16	+2066,2	+270,605	,09	2068,5
4h	269,53	,16	2060,5	269,78	— ,03	2059,2
6h	268,88	,31	2056,7	268,950	,15	2055,8
8h	268,58	,38	2054,8	268,605	,24	2053,5
10h	268,38	+ ,46	2053,5	268,355	+ ,28	2051,8
12h Mittern.	268,255	— ,43	—2052,7	268,08	— ,26	—2050,1
2h	268,13	,47	2053,0	267,93	,32	2050,3
4h	268,03	,51	+2053,1	267,88	,41	+2051,5
6h	—267,88	+ ,59	—2052,7	—267,73	+ { ±,49	—2051,1
8h	268,03	— ,58	2053,2	267,93	+,49	2051,6
10h	268,98	+ ,63	2060,1	268,98	+ ,45	2058,5

Es sind hierbei die Maxima durch +, die Minima durch — Zeichen besonders hervorgehoben. Da für die Wintermonate der Temperaturfall in der Nacht ein sehr geringer ist, so tritt die Einwirkung des Factors $\log \frac{b_1}{b_2}$ auf die berechneten Höhen in diesem Falle unverhüllter als sonst hervor. Anstatt dass, den Werthen von $\frac{T_1 + T_2}{2}$ entsprechend, die Minima der Höhen in beiden Monaten allein früh um 6 Uhr eintreten sollten, finden sich ausserdem hier schon bald nach Mitternacht zwei Minima in den berechneten Höhen und zwar immer in der Zeit, in welcher auch die Luftdruckdifferenzen $b_1 - b_2$ Minima sind. Rühlmann scheint besonders diese Ausnahmefälle im Auge gehabt zu haben, wenn er sagt:

Ein kleines relatives Maximum ungefähr 2 ½ Stunden vor dem Minimum scheint in den gerechneten Höhen mehrfach angedeutet, tritt aber nicht überall unzweifelhaft hervor.

Die Erklärung für diese Thatsache ist in den obigen Bemerkungen enthalten. Auffallend ist nur die Erscheinung, dass die Differenz $b_1 - b_2$, die im jährlichen Verlaufe und für die übrigen Monate eine einfache Periode aufweist, für den December und Januar einen zwei- und mehrfachen periodischen Wechsel erfährt. Es hängt dies offenbar auf's innigste mit der täglichen doppelt- und mehrfach periodischen Schwankung des Barometerstandes zusammen. Wäre die Höhe h nicht

Function von $\log \frac{b_1}{b_2}$ und deshalb in der Hauptsache abhängig von der Differenz $b_1 - b_2$, sondern blosse Function von b_1 oder b_2 oder der Summe beider, und wäre der Temperaturfall während der Nacht in den übrigen Monaten nicht ein so rascher, so würde sich die doppelte Barometerschwankung auch für die übrigen Monate in den berechneten Höhen auf's deutlichste zu erkennen geben. Der Verfasser hofft, auf diese Frage noch an anderer Stelle zurückkommen zu können. Es geht jedoch daraus so viel hervor, dass der Grund dafür, dass die berechneten Höhen in der Nacht kleiner ausfallen als am Tage, nicht genau derselbe ist, wie der dafür, dass dieselben im Winter kleiner als im Sommer werden; es besteht zwischen Tag und Sommer einerseits und Nacht und Winter andrerseits nicht vollständige Analogie.

IX.

Rühlmann findet als Jahresmittel der nach der Bauernfeind-schen Formel berechneten Höhen den Werth $h = 2067{,}2$ und spricht deshalb den Satz aus:

Die Jahresmittel der meteorologischen Beobachtungen geben Höhen, welche von den wahren Werthen sich immer nur sehr wenig entfernen.

Er. bemerkt zu dieser Abweichung von nahezu 3 m noch: „Ob dieser Umstand in einer Unrichtigkeit der Constanten der Höhenformel, oder in Differenzen der Barometer, oder in localen Verhältnissen, also verschiedener Anziehung, oder so rascher Veränderung des Druckes mit der geographischen Lage, oder in einer eigenthümlichen Depression der Temperatur an einer oder beiden Stationen seine Ursache hat (wie letzeres von Plantamour selbst vermuthet wird) will ich unentschieden lassen, da mir die Aufstellung der Instrumente an den Stationen und die Methode der Vergleichung derselben nicht bekannt ist."

Er scheint hiernach der Meinung zu sein, dass es nur speciellen, vorwiegend localen Ursachen zuzuschreiben sein könne, wenn die berechnete Höhe um ungefähr 3 m hinter der wahren zurückbleibt, und dass im allgemeinen die zu Grunde gelegte Höhenformel die wahre Höhe ergeben müsse.

Es ist indessen kein Grund einzusehen, warum die der Gl. B oder richtiger der Gl. A entsprechende Annahme für die Temperaturabnahme in der Verticalen auch in Wirklichkeit im Jahresdurchschnitt zu Recht bestehen müsse. Wenn das letztere der Fall wäre, die Temperaturabnahme für gleiche Höhenintervalle also constant wäre, so würde ein solcher Zustand ebensowenig ein Gleichgewichtszustand

für die Temperatur sein, als jeder andere. Es gibt nach dem vorigen nur einen Zustand, in welchem neben dem statischen Gleichgewicht auch Temperaturgleichgewicht vorhanden ist, das heisst, in welchem ein Quantum Luft von einer Stelle an jede beliebige andere versetzt werden kann, ohne dass es dabei von der umgebenden Luft Wärme aufnimmt oder an dieselbe abgibt, und dies ist der indifferente Gleichgewichtszustand. Da die Erde fortwährend der Wärme-Ein- und Ausstrahlung unterworfen ist, so kann der letzere Zustand nie eintreten; es bildet sich vielmehr ein stationärer Zustand heraus. Ausserdem beweist der nach Gl. A bzw. B berechnete Werth für den Jahresdurchschnitt $h = 2065$ m, dass eine Correction der Constanten der Höhenformel eher dazu wirkt, die Höhen zu vermindern, dass also die Unrichtigkeit der Constanten die Ursache für die Abweichung von der wahren Höhe nicht sein kann. Richtiger würde es demnach wohl sein, an Stelle des Rühlmann'schen Satzes den folgenden zu setzen:

3. „Die Jahresmittel der meteorologischen Beobachtungen geben nach den Formeln A, B und C Höhen, welche hinter den wahren Werthen um ein Geringes zuzückbleiben.“

Und mit Rücksicht auf die den Formeln A und B zu Grunde liegenden Temperaturgesetze:

4. „Im Jahresdurchschnitt ist die Temperaturabnahme für gleiche Höhenintervalle in den untersten Luftschichten etwas geringer als höher hinauf.“

Dieser Satz steht auch mit der Erfahrung im Einklange, dass die feste (oder flüssige) Erdmasse früher eine viel höhere Temperatur hatte, als heute, sich also im Laufe der Jahrtausende abgekühlt hat. Während damals die Luft in den untersten, der Erdoberfläche benachbarten Schichten eine viel höhere Temperatur hatte, sowohl dem absoluten Werthe nach, als auch gegenüber der Temperatur der oberen Luftschichten, und deshalb die Stabilität des Luftmeeres eine sehr geringe war, wurde durch die stärkere Wärmeausstrahlung des festen Erdkörpers gegenüber der der höheren Luftschichten die Stabilität allmählich erhöht, und in dem Maasse, als dies geschah, wurde auch die Möglichkeit eines Luftaustausches in verticaler Richtung verringert. Gegenüber der so entstandenen Temperaturdifferenz in der Verticalen ist die in der Horizontalen geringfügig zu nennen und es kann die Temperatur eines Ortes an der Erdoberfläche durch horizontale Luftströmungen verhältnissmässig wenig verändert werden. Da nun weiter ein Ausgleich der Temperaturdifferenz durch Leitung in der Atmosphäre nach gewiesenermassen nur äusserst langsam vor sich gehen kann,

so ist der oben erwähnte stationäre Zustand des Luftmeeres vermuthlich folgender:

5. Es wächst die relative Temperatur der Luft mit der Höhe und beträgt an der Grenze der Atmosphäre anstatt — 272,48° C. nur ungefähr — 42° C. Nähert man sich von da der Erdoberfläche, so ist das Gesetz, welchem die Temperatur gehorcht, zunächst das Mendeleef'sche. Unter dem Einfluss der Wärmerückwirkung von der Erdoberfläche her, wie sie sich bis zu einer Höhe von ein bis zwei Meilen durch Vorhandensein von Wasserdampf und aufsteigende Luftströmnngen bemerkbar macht, geht dieses Gesetz allmählich über in das einer für gleiche Höhenunterschiede constanten Temperatur-Zunahme bzw. -Abnahme. In den untersten, der Erdoberfläche am nächsten liegenden Luftschichten wirkt endlich die Wärme-Ein- und -Ausstrahlung des festen Erdkörpers dazu, die durchschnittliche Temperaturabnahme geringer zu gestalten, als in den höher gelegenen.

Die doppelte Periodicität des Temperaturganges in den unteren Luftschichten ist schon oben behandelt worden; es sollen jetzt nur noch die erhaltenen Sätze durch graphische Darstellung an einigen Beispielen zum Ausdruck gebracht werden, und es sind dazu die Gleichungen:

$$h = \text{Const}\,(T_1 - T_2) \text{ und} \tag{A}$$

$$h = \text{Const}\left(T_1 - T_2 + \frac{c}{c_1\,\text{Mod}} \log \frac{T_1 - \frac{c}{c_1}}{T_2 - \frac{c}{c_1}}\right), \tag{C}$$

die, wenn man h und T_2 als laufende Coordinaten ansieht, zwei Curven darstellen, benutzt werden.

Die Fig. 1 soll den Gang der Temperatur für das Mittel des Monat September innerhalb der gesammten Atmosphäre veranschaulichen und ist auf folgende Weise erhalten worden:

Man denkt sich die Curve von der Gl. C durch die beiden Punkte $h = o$, $t = 14{,}62°$ C. und $h = 2064{,}274$ m, $t = 3{,}82°$ C. festgelegt und erhält auf diese Weise die gestrichelte Curve, die wegen des Werthes von $\frac{c}{c_1} = 238{,}09$ (siehe VI) die Ordinate im Punkte $t = -34{,}38°$ C $h = \infty$ tangirt.

Man construirt ferner auf Grund der Gl. C die strichpunktirte Curve, indem man dieselbe durch die Punkte $h = \infty$ $t = -42{,}2^{\circ}$ C. und den von Glaisher am 5. September 1862 erreichten höchsten Punkt $t = -20{,}7^{\circ}$ C. $h = 8433$ m $= 29000$ engl. Fuss $-$ 407 m (Seehöhe von Genf) legt. Es ist zwar dieser Punkt ebenfalls nur durch barometrische Höhenmessung ermittelt; er darf jedoch zur Construction der Curve Gl. C insofern mit gewissem Rechte verwendet werden, als er nach der in IV angeführten Zusammenstellung offenbar im Bereich jener Luftschichten liegt, in denen man das Mendeleef'sche Gesetz als nahezu erfüllt annehmen darf. Berechnet man auf Grund der so erhaltenen Constanten die zu der Temperatur $t = 14{,}62^{\circ}$ C. gehörige Höhe, so erhält man für $h = 8433 - 7165{,}7 = 1267{,}3$ m; ein Punkt, der zur Construction des Verlaufes der Curve in den unteren Luftschichten genügt.

Die Gl. A, welche im allgemeinen eine Grade repräsentirt, ergibt für den September von Genf $h = 2065{,}69$; es geht deshalb die Grade in diesem Falle durch die Punkte $h = o$ $t = 14{,}62$ und $h = 2065{,}69$ $t = 3{,}82^{\circ}$ C.

Die Curve, die den wahren Zusammenhang von Höhe und Temperatur darstellt, muss durch die Punkte $h = o$ $t = 14{,}62^{\circ}$ C. und $h = 2070$ $t = 3{,}82^{\circ}$ C. gehen; sie wird deshalb oberhalb der eben construirten Graden verlaufen und dieser innerhalb der Höhe Genf-St. Bernhard ihre concave Seite zukehren. Es ist wahrscheinlich, dass sie im weiteren Verlaufe durch die Punkte $t = -20{,}7$, $h = 8433$ und $t = -42^{\circ}$ C $h = \infty$ gehen wird; sie wird sich also in ihrem oberen Theile an die strich-punktirte Linie anschliessen. Die so erhaltene, stark ausgezogene Curve, ist in der Gegend des Wendepunktes, den sie aufweist, von einer geraden Linie sehr wenig verschieden, wie es die oben ausgesprochenen Sätze verlangen.

Da die aus den Jahresmitteln nach Gl. A berechnete Höhe um ungefähr denselben Betrag, als die aus dem Mittel des Septembers hinter der wahren zurückbleibt, so kann die construirte Curve zugleich dazu dienen, den Zusammenhang von Temperatur und Höhe für das Jahresmittel zn demonstriren.

Die zweite Figur soll dazu dienen, die periodischen Schwankungen der Temperaturabnahme, die sich in der Hauptsache in den unteren Luftschichten abspielen, anschaulich zu machen. Die schwach ausgezogenen Curven (Graden) geben den Stand der Temperaturen, wenn das der Gl. A zu Grunde liegende Gesetz richtig wäre, die gestrichelten den für das erweiterte Mendeleef'sche Gesetz und die stark markirten den muthmaasslichen wahren Verlauf.

Die Höhenintervalle von 2050 bis 2080 m sind dabei zur besseren Veranschaulichung grösser angenommen worden, als er der für 2050 m angenommenen Höhe entsprechen würde. Die beiden Curvenconstructionen geben nahezu die Extreme der Temperaturschwankungen innerhalb eines Jahres wieder; da jedoch die Schwankung der Temperaturabnahme innerhalb eines Tages eine ganz ähnliche ist, wie die innerhalb des Jahres, nur von etwas grösserer Amplitude, so vermögen dieselben zugleich eine Vorstellung von dem täglichen Gange der Temperatur zu gewähren; es entsprechen die Curven für den Juli den heissesten, die für den Februar den kältesten Tagesstunden.

Es ist wahrscheinlich, dass die erhaltenen Sätze für die Temperaturabnahme in der Verticalen nicht nur für das Stationenpaar Genf - St. Bernhard, sondern eine viel allgemeinere Geltung haben werden. Zur Feststellung dieser Thatsache ist es jedoch nöthig, ähnliche Rechnungen und Ermittlungen, wie die vorstehenden, für Orte, verschiedener Breite und verschiedenen geographischen Characters anzustellen. Für Orte mit wässriger Unterlage oder feuchtem Klima werden dieselben jedenfalls mannigfache Modificationen erleiden und es ist daselbst vor allen Dingen eine so grosse Amplitude in der Periodicität nicht zu erwarten.

Die Folgerungen, die sich aus der täglichen und jährlichen Periodicität des Temperaturganges in den unteren Luftschichten für die barometrische Höhenmessung ergeben, hat schon Rühlmann richtig erkannt. Derselbe gibt als die günstigsten Zeiten für Anstellung barometrischer Höhenmessungen die folgenden:

Im	December:	Nachm.	1	Uhr.				
„	Januar:	Mittag	12	Uhr.				
„	Februar:	Vorm.	10	Uhr	und	Nachm.	4	Uhr.
„	März:	„	8	„	„	„	6	„
„	April:	„	7	„	„	„	7	„
„	Mai:	„	7	„	„	„	7	„
„	Juni:	„	6	„	„	„	9	„
„	Juli:	„	6	„	„	„	9	„
„	August:	„	7	„	„	„	8	„
„	September:	„	8	„	„	„	6	„
„	October:	„	10	„	„	„	4	„
„	November:	„	11	„	„	„	2	„

Da die von Rühlmann benutzte Bauernfeind'sche Formel Werthe ergibt, die um etwa 2 m zu gross ausfallen, so sind diese Zeiten, wenn man auf die Gl. A oder B fusst, sämmtlich um ein

Geringes nach der wärmeren Tageszeit zu verschieben und es würde sich empfehlen, die Monate December und Januar als zur barometrischen Höhenmessung ungeeignet ganz auszuscheiden.[1])

Wenn man es nun auf diese Weise in der Hand hat, sich von den periodischen Störungen einigermaassen frei zu halten, so dürfte es schwerer sein, die vielen unperiodischen, vom Wechsel der Witterung herrührenden Fehlerquellen für eine richtige Höhenmessung zu vermeiden. Die den Formeln A und C zu Grunde gelegten Temperaturgesetze werden durch manche Zufälligkeiten durchbrochen und es kann deshalb die Abweichung der berechneten Höhe von der wahren im einzelnen Falle eine viel grössere sein, als die, welche von der täglichen Periode in der Wärmevertheilung hervorgerufen wird. Wenn beispielsweise zwischen der unteren und oberen Station Wasserdampf in condensirter Form oder gar Wolken vorhanden sind, dann ist die Anwendung des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes auf den Wasserdampf der Luft nicht mehr zulässig, und es kann ausserdem die Temperatur der Luft innerhalb geringer Entfernungen grossen Schwankungen unterliegen; oder wenn, wie dies nicht selten vorkommt, in der unteren Station eine andere Windrichtung herrscht, als in der oberen, also etwa unten die Luft aus kälteren, nördlichen und oben aus wärmeren, südlichen Gegenden herzuströmt, so wird die Temperatur an der Stelle, wo beide Strömungen an einander grenzen, einem jähen Wechsel unterworfen sein. Schon durch die Existenz eines bestimmten Windes überhaupt muss sich die barometrische Höhenmessung fehlerhaft gestalten. Es ist dies bereits vor Jahrzehnten von Erman und

---

1) Es liegt hierbei noch die Frage nahe, ob es nicht möglich sein würde, durch geeignete Wahl des Temperaturgesetzes in der Verticalen eine barometrische Höhenformel zu finden, die von der täglichen und jährlichen Variation frei ist; das diesem Falle entsprechende Temperaturgesetz müsste natürlich die Zeit t enthalten. — Diese Frage muss entschieden verneint werden, wenigstens wenn man von einer solchen Formel verlangen wollte, dass sie einigermassen allgemeingiltig wäre. Wäre die Temperatur der Luft lediglich und in der ganzen Höhe durch die directe Erwärmung durch die Sonnenstrahlen und die directe Ausstrahlung bestimmt, so würde das einzuführende Temperaturgesetz sich verhältnissmässig einfach gestalten und die Integration keine wesentlichen Schwierigkeiten verursachen. Da indessen die Temperatur der untersten Luftschichten neben der directen Ein- und Ausstrahlung wesentlich durch die der festen Erdoberfläche modificirt wird, so setzt sich die den Temperaturgang darstellende Curve im Grunde genommen aus zwei, überdies ziemlich schroff in einander übergehenden Curvenzweigen zusammen, und da nun die Höhe und der Character des unteren, durch die Temperatur des Erdbodens bedingten, mit der Bodenbeschaffenheit und Lage des Ortes ziemlich regellos wechseln muss, so könnte eine diesbezügliche Höhenformel, selbst wenn man das richtige Gesetz der Temperaturabnahme eingeführt hätte, nur für den besonderen Fall, aber nicht sehr allgemein gelten.

Dippe empirisch nachgewiesen worden und darin begründet, dass bei der stets vorhandenen horizontalen Entfernung der oberen und unteren Station (bei Genf und St. Bernhard ist diese z. B. ziemlich bedeutend) ein horizontaler barischer Gradient vorhanden ist. Aus alledem geht hervor, dass so lange und so weit als verticale und horizontale Luftströmungen vorhanden sind, auch eine ganz genaue Höhenbestimmung durch das Barometer und Thermometer nicht zu erwarten ist. Erst von einer gewissen Höhe ab, in welcher stabile Verhältnisse zu finden sind, also entweder Ruhe oder gleichmässige Bewegung herrscht, wird das letztere möglich sein und es ist wahrscheinlich, dass die entsprechende Höhenformel in diesen Luftschichten nicht die Gl. A, sondern C ist.

Immerhin bleibt zu hoffen, dass durch genauere Untersuchung solcher störender Einflüsse und durch das Studium des Gesetzes der Temperaturabnahme in der Verticalen auch für die practische Meteorologie, die barometrische Höhenmessung, noch mancher Vortheil erreicht werden wird.

Ueber thermomagnetische Maschinen.

Von

Dr. G. A. **Schilling** in Czernowitz.

Die Metalle Eisen, Nickel und Kobalt besitzen bekanntlich die Eigenschaft, dass ihre Magnetisirbarkeit mit der Temperatur variirt, und diese Aenderungen sind so bedeutend, dass sie wiederholt zur Construction thermomagnetischer Maschinen benutzt wurden [1]). Man hat zwei Arten derselben zu unterscheiden, solche, bei denen durch die genannten Vorgänge mechanische Arbeit gewonnen wird, und solche, die elektrische Ströme erzeugen. Die nachstehende Untersuchung ist beiden Gruppen von Apparaten gewidmet.

I. Thermomagnetische Motoren.

Bei diesen Apparaten wird ein magnetisirbarer Körper von einem Magnet angezogen, und dabei eine der Anziehung entsprechende Arbeit L gewonnen. Nach der Annäherung an den Magnet wird der Körper durch Zufuhr der Wärmemenge W so weit erhitzt, dass sich sein Magnetismus vermindert, und kann nun mit geringerem Arbeitsaufwande L vom Magnete entfernt werden. Hierauf wird der Körper abgekühlt und der Process beginnt von neuem. Es resultirt daraus ein Gewinn an Arbeit $L - L_1$, welchem der Verbrauch der Wärmemenge W entspricht. Bei vielen derartigen Apparaten steht jedoch die gewonnene Arbeit in einem solchen Missverhältnis zu der aufgewendeten Wärme, dass dieselben nur ein theoretisches Interesse beanspruchen können. Eine Ausnahme hiervon bildet die Maschine von Edison; es sei darum gestattet, hier eine Beschreibung derselben zu geben.

In einem Magnetfelde, das durch einen kräftigen Elektromagnet erzeugt wird, ist um eine auf der Ebene des Magnetes senkrechte

---

1) Eine Zusammenstellung solcher Apparate findet sich in der Arbeit J. Stefan's (Wiener Ber. 1887 Bd. 97). Einige neuere Modelle hat Prof. Wassmuth in der Nummer 8744 der „Neuen freien Presse“ vom 28. December 1888 beschrieben.

Achse ein Anker drehbar, der aus parallel zur Achse angeordneten Eisenröhren von geringer Wandstärke gebildet wird. Denkt man sich nun durch die Linie, welche die Pole des Magnetes verbindet, und die darauf senkrechte Gerade das Feld in vier Quadranten getheilt und etwa im ersten und dritten Quadranten den Anker erwärmt, in den anderen aber abgekühlt, so entsteht (bei einer entsprechenden Temperaturdifferenz) eine Bewegung des Ankers, deren Richtung an jedem Pole vom kalten zum warmen Theile geht. Hauptsächlich der beschriebene Apparat hat nun, wohl wegen seiner von Edison erwarteten practischen Verwendbarkeit als Motor, Anlass zu theoretischen Untersuchungen über diese Maschinen gegeben. In dieser Beziehung seien nur die Arbeiten der Herren Popper[1]), Stefan[2]), und Lippmann[3]) hervorgehoben.

Die erstere enhält ein ungünstiges Urtheil über diesen Apparat, sowohl mit Rücksicht auf die seiner dauernden Verwendung und Ausnutzung entgegenstehenden technischen Schwierigkeiten als auch wegen des geringen Wirkungsgrades und lässt schliesslich noch einen Widerspruch zwischen der Theorie und den Resultaten der Beobachtungen Edison's an der Maschine selbst bestehen.

Günstiger, wenn auch nicht direct ausgesprochen, ist das Urtheil, das aus der Arbeit H. Stefan's hervorgeht. Ausser den allgemeinen theoretischen Entwicklungen enthält aber diese Arbeit gar keine Angaben, welche auf die quantitativen Verhältnisse der bei der Maschine ins Spiel kommenden Wärme- und Arbeitsmengen zu schliessen gestatten würden. In ähnlicher Weise ist die zuletzt genannte Arbeit gehalten; es werden hauptsächlich nur die Bedingungen für die Möglichkeit derartiger Apparate gegeben.

Dies sind die Gründe, die ein neuerliches Eingehen auf diese Frage berechtigt erscheinen lassen, zumal gerade in der allerletzten Zeit so vollständige Beobachtungen über die magnetischen Eigenschaften des Eisens, insbesondere aber des Nickels bei sehr hohen Temperaturen, die ja bei diesen Apparaten zur Verwendung kommen, bekannt geworden sind. Genannt seien hier nur, indem von älteren Arbeiten abgesehen wird, die von Ledeboer[4]) und Hopkinson[5]) über das Verhalten des Eisens und die noch eingehenderen Versuche von Tomlinson[6]) und Hopkinson[7]) mit Nickel.

1) Zeitschrift für Elektrotechnik Heft 10. Wien 1887.

2) a. a. O.

3) Cours de Thermodynamique.

4) La lumière électrique XXVII. 2.

5) Hopkinson: Proceedings 45. 1889.

6) Phil. Mag. 1888. 2. V. 26.

7) Proc. 44. 1888.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist, für die bei einem thermomagnetischen Motor in Betracht kommenden Grössen L und W, (deren Bedeutung oben erläutert wurde) auf Grund der genannten Beobachtungen Grenzwerthe abzuleiten, die den Wirkungsgrad des Motors beurtheilen lassen. Ich werde die erforderlichen Berechnungen zuerst an dem Nickel durchführen, da die einschlägigen Beobachtungen Hopkinson's sich über eine grössere Anzahl von Temperaturen erstrecken als die für das Eisen, und beginne mit den Grössen L. Bezeichnet man mit P die magnetisirende Kraft, welche der Magnet an irgend einer Stelle erzeugt, und mit m das dadurch hervorgerufene magnetische Moment per 1 ccm des Ankers, so ist die bei der Annäherung dieses Volumtheiles an den Magnet gewonnene Arbeit $L = \int m dP$[1]), wobei m als Funktion von P erscheint und die Integration über die bei der Bewegung durchlaufenen Werthe von P auszudehnen ist. Als untere Grenze wurde immer $P = 0$ genommen. Die den einzelnen P bei verschiedenen Temperaturen entsprechenden Werthe des m sind den Curven entnommen, welche die Hopkinson'schen Beobachtungen wiedergeben. Es ist noch zu bemerken, dass die Versuche mit Ringen angestellt sind, wobei man bekanntlich die stärkste Magnetisirung erhält; die auf diese Art bestimmten L sind also als Maximalwerthe der Arbeit anzusehen, die man bei einem gegebenen P erhalten kann. In der nachfolgenden Tabelle sind die zusammengehörigen Werthe der Grössen t, P, L angeordnet; die beiden letzten Grössen sind im C. G. S.-System gegeben.

Werthe der $L = \int m dP$ für Nickel in Erg.

t	$P = 10$	20	30	40	50
12·8	285	1080	2225	3670	5365
112·8	325	1180	2395	3900	5655
171·7	375	1320	2605	4160	5945
226·0	405	1400	2705	4240	5965
244·5	415	1420	2715	4220	5905
255·2	415	—	2655	—	5775
269·3	405	1370	2605	4030	5585
272·7	375	1270	2405	3720	5185
279·2	375	1260	2365	3620	4985
283·8	345	1140	2115	3220	4425
292·4	275	930	1755	2690	3705
297·9	205	680	1275	1970	2750
304·1	105	370	715	1125	1600
308·4	65	210	380	565	760

1) Wassmuth u. Schilling. Wiener Ber. Bd. 94.

Wie man aus der beiliegenden Figur (Fig. 1) ersieht, steigen die Curven, bei welchen die t die Abscissen, die demselben P entsprechenden L Ordinaten bilden, zuerst langsam an und sind convex gegen die Abscissenaxe; dann werden sie concav, biegen bei einer gewissen Temperatur, die jedoch bei grösseren P früher eintritt, um und fallen endlich steil zur Abscissenaxe ab, die sie bei $t = 312^0$ schneiden.

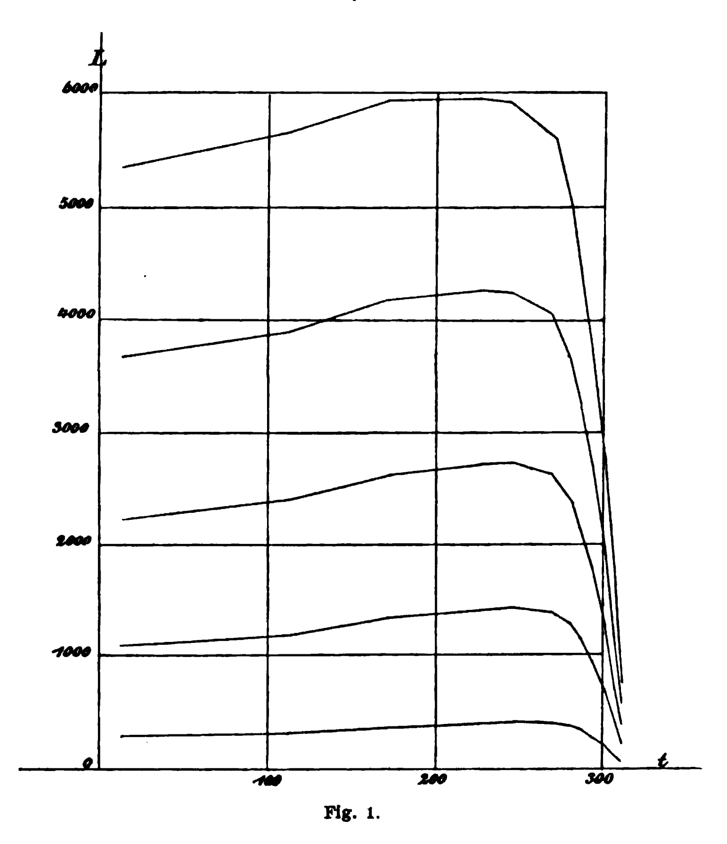


Fig. 1.

Es ist wichtig zu bemerken, dass diese Curven in ihrem letzten Theil nahezu gerade Linien darstellen. Es zeigt dies auch ein Blick auf die beistehende Tabelle. Die letzten Werthe des Quotienten $- \Delta L : \Delta t$ sind nämlich für

$P = 50$	180,	185,	195	Mittel	187
40	136,	136,	130	„	134
30	90,	90,	78	„	86

Soll die oben erwähnte Differenz $L - L$, bei einem gegebenen Temperaturintervall (mit Rücksicht auf die Construction eines thermomagnetischen Motors) möglichst gross werden, so wird man gut thun, gerade diesen steil abfallenden Theil der Curven, nämlich die Gerade

ins Auge zu fassen, d. h. es wird sich empfehlen mit zwei Temperaturen zu arbeiten, die zwischen 292° und 312° liegen.

Die einer Temperaturdifferenz von 1° C entsprechende Arbeit $-\Delta L : \Delta t$ ist von P abhängig, für grössere magnetische Kräfte lässt sich aber zwischen den eben erwähnten Temperaturgrenzen diese Abhängigkeit durch die Gleichung

$$-\Delta L : \Delta t = -a + bP$$

wiedergeben.

Wegen der später durchzuführenden Vergleiche wird es nöthig sein, die in Erg gegebenen Werthe von L zu transformiren. Es sollen nämlich diese Grössen als Arbeitsgrössen in Kilogrammmeter per 1 kg Nickel ausgedrückt werden. Nimmt man das specifische Gewicht des Nickels gleich 8,9, die Beschleunigung der Schwere gleich 9,8 m, dann entsprechen einem Erg per 1 ccm Nickel

$$1 : (9{,}8 \times 8{,}9 \times 10^4) = 1{,}15 \times 10^{-6} \text{ kgm per 1 kg.}$$

Rechnet man die in der Tabelle enthaltenen Werthe für L in dieser Weise um, so liefert die obenstehende Gleichung mit den Coefficienten

$$a = 7{,}5 \times 10^{-5}, \quad b = 0{,}58 \times 10^{-5}$$

eine hinreichende Uebereinstimmung mit den beobachteten Werthen. (Für kleine P kann natürlich diese Beziehung nicht gelten, weil sich dann positive Werthe von $\Delta L : \Delta t$ ergeben würden.)

Für den einer Temperaturdifferenz von 1° entsprechenden Gewinn an Arbeit gilt also die Beziehung

$$-\Delta L : \Delta t = -7{,}5 \times 10^{-5} + 0{,}58 \times 10^{-5} \cdot P.$$

Die Frage, die nun untersucht werden muss, bezieht sich auf die Wärmemenge, die zur Gewinnung dieser Arbeit dem Nickel zugeführt werden muss. Aus der Untersuchung H. Stefan's geht hervor, dass der Unterschied der specifischen Wärme eines Körpers im Magnetfelde und ausserhalb desselben gegeben ist durch

$$\alpha - \alpha_0 = T \frac{d^2 L}{d T^2}.$$

Aus der schon erwähnten Eigenschaft der Curven L, T, in eine Gerade überzugehen, folgt somit, dass für hohe Temperaturen $\alpha = \alpha_0$ sein muss.

Man hat es also bloss mit der specifischen Wärme α_0 im unmagnetischen Zustande zu thun. Bleiben wir zunächst wieder beim Nickel, so liegen hier zahlreiche Beobachtungen über die Werthe von α_0 vor, welche durch die Vermuthung veranlasst waren, dass beim Nickel, ähnlich wie beim Eisen, eine plötzliche Aenderung des α stattfinden

müsste, und zwar ungefähr bei jener Temperatur, für welche die Magnetisirbarkeit verschwindet. Aus den Versuchen von Hopkinson[1]), der die Abkühlung eines Nickelstücks, welches auf 430° erhitzt worden war, beobachtete, geht indes hervor, dass bei den für die Untersuchung der Magnetisirung in Betracht kommenden Temperaturen und noch etwas weiter hinauf kein solcher Sprung eintritt. Die Beobachtungen von Naccari[2]) geben übrigens für Temperaturen bis 230° Werthe der specifischen Wärme, die sich durch die Beziehung

$$\alpha = m\,(1 + n\,t)$$
$$m = 0{,}10427, \quad n = 907 \times 10^{-6}$$

darstellen lassen.

Demnach ist die specifische Wärme des Nickels bei den Temperaturen um 300°, welche bei den thermomagnetischen Motoren benutzt werden, beiläufig 0,13.

Zur Erwärmung von 1 kg Nickel um 1° sind also bei einer solchen Temperatur

$$0{,}13 \text{ Calorien} = 0{,}13 \times 425 = 55{,}25 \text{ kgm}$$

erforderlich.

Man erhält daher als Verhältnis der gewonnenen Arbeit zu der aufgewendeten Wärme:

$$-\frac{\varDelta L}{\varDelta t} : 55{,}25 = \frac{-7{,}5 + 0{,}58\,P}{10^5 \times 55{,}25}.$$

Arbeitet man zwischen den Temperaturen t und $312 \cdot 3$, so wäre dasselbe Verhältnis für eine vollkommene Maschine

$$\frac{312{,}3 - t}{585{,}3},$$

somit ist das Güteverhältnis des thermomagnetischen Motors zur vollkommenen Maschine gegeben durch

$$\frac{-7{,}5 + 0{,}58\,P}{10^5 \times 55{,}25} : \frac{312{,}3 - t}{585{,}3} = \frac{-7{,}5 + 0{,}58\,P}{312{,}3 - t} \cdot \frac{1{,}06}{10^4}.$$

An dieser Stelle darf nicht unerwähnt bleiben, dass schon mit der Bewegung des magnetisirbaren Körpers im Magnetfelde thermische Vorgänge in dem ersteren verknüpft sind. H. Stefan gibt für die beim Entfernen vom Magnet vom Körper abgegebene Wärme den Ausdruck $T\frac{dL}{dt}$ und diese ist negativ, wenn, wie es bei hohen Temperaturen der Fall ist, L mit steigender Temperatur abnimmt. Man

1) Proc. 44 pag. 319.
2) Acc. di Torino 1887.

muss also dem Körper noch diese Wärme zuführen. Für Nickel ist jedoch bei 297,9° und $P = 50$ diese Wärmemenge gleich $3,6 \times 10^{-4}$ Calorien, also verschwindend klein im Vergleich mit den anderen in Verwendung kommenden Wärmemengen.

Bei den vorstehenden Darlegungen habe ich mich zunächst nur auf das Nickel beschränkt. Von den auf das Eisen bezüglichen Beobachtungen sind, wie schon oben erwähnt, die von Hopkinson die vollständigsten, doch ist vorläufig nur ein Theil der Resultate mitgetheilt. Diese constatiren zunächst, dass die Temperatur, bei welcher der Magnetismus der untersuchten Eisensorte verschwindet, 737° beträgt. (Bei anderen Sorten noch mehr.) Dies ist also die höchste Temperatur, auf welcher eine Partie des beweglichen Ankers zu erhalten sein wird. Die Curven für die magnetische Induction bei verschiedenen Temperaturen, welche die Versuche wiedergeben, verlaufen ähnlich wie beim Nickel, es wird daher wohl gestattet sein, für die Curven, welche die Abhängigkeit des L von T darstellen, zu deren Bestimmung jedoch die vorliegenden Resultate nicht die hinreichende Zahl von Punkten liefern, einen gleichen Verlauf anzunehmen wie beim Nickel. Die zusammengehörigen Werthe der Grössen P, t, L, welche bestimmt werden konnten, sind in der folgenden Tabelle dargestellt, wobei wieder P und L im C. G. S.-System, die letztere per 1 ccm Eisen gegeben sind.

Werthe der L für Eisen.

t	$P = 10$	20	30	40	50
8·3	7160	18160	29860	41910	54210
698	7140	14690	22310	29980	37680
723	4920	10070	15320	20670	26070

Wird vorausgesetzt, dass die Curven für L im letzten Theile, also ungefähr von 723° bis 737° wie beim Nickel gerade Linien sind, und berechnet man auf Grund dieser Annahme die Quotienten $\Delta L : \Delta t$ für verschiedene P, so lässt sich zwischen diesen Grössen wieder eine wenigstens für grössere P giltige Beziehung feststellen. Dieselbe wird durch die Gleichung

$$-\frac{\Delta L}{\Delta t} = -a + bP$$

geliefert.

Drückt man die Grössen L in Kilogrammmetern per 1 kg Eisen aus, zu welchem Zweck sie mit

$$1 : (9,8 \times 7,8 \times 10^4) = 1,31 \times 10^{-6}$$

zu multipliciren sind, so erhält man für die Coefficienten a und b die Werthe

$$a = 7{,}6 \times 10^{-5}, \quad b = 5{,}03 \times 10^{-5}$$

und man hat:

$$-\frac{\Delta L}{\Delta t} = -\frac{7{,}6}{10^5} + \frac{5{,}03}{10^5} P$$

als Arbeitsgewinn, der einer Temperaturdifferenz von 1° entspricht.

Man hat nun wieder die hierzu erforderliche Wärmemenge zu berechnen. Die specifische Wärme des Eisens erfährt, wie auch die Versuche von Hopkinson [1]) zeigen, allerdings eine plötzliche Aenderung, doch findet dies erst statt bei Temperaturen, bei welchen die Magnetisirbarkeit schon aufgehört hat. Die Werthe der specifischen Wärme kann man nach der Gleichung von Pionchon [2])

$$\alpha = 0{,}11012 + 0{,}00005066\, t + 0{,}000000164\, t^2$$

berechnen. Man erhält für $t = 700$ . . 0,14.

Wegen des angenommenen Verlaufes der Curven für L kann man dieses α auch für den magnetischen Zustand nehmen, und es ist somit die zur Temperaturerhöhung des Ankers um 1° erforderliche Wärme per 1 kg.

$$0{,}14 \text{ Cal} = 0{,}14 \times 425 = 59{,}5 \text{ kgm.}$$

Das Verhältnis der gewonnenen Arbeit zur zugeführten Wärme wird

$$\frac{-7{,}6 + 5{,}03\, P}{10^5 \times 59{,}5},$$

für eine vollkommene Maschine, welche zwischen den Temperaturen t und 737 arbeitet, hat man das Verhältnis

$$(737 - t) : 7010,$$

also ist das Zeitverhältnis des Motors

$$\frac{-7{,}6 + 5{,}03\, P}{10^5 \times 59{,}5} : \frac{737 - t}{1010} = \frac{-7{,}6 + 5{,}03\, P}{737 - t} \cdot \frac{1{,}7}{10^4}.$$

Zur besseren Illustration der Umstände möge noch eine Berechnung für einen einzigen Fall ausgeführt werden.

Sei $P = 50$ und die Temperaturdifferenz 10°, so folgt für das Güteverhältnis

beim Nickel $2{,}279 \times 10^{-4}$
„ Eisen $41{,}4 \times 10^{-4}$

1) Proc. 45. 1889.
2) Ann. de Phys. et de Ch. XI. 1887.

Nach Lord W. Rayleigh ist dieses Verhältnis für ein Thermoelement

$$1:300 = 33 \times 10^{-4}.$$

Man ersieht daraus, dass schon bei dieser magnetisirenden Kraft ein Motor, bei dem Eisen verwendet wird, einen besseren Effect liefert als ein Thermoelement; Nickel hingegen bleibt noch hinter demselben zurück.

Man hat aber die Möglichkeit in der Hand, den Effect zu erhöhen, indem man die magnetisirende Kraft erhöht. Andrerseits kann aber auch der Aufwand an Wärme herabgedrückt werden. Es kann nämlich wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, jeder Theil des Ankers bei der Bewegung abwechselnd erwärmt und abgekühlt werden. Die Wärme, die man den abzukühlenden Stellen entzieht, kann man wenigstens theilweise zur Erwärmung der übrigen Partien verwenden. Bei der Maschine von Edison geschieht dies durch Anwendung eines Gebläses, mittels dessen die zur Verbrennung erforderliche Luft durch die Röhren geführt wird, welche abgekühlt werden sollen; dadurch kommt sie aber schon vorgewärmt in den Feuerungsraum. Durch diese sinnreiche Einrichtung kann somit ein Theil der sonst überschüssigen Wärme nutzbar gemacht werden, wodurch wieder das Güteverhältnis steigt.

II. Pyromagnetische Maschinen.

Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, können mittels dieser Maschine durch Vermittlung des Magnetismus elektrische Ströme durch Aufwand von Wärme gewonnen werden [1]). Das Princip, auf dem die Maschine beruht, lässt sich folgendermaassen ausdrücken: Ein Stück Eisen (oder Nickel), auf dem eine Drahtrolle steckt, dient als Anker eines permanenten oder Elektromagnets. Wird das Eisen rasch erwärmt, so ändert sich seine Magnetisirung, und es entsteht ein inducirter Strom in der Spule. Ein Strom von entgegengesetzter Richtung tritt bei der darauf folgenden Abkühlung des Eisens auf.

Der Wirkungsgrad eines solchen Apparates könnte erhalten werden, indem man die vom inducirten Strome geleistete Arbeit durch die Grösse der zur Aenderung der Magnetisirung erforderlichen Wärmemenge dividirt. Es empfiehlt sich aber, zur Lösung dieser Aufgabe einen anderen, indirecten Weg einzuschlagen, der darin besteht, diese Maschine mit einer magnetelektrischen zu vergleichen. Bei den pyromagnetischen

1) Die Beschreibung eines solchen von Edison construirten Apparates findet man im 10. Heft des 5. Jahrganges der Zeitschrift für Elektrotechnik (Wien 1887).

Maschinen wird der Strom dadurch erzeugt, dass das Moment des Ankers durch Zufuhr von Wärme geändert — wir wollen annehmen auf Null reducirt — wird. Man kann sich jedoch dieses Verschwinden des Magnetismus auch bewirkt denken durch die Entfernung des Ankers (sammt der Spule) vom Magnet. Allerdings wird dann die gesammte inducirte elektromotorische Kraft etwas verschieden ausfallen; denn es verschwindet neben dem vom magnetisirten Eisen herrührenden Kraftfluss auch der des Magnets. Dieser zweite Theil ist aber klein im Vergleiche mit dem ersten; füllt das Eisen den Raum der Spule aus, so ist er nämlich proportional der magnetisirenden Kraft P, während dieser der Grösse $4\pi m$ proportional ist, wo m das magnetische Moment in der Volumseinheit vorstellt. Bezeichnet man nun mit k einen mittleren Werth der Magnetisirungszahl, so ist $m = Pk$; die inducirten elektromotorischen Kräfte stehen somit im Verhältnisse $m : \pi k m$, es kann also, ohne einen grossen Fehler zu begehen, von dem der Aenderung des Feldes allein entsprechenden Strome abgesehen werden.

Soll aber der Anker, wie hier angenommen wird, vom Magnet entfernt werden, so ist hierzu ein Aufwand von Arbeit erforderlich, indem nämlich die Anziehung des Magnets auf das Eisen, sowie die auf den inducirten Strom zu überwinden ist. Diese Arbeit setzt sich somit aus zwei Theilen zusammen, von denen der erste

$$pL = v\int_0^P m\,dP$$

ist. (v ist das Volomen, p das Gewicht des Ankers)[1]). Die Werthe dieser Grösse L für verschiedene P und verschiedene Temperaturen sind im ersten Theil der Abhandlung gegeben worden.

Die Arbeit, welche zur Entfernung der vom Inductionsstrome durchflossenen Spule vom Magnet aufgewendet werden muss, ist klein im Vergleiche mit pL, man kann daher bei ihrer Berechnung einige Annahmen machen, die den Gang der Rechnung vereinfachen. Eine solche ist bereits früher gemacht worden, indem ein Theil des inducirten Stroms vernachlässigt wurde. Der Verlauf des inducirten Stroms ist dann durch die Gleichung

$$-r\,i\,dt = d\,(MV + iU)$$

gegeben; r stellt den Widerstand des Stromkreises, V das Potential der Inductionsspule auf das magnetisirte Eisen vor, dessen Gesammtmoment im betrachteten Augenblick M ist, endlich U das Selbstpotential der Spule, welches natürlich von der Magnetisirbarkeit des in der Spule befindlichen Kerns abhängt. Es soll aber angenommen werden,

1) L stellt demnach wieder die auf die Gewichtseinheit entfallende Arbeit vor.



dass M constant sei, wobei ein mittlerer Werth der Magnetisirungszahl der Rechnung zu Grunde gelegt wird. Das Gesetz, nach welchem sich M mit der Zeit ändert, ist durch die Art der Bewegung bestimmt, es ist aber gestattet, da diese willkürlich ausgeführt werden kann, etwa die Beziehung

$$M = M_0 e^{-\alpha t}$$

anzunehmen. Für $t = 0$ ist dann $M = M_0$, für ein grosses t gleich Null. Man hat so die Differentialgleichung

$$\frac{di}{dt} + \frac{r}{U} i = \frac{V M_0 \alpha}{U} e^{-\alpha t},$$

die Integration derselben gibt

$$i = \frac{V M_0 \alpha}{-U\alpha + r} e^{-\alpha t} + C e^{-\frac{r}{U} t},$$

C ist die Integrationsconstante; sie ergibt sich aus der Bedingung

$$\int_0^\infty i\, dt = \frac{V M_0}{r}.$$

Es folgt

$$C = -\frac{V M_0 \alpha}{-U\alpha + r},$$

somit

$$i = \frac{V M_0 \alpha}{-U\alpha + r}\left(e^{-\alpha t} \alpha - e^{-\frac{r}{U} t}\right).$$

Die von diesem Strome durchflossene Spule kann man sich durch einen Magnet ersetzt denken. Ist F die gesammte Fläche des Solenoides, dann ist $\mu = i F$ das Moment dieses Magnets und die zur Fortbewegung der Spule nothwendige Arbeit

$$A = -\int_P^0 \mu\, dP = -F \int_P^0 i\, dP$$

Es kann nun auch P als Function der Zeit angesehen werden, und man kann annehmen, dass

$$P = P_0 e^{-\alpha t}.$$

Darin liegt freilich die Voraussetzung der Proportionalität von M und P; aus dem oben angeführten Grunde wird man sich aber diese Vereinfachung erlauben können. Es wird dann

$$A = \frac{F V M_0 \alpha^2 P_0}{-U\alpha + r}\left[\int_0^\infty e^{-2\alpha t} dt - \int_0^\infty e^{-\left(\frac{r}{U} + \alpha\right) t} dt\right]$$

$$A = \frac{F V M_0 \alpha P_0}{2(r + U\alpha)}.$$

Nimmt man α sehr gross; wird also die Bewegung der Spule rasch ausgeführt, so kann man schreiben

$$A = \frac{F\,V}{U} \cdot \frac{M_0\,P_0}{2}.$$

Hat die Spule nur eine Lage von Windungen, deren n auf eine Längeneinheit gehen, so ist

$$V = 4\pi n$$
$$F = nl \cdot r^2 \pi\ ,$$

wenn r den Halbmesser, l die Länge der Rolle bezeichnet. Ist noch a der Halbmesser des in der Spule befindlichen Eisenkerns, dann ist, wenn von der Wirkung der Enden abgesehen wird

$$U = l \cdot 4\pi^2 n^2 (r^2 + 4\pi k a^2),$$

k ist ein mittlerer Werth der Magnetisirungszahl. Es wird daher

$$A = \frac{r^2}{r^2 + 4\pi k a^2} \frac{M_0\,P_0}{2}.$$

Füllt das Eisen den Hohlraum der Spule ganz aus, so kann man $a = r$ setzen, und man erhält

$$A = \frac{1}{1 + 4\pi k} \frac{M_0\,P_0}{2},$$

da aber $\frac{M_0\,P_0}{2}$ in erster Annäherung gleich $p \cdot L$ ist, kann man sagen A stehe zu $p \cdot L$ im Verhältnis $1 : (1 + 4\pi k)$; es kann also gegen L vernachlässigt werden.

In erster Annäherung ist somit die zur Erzeugung des Stroms in der Spule erforderliche Arbeit gleich $p \cdot L$. Denkt man sich diese von einer vollkommenen Maschine geliefert, die zwischen zwei Temperaturen t und d arbeiten, so müsste dieser die Wärme W_1 zugeführt werden:

$$W_1 = \frac{p \cdot L(273 + d)}{d - t}.$$

Verwendet man bei den thermomagnetischen Maschinen Temperaturen, bei welchen L schon in linearer Weise mit t zusammenhängt, und ist d die Temperatur, bei welcher die Magnetisirbarkeit aufhört, so ist, wie im ersten Theile gezeigt wurde, die zur Aufhebung der Magnetisirung erforderliche Wärme

$$W = p \cdot \alpha (d - t),$$

wenn α die specifische Wärme vorstellt.

Das Güteverhältnis dieser Maschine, bezogen auf die vollkommene, ist gleich dem umgekehrten Verhältnis der bei beiden zur Hervorbringung desselben Effectes nothwendigen Wärmemengen, somit gleich

$$\frac{p \cdot L \cdot (273 + d)}{d - t} : p \cdot a \cdot (d - t).$$

Wir haben es aber mit solchen Temperaturen zu thun, wo L linear mit t verbunden ist. Dann ist, wie im ersten Theil der Arbeit gezeigt wurde

$$L = (-a + bP)(d - t),$$

man erhält daher für das Güteverhältnis der pyromagnetischen Maschine die Zahl

$$\frac{(-a + bP)(273 + d)}{a(d - t)},$$

das ist aber derselbe Ausdruck, der früher für die thermomagnetischen abgeleitet wurde. Man kann somit die dort gemachten Ueberlegungen ohne weiteres auch auf diesen Fall übertragen.

Ein elektrisches Contactthermometer.

Von

Dr. L. Grunmach.

Herr M. Stuhl in Berlin hat nach dem bekannten Princip der medicinischen Maximalthermometer ein elektrisches Contactthermometer construírt, mittels dessen beliebige Temperaturen auf bequeme und sichere Weise signalisirt werden können. Die bisher gebräuchlichen Instrumente dieser Art mit geschlossener Capillarröhre gestatten nur, ganz bestimmte Temperaturpunkte, bei welchen Platindrähte in die Capillare eingeschmolzen sind, zu signalisiren; diejenigen mit offener Capillarröhre, welche an Empfindlichkeit geschlossenen Thermometern naturgemäss nachstehen, können zwar durch Verschiebung des Contact gebenden Platindrahtes auf jeden beliebigen Temperaturgrad eingestellt werden, jedoch geben hineinfallende Staubpartikelchen, sowie Oxyd- und Amalgambildungen, welche die Quecksilberoberfläche mit einer die Elektricität minder gut oder gar nicht leitenden Schicht überziehen, zu Contactstörungen Veranlassung; auch tritt häufig beim Verstellen des Platindrahtes ein Zerreissen des Quecksilberfadens ein. Das nachstehend zu beschreibende Contactthermometer ist ein empfindliches Quecksilberthermometer mit luftleerer Capillarröhre (Fig. 1), in welche unterhalb der Scala ein fester Widerstand C in Form eines Glasknöpfchens, wie aus Fig. 2 ersichtlich, derart eingeschmolzen ist, dass noch ein capillarer Durchgang für das beim Erwärmen sich ausdehnende Quecksilber verbleibt. Dicht unterhalb des Widerstandes C ist der eine Platindraht B in die Capillarröhre eingeschmolzen, während sich der zweite Platindraht A im Quecksilbergefässe befindet. Der zwischen dem Widerstande C und dem Contact gebenden Platindrahte B freibleibende Raum ist bei der

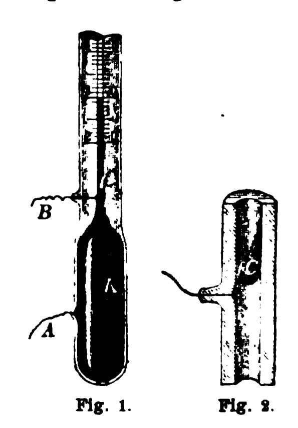


Fig. 1. Fig. 2.

Theilung der Scala berücksichtigt. Soll nun die Temperatur eines Raumes eine bestimmte Höhe, z. B. 47,5° C nicht überschreiten, und der Eintritt dieser Temperatur durch das Instrument zur Anzeige gebracht werden, so wird das Quecksilbergefäss erwärmt, bis die Quecksilbersäule diesen Punkt 47,5° C auf der Scala erreicht hat. Lässt man nun das Thermometer sich abkühlen, so reisst die Quecksilbersäule beim Widerstand *C* ab und tritt an dem Contact *B* vorbei in die Kugel zurück, während die obere Säule über dem Widerstande *C* stehen bleibt. Nunmehr ist das Thermometer zum Gebrauch hergerichtet; es wird in das Luft- oder Flüssigkeitsbad gebracht, nachdem die beiden Platindrähte mit einer Batterie, einem Läutewerk, Gasregulator u. s. w. in Verbindung gesetzt sind. Sobald der vorher fixirte Temperaturpunkt erreicht ist, berührt die untere Quecksibersäule den Contact *B* und setzt durch Schliessung des Stroms das Läutewerk in Thätigkeit. — Soll das Thermometer für eine höhere Temperatur benutzt werden, so hat man nur nöthig, das Gefäss über einer Flamme so lange zu erwärmen, bis die Quecksilbersäule den gewünschten höheren Temperaturpunkt erreicht hat. Soll es hingegen für eine niedrigere Temperatur als vorher angewandt werden, so wird die obere Quecksilbersäule durch eine Schleuderbewegung in den unteren Raum zurückgeführt und dann, wie angegeben, verfahren. Das Instrument ist patentirt und bei der Firma F. & M. Lautenschläger in Berlin käuflich.

Eingesendete Bücher.

W. Winter, Lehrbuch der Physik zum Schulgebrauche, München 1890, Ackermann's Verlag, 2. Auflage 495 S. mit vielen Abb. M. 4.80. Das Buch zeichnet sich durch eine klare Darstellungsweise sowie durch gute Ausstattung aus; besonders dankenswerth ist das Bestreben des Verfassers die älteren Anschauungen — namentlich auf dem Gebiete der Wärme und Elektricität — zu verlassen und die Resultate der physikalischen Forschungen der letzten Jahrzehnte auch dem Schulunterrichte zu Gute kommen zu lassen.

Uppenborn, Kalender für Elektrotechniker 1890. München bei R. Oldenbourg. Dem trefflichen Werkchen das durch seine kurz gefasste Beschreibung aller elektrotechnischen Methoden den Praktikern zur Genüge bekannt ist, ist noch ein alphabetisches Namens- und Wohnungsverzeichniss aller Elektrotechniker beigegeben.

W. Bühler, Zwei Materien mit drei Fundamentalgesetzen. Stuttgart 1890, W. Kohlhammer's Verlag. 63 S. Eine auf speciellen atomistischen Grundlagen basirende Erklärung der physikalischen Erscheinungen, die von den allgemein üblichen in wesentlichen Punkten abweicht.

J. Mielberg, Meteorologische Beobachtungen des Tifliser physikalischen Observatoriums in den Jahren 1887 bis 1888.

F. Osnaghi Rapporto annuale dell' Osservatorio marittimo di Trieste, per l'anno 1886. Vol. III.

E. Mathieu, Theorie des Potentials und ihre Anwendung auf Elektrostatik und Magnetismus. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. Berlin 1890, Springer's Verlag, 374 S. M. 10. Das ganz vorzüglich ausgestattete Werk bietet für jeden, der sich mit Potentialtheorie zu beschäftigen hat reichen Stoff der Belehrung. Sein Inhalt ist folgender: I. Theorie des Potentials. 1. Allgemeine Eigenschaften des Potentials. 2. Potential von Massenschichten, welche auf Flächen abgelagert sind. 3. Logarithmisches Potential, calorisches Potential, zweites Potential. 4. Vergleichung der Theorie des Potentiales mit derjenigen der Wärme. 5. Ueber die Anziehung verschiedener Körper, welche von Flächen zweiter Ordnung begrenzt sind. II. Elektrostatik und Magnetismus. 1. Allgemeine Principien der Elektrostatik. 2. Specielle Probleme aus derselben. 3. Ueber die Rolle der Diëlektrika in derselben. 4. Allgemeine Theorie des Magnetismus. 5. Specielle Probleme aus der Theorie derselben.

H. Weber, Elektrodynamik, mit Berücksichtigung der Thermoelektricität, der Elektrolyse und der Thermochemie. Braunschweig 1889, F. Viewegs Verlag 117 S. M. 6. Auf den durch W. Weber gegebenen Anschauungen fussend und wesentlich mit Benutzung des Princips von der Erhaltung der Kraft werden in dem vorliegenden Werke die Principien der Elektrodynamik entwickelt, wobei namentlich auch die chemischen Processe eine dankenswerthe Berücksichtigung finden. Der Inhalt

zerfällt in folgende Kapitel: 1. der galvanische Strom, 2. das Gesetz von der Erhaltung der Energie, 3. Energiegleichung für den galvanischen Strom, 4. Thermoelektricität, 5. Elektrolyse, 6. Thermochemische Betrachtungen, 7. Stromkreis und Elektrolyt, 8. Wechselwirkung linearer galvanischer Ströme.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Leipzig W. Engelmann's Verlag. Von dieser billigen Wiederausgabe der besten älteren, zum Theil nicht mehr erhältlichen Schriften ist nun No. 2 bis 8 erschienen, enthaltend; 1. Gauss Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältniss des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. 2. J. Dalton und W. H. Wollaston, die Grundlagen der Atomtheorie. 3. Gay Lussac, Untersuchungen über das Jod. 4. Gauss, Allgemeine Flächentheorie. 5. E. H. Weber, über die Anwendung der Wellenlehre auf die Lehre vom Kreislauf des Blutes. 6. F. W. Bessel, Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels. 7. A. Avogadro und Ampère, Die Grundlagen der Molekulartheorie.

(Fortsetzung von Seite 2 des Umschlags.)

Einige Zahlen, welche wir von der Verlagshandlung erfahren haben, mögen die stoffliche Gröfse des Unternehmens versinnlichen. Zum Druck der 1036 Textbogen mit 113,880,000 Buchstaben, welche unser Werk enthält, und an denen ein einzelner Setzer 40 Jahre gesetzt haben würde, bedurfte es der Herstellung von 16,576 Stereotypplatten und einschliefslich der 550 Beilagen eines Aufwandes von 817,600 Ries Papier, die nicht weniger als 7½ Millionen Pfund wiegen. Gelte es, die bis jetzt hergestellten 140,000 Exemplare, oder nach Bänden ausgedrückt: 2,240,000 Bände in Bogen zu zerlegen, so würde sich damit eine Fläche von 53,144,000 Quadratmeter oder nahezu eine Quadratmeile bedecken lassen. Wollten wir sie, eingebunden, Rücken an Rücken nebeneinander stellen, so bedürften wir einer Strecke von 140 Kilometer, die ungefähr der Bahnlinie von Berlin bis Magdeburg entspricht. Der Druck des Lexikons erfolgte vorzugsweise auf Rotationsmaschinen, die sich sogen. »endlosen« Rollenpapiers bedienen. Wenn wir uns nun das ganze Papierquantum auf einer einzigen Rolle aufgerollt denken, würde die Gesamtlänge dieses Papierstreifens (106,288 Kilometer oder 14,329 Meilen) zweiundzweidrittelmal den Äquator umspannen. In einzelnen ausgebreiteten Bogen aufeinander gelegt, bildete das Papier dagegen einen Turm von 20,932 Meter Höhe, der den höchsten Berg Europas, den Montblanc, um mehr als das Vierfache überragen würde.

Die Pünktlichkeit, mit welcher die redaktionelle Leitung und die Betriebsstätten der Verlagshandlung sich in die Hände arbeiteten, so dafs die 256 überreich illustrierten Lieferungen, aus welchen das Werk besteht, mit der Regelmäfsigkeit einer Tageszeitung erscheinen konnten, ist, wenn man diese kolossalen Verhältnisse in Betracht zieht, fast beispiellos.

Dank der Energie und Zuverlässigkeit der Verlagshandlung ist die Aufgabe nunmehr gelöst, und wir freuen uns der glücklichen Durchführung des grofsen Unternehmens, mit dessen prachtvoller äufsern Ausstattung zudem keines seiner Vorgänger und keines seiner Mitbewerber sich vergleichen kann. Ist doch allein der Reichtum an 550 Illustrationstafeln und Karten, künstlerisch wie technisch in vollendeter Ausführung, eine kostbare Zugabe, welche den »Meyer« vor allen andern auszeichnet.

Die Vorsorge des Herausgebers geht indessen noch über die dermalige Begrenzung hinaus. Wie der soeben ausgegebene Prospekt mitteilt, soll dem Hauptwerk als unentbehrlicher Bestandteil ein Ergänzungs- und Registerband unmittelbar angeschlossen werden, welcher neben neuen Artikeln die während des Erscheinens notwendigerweise sich ergebenen Neuerungen, Veränderungen und Berichtigungen nachträgt und durch Nachweis derjenigen Namen, Thatsachen und Materien, welche nicht unter eignen Stichworten behandelt werden konnten, das Werk um etwa 25,000 Artikel bereichert.

Ebenso haben wir mit Freuden vernommen, dafs auch für weitere Jahre einem Veralten des schönen Werkes durch Ausgabe von Jahres-Supplementen vorgebeugt werden wird. Diese wertvollen Nachträge ermöglichen jedem Besitzer des Meyerschen Konversations-Lexikons, seinen litterarischen Hausschatz auf dem Laufenden zu erhalten und zu erneuern.

Auch für diese dankenswerte Einrichtung gebührt dem Bibliographischen Institut nicht geringere Anerkennung als für das Meister- und Musterwerk selbst, welches in sich wie in seiner grofsen Verbreitung ein Denkmal unsrer hohen Kulturentwickelung genannt werden darf. (10/5)



Hierbei eine Beilage von **Leopold Voss** in **Hamburg.**

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 6. Heftes.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1890.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Inhaltsverzeichniss des Taschenbuches:

Seite

I. Mathematik.

II. Physik.

III. Elektrotechnik.

IV. Gemeinnützliches.

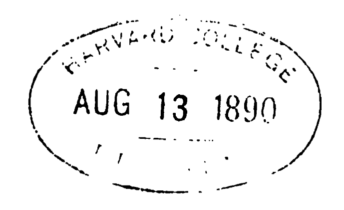
Bezugsquellen.

Kalendarium und Notizkalender
für jeden Tag. Von Anfang November 1889 bis Ende December 1890.

Notizblatt für Adressen.

Fachliche Anzeigen.

Verzeichniss der Elektrotechniker als Beilage.



Zur Theorie des Bishop'schen Ringes[1].

Von

Dr. J. M. Pernter.

Nachdem ich die Literatur über den Bishop'schen Ring, soweit sie mir zu Gesichte gekommen, durchgesehen, scheint es mir nichts weniger als überflüssig, einige Bemerkungen über diese vorher nie beobachtete Erscheinung behufs Präcisirung der Auffassung derselben zu machen und daran die einzig richtige Art der Berechnung der Grösse (Durchmesser) der Theilchen zu reihen, welche den Bishop'schen Ring erzeugten.

Aus der ganzen Erscheinung des Bishop'schen Ringes geht mit Sicherheit hervor, dass er eine Beugungserscheinung war, welche wesentlich gleicher Natur ist, wie die kleinen Höfe um Sonne und Mond. Diese Kategorie von Beugungserscheinungen trägt den Namen Fraunhofer'sche Ringe, weil Fraunhofer zuerst dieselben messend verfolgte und eine Formel für dieselben aufstellte.

Die Erscheinung, wie sie auftritt, wenn man mit weissem Lichte experimentirt, und wie dieselbe in den kleinen Höfen uns entgegentritt, ist folgende: Die Lichtquelle selbst erscheint unmittelbar von einem hellglänzenden weisslichen Scheine umgeben, welcher durch einen rothen Saum begrenzt ist; auf diesen rothen Saum folgen dann noch ein, zwei oder mehr farbige Ringe, je nach der Güte der Bedingungen. Die Farben in diesen Ringen entsprechen den Farben der Newton'schen Ringe, so dass der erste farbige Ring die Farben zweiter Ordnung, der zweite die dritter Ordnung u. s. w. aufweist. Würde man, wie es vielfach (aber nicht vollkommen correct) geschieht, den rothen Saum des weisslichen Scheines, der die Lichtquelle umgibt, als ersten Ring bezeichnen, so könnte man sagen, der erste Ring habe (beiläufig) die Farben erster Ordnung, der zweite die zweiter Ordnung u. s. w. Dies geschieht nun

1) Vom Herrn Verf. mittgetheilt aus Meteorolog. Zeitschr. Nov. 1889.

auch zuweilen und daher kommt es dann, dass man auch schlechtweg von Ringen erster, zweiter u. s. w. Ordnung spricht. Es wird sich aber zeigen, dass diese Nomenklatur nur zu Verwechslungen und Irrungen führt und daher die Einfachheit der Benennung der Correctheit in derselben weichen muss. Aus den weiteren Ausführungen wird erhellen, dass folgende Bezeichnungen die correcten sind:

Der weisse Schein unmittelbar an der Lichtquelle mitsammt seinem rothen Saume (den man so gern als ersten Ring bezeichnet) bildet ein einheitliches Ganzes, welches wir Aureole nennen. Erst auf die Aureole (also auf den rothen Saum derselben) folgt der erste farbige Ring mit seinen Farben zweiter Ordnung u. s. w.

Die Ursache dieser Erscheinungen hat Fraunhofer in der Beugung des Lichtes an vielen gleich grossen, unregelmässig vertheilten runden Körperchen nachgewiesen. Seine experimentellen Untersuchungen, bei welchen er die „Radien der rothen Ringe"[1]), d. h. die Abstände der äusseren Ränder der rothen Ringe vom Mittelpunkte der Erscheinung mass, wobei der rothe Saum der Aureole als erster rother Ring genommen ist, führte ihn zu folgenden Formeln, welche die Gesetzmässigkeit der Aufeinanderfolge dieser rothen Ringe und den Zusammenhang zwischen der Grösse der Radien der letzteren und dem Durchmesser der lichtbeugenden Körperchen darstellen:

$$L_1 = \frac{0{,}0006957}{d}; \quad L_2 = \frac{0{,}0006957}{d} + \frac{0{,}0005793}{d}$$

$$L_3 = \frac{0{,}0006957}{d} + 2 \cdot \frac{0{,}0005793}{d}$$

u. s. w.

L_1, L_2, L_3 die Radien der rothen Ringe in Graden gemessen und in Bogenlängen ausgedrückt; d Durchmesser der runden Körperchen. Die Zähler auf der rechen Seite sind in Millimetern gemeint.

Diese Formeln[2]) gestatteten nun die Fraunhofer'schen Ringe, also auch die kleinen Höfe rechnend zu verfolgen und wurden dieselben bekanntlich von Kämtz[3]) dazu benutzt, die Durchmesser der Wassertröpfchen zu berechnen, welche die kleinen Höfe erzeugen. So lange die Erscheinung von weissem Lichte hervorgerufen wird, geben diese Formeln in der That richtige Werthe, wenn man bei der Messung stets die Radien der äusseren Ränder der rothen Ringe nimmt; denn für

1) Die Messungen beziehen sich zunächst auf die von einer kreisförmigen Oeffnung hervorgerufenen Erscheinung.

2) Schuhmacher's astronomische Abhandlungen II. Heft (1823) S. 61.

3) Lehrbuch der Meteorologie, 3. Bd. S. 96 ff.



diesen Fall wurden die Formeln von Fraunhofer aus seinen Versuchen abgeleitet. Bringt man aber die Erscheinung mit monochromatischem Lichte hervor, so stimmen die Formeln nicht mehr. Man sollte glauben, dass sie wenigstens bei Anwendung rothen Lichtes stimmen müssen, da ja Fraunhofer die Radien der rothen Ringe gemessen. Auffallenderweise stimmen sie aber auch in diesem Falle nicht. Die Ursache hievon muss darin gesucht werden, dass die rothen Ringe, welche bei Anwendung von weissem Lichte auftreten, durchaus anderer Natur sind als diejenigen, welche man mittels rothen Lichtes erhält. Die nähere Erklärung hiefür liegt in den weiteren Ausführungen. Obige Bemerkung führt uns unwillkürlich auf den Gedanken, dass wir es bei den Fraunhofer'schen Formeln mit nur empirischen und nur für den Fall giltigen Formeln zu thun haben, für den sie aufgestellt wurden, d. h. für die Fraunhofer'schen Ringe, wie sie durch weisses Licht entstehen.

In der That führt die allgemeine Theorie für die durch zahlreiche unregelmässig vertheilte runde Körperchen hervorgerufenen Beugungserscheinungen zu ganz anderen Formeln. (Unter „rund" ist jeder Körper verstanden, dessen Projection auf eine Ebene senkrecht zur Richtung der Strahlen ein Kreis ist.) Man geht bei Ableitung der Formel von dem Falle aus, dass das Licht, welches die Beugungserscheinung, die Fraunhofer'schen Ringe, hervorruft, monochromatisch ist, und wir wollen daher zuerst die Erscheinnng in monochromatischem Lichte beschreiben.

Auch bei Anwendung monochromatischen Lichtes erscheint die Aureole, d. h. die Lichtquelle ist von einem hellen Scheine derselben Farbe wie sie selbst umgeben; dieser Schein ist von einem dunkeln Ring, dem ersten Minimum, begrenzt; es folgt nun der erste farbige Ring, natürlich in der Farbe der Lichtquelle, welcher wieder von einem dunkeln Ringe, dem zweiten Minimum, abgeschlossen erscheint u. s. w. Die farbigen Ringe liegen also zwischen zwei dunkeln, zwischen zwei Minima; ihre Helligkeit nimmt von dem der Lichtquelle näherliegenden Minimum zu bis zu einem Maximum, von wo sie bis zum nächsten Minimum wieder abnimmt. Wir haben daher ebenso gut ein erstes, zweites, drittes u. s. w. Maximum, wie ein erstes, zweites u. s. w. Minimum; nur ist das erste Maximum in der Mitte der ganzen Beugungserscheinung selbst gelegen, das zweite Maximum fällt in den ersten Ring u. s. w. Die Intensität der Maxima nimmt sehr rasch ab, so dass selten auch nur vier helle Ringe zur Erscheinung gelangen.

Die Formel, welche die Theorie für die Intensität liefert, ist[1]):

1) Verdet-Exner, Wellentheorie des Lichtes S. 206.

$$J = \pi^2 r^4 \left[1 - \frac{m^2}{2} + \frac{m^4}{(1\cdot 2)^2\cdot 3} - \frac{m^6}{(1\cdot 2\cdot 3)^2\cdot 4} + \frac{m^8}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)^2\cdot 5}\cdots\right]$$

worin $m = \frac{r\,\pi \sin R}{\lambda}$

also:

$$\sin R = \frac{m}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{r}. \qquad (1$$

Hierin bedeutet R den Radius des gemessenen Punktes der Erscheinung in Graden, λ die Wellenlänge des angewandten Lichtes und r den Halbmesser der lichtbeugenden Theilchen. Dies ist die richtige Formel, welche die ganze Erscheinung und den Zusammenhang zwischen R und r darstellt.

Um diese Formel benützen zu können, muss m berechnet werden. Da m für jeden Punkt der Erscheinung verschieden ist, man andrerseits aber den Werth desselben nur für jene Punkte oder Ringe zu kennen braucht, deren Radien man misst, so möge m, unter der Voraussetzung, dass man gewöhnlich doch nur die Radien der Minima oder der Maxima messen wird und messen kann, nur für die Minima und Maxima hier angegeben werden.

Aus diesen Werthen ist dann der Factor $\frac{m}{\pi}$ für die gleichen Fälle berechnet worden. Ich theile denselben nach Verdet[1]) mit, und setze bei den Maxima die entsprechenden Intensitäten daneben, um zu zeigen, wie rasch die letzteren abnehmen:

	$\frac{m}{\pi}$		$\frac{m}{\pi}$	Intensität
Erstes Minimum . . .	0,610	Erstes Maximum . . .		1
Zweites „ . . .	0,116	Zweites „ . . .	0,819	0,01745
Drittes „ . . .	1,619	Drittes „ . . .	1,338	0,00415
Viertes „ . . .	2,120	Viertes „ . . .	1,847	0,00078

1) Schwerd hat (Beugungserscheinungen Seite 70) für die Minima diese Werthe bestimmt, Airy (Cambridge Thil. Transactions Bd. V. p. 283) dann Knochenhauer (Undulationstheorie des Lichtes. Seite 24) gaben die vollendete Theorie und berechneten auch für die Maxima die Werthe von m. Es ist nicht überflüssig die von Knochenhauer gegebenen Zahlen hieher zu setzen, sie sind:

Maxima	0°		147,5°		240,0°		332,5°
Minima		109,8°		200,9°		291,4°	

Knochenhauer hat also die Werthe von m in Graden angegeben; zur Berechnung von $m:\pi$ müssen sie in Bögen rückverwandelt werden. Verdet (Annales de Ch. et de phys. 3. Ser. Bd. 34. p. 136) und mit ihm Andere, z. B. Riggenbach (Beobachtungen über die Dämmerung u. s. w., Verhandl. d. naturf. Ges. Basel 1886, Seite 15) haben die Knochenhauer'schen Zahlen ohne Decimalkomma als Verhältnisszahlen angegeben, nach welchen die Grösse der Radien der Maxima und Minima zunehmen. Diese Bemerkung soll etwaige Missverständnisse beseitigen.

Für die Minima gilt nach K. Exner[1]) die Näherungsformel

$$\frac{m}{\pi} = \frac{n + 0{,}22}{2}$$

also

$$\sin R = (n + 0{,}22)\frac{\lambda}{2r}; \quad n = 1, 2, 3 \ldots \qquad \text{(II}$$

Die Ableitnng dieser Formeln gilt eigentlich für eine kreisförmige Oeffnung, oder ein rundes Theilchen. Es ist aber schon von Fraunhofer ausgesprochen und von Verdet streng bewiesen worden, dass die Erscheinung, wie sie durch zahlreiche unregelmässig vertheilte runde Theilchen hervorgerufen wird, vollständig mit der einer einzigen kreisförmigen Oeffnung übereinstimmt; nur die Intensität wird durch die Vermehrung der Theichen gesteigert.

Die Fraunhofer'schen Formeln sind also durch die andere zu ersetzen:

$$\sin R = \frac{m}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{r}$$

oder mit genügender Annäherung für die Minima:

$$\sin R = (n + 0{,}22)\frac{\lambda}{2r}$$

Diese Formeln gelten auch für weisses Licht. Auch das weisse Licht ruft die Erscheinung so hervor, wie das monochromatische, in Bezug auf Maxima und Minima, wenn dabei auch verschiedene Farben in Erscheinung treten. Es ist leicht aus der Analogie mit den monochromatischen Ringen zu erkennen, dass das erste Minimum bei von weissem Lichte erzeugten Fraunhofer'schen Ringen mit dem äusseren Rande des rothen Saumes der Aureole zusammenfällt; denn die Aureole würde wie beim monochromatischen Lichte einfach von der Farbe der Lichtquelle sein, wenn die bei weissem Lichte erfolgende Auflösung in die Farben durch die Uebereinanderlagerung der letzteren in der Aureole vollständig wieder aufgehoben würde; da jedoch roth, bei der Auflösung in Farben durch Beugung, am entferntesten von der Lichtquelle zu liegen kommt, so muss die Aureole roth gesäumt erscheinen, weil am Rande derselben über das Roth keine anderen Farben mehr gelagert erscheinen können. Die Aureole bei Anwendung mit weissem Lichte muss daher als weisslich heller Schein mit rothem Saume erschienen. Da nun das erste Minimum da liegt, wo die Aureole endet, so fällt bei Anwendung von weissem Lichte das erste Minimum mit dem äusseren Rande des rothen Saumes der

1) Wiener Akad. Ber. 76. Bd. II. Abth. 1877 (Septeratabdruck S. 4).

Aureole zusammen. Hierin liegt der Grund, warum es inkorrekt ist, den rothen Saum der Aureole als ersten Ring zu bezeichnen; der erste Ring kann nur zwischen dem ersten und zweiten Minimum liegen. Das zweite Minimum wird aber mit dem äusseren Rande des rothen Saumes des ersten Ringes zusammenfallen u. s. w.

In die Formel muss man auch in Folge dessen bei Berechnung Fraunhofer'scher Ringe, die durch weisses Licht entstanden, für λ die Wellenlänge des weissen Lichtes einführen. Das ist nun allerdings so geradeweg etwas unmögliches, da das weisse Licht eine Mischung von Licht aller Wellenlängen ist. Es hat aber schon Schwerd (Beugungserscheinungen Seite 71), bei Gelegenheit der Berechnung der Versuche Fraunhofer's nach der richtigen Formel, die Bemerkung gemacht, dass man, wenn die Radien der rothen Ringe (immer verstanden des äusseren Randes der rothen Ringe) gemessen wurden für λ die Wellenlänge 0,00057 einführen müsse. Er verweist zur Begründung auf die Messungen Fraunhofer's [1]), aus welchen er das Gesetz der Abstände der rothen Ränder des Beugungsbildes einer Spalte von der Mitte des Bildes ableitete. Er fand dafür die Formel:

$$L_1 = \frac{0{,}00057}{d}, \quad L_2 = 2 \cdot \frac{0{,}00057}{d} \text{ u. s. w.}$$

Auch hier sind die äusseren Ränder der rothen Streifen als Minima des weissen Lichtes aufzufassen, und so ersieht man aus der von Fraunhofer hiefür gefundenen Formel, dass als „Wellenlänge des weissen Lichtes“ eine mittlere Wellenlänge von 0,00057 mm einzuführen ist. Schwerd berechnete also mit dieser Wellenlänge und der richtigen Formel Fraunhofer's Versuche über die Fraunhofer'schen Ringe und fand Rechnung und Messung auf das beste übereinstimmend. Später hat Verdet [2]) es neuerdings ausgesprochen, dass bei durch weisses Licht erzeugten Fraunhofer'schen Ringen die Minima des weissen Lichtes mit den äusseren Rändern der rothen Ringe zusammenfallen und dass daher bei Berechnung der Erscheinung aus den gemessenen Radien der rothen Ringe nach Formel (I) oder (II) für λ die Wellenlänge des „mittleren weissen Lichtes“ einzuführen sei. Es möchte nun wohl scheinen, dass streng genommen als mittlere Wellenlänge des weissen Lichtes 0,00055 mm zu nehmen sei; und in der That wurde seit der citirten Bemerkung Verdet's dieser Werth angenommen und wiederholt zu Rechnungen verwendet. Allein das

1) Schuhmacher's astronomische Abhandlungen a. a. O. S. 52.

2) Sur l'explication du phenomène des couronnes. Ann. d. chim. et d. phys. 3. Ser. 34. Bd. p. 137. — Schwerd's Bemerkung und Berechnung der Fraunhofer'schen Versuche scheint in Vergessenheit gerathen zu sein. Aus unserer Darstellung geht hervor, dass Schwerd die Priorität der fraglichen Erklärung gebührt.

Experiment verlangt den Werth 0,00057. Dies beweisen die Messungen Fraunhofer's, deren Genauigkeit über allen Zweifel erhaben ist; aber auch in neuester Zeit wurde Donle[1]) durch seine eigenen Messungen an Fraunhofer'schen Ringen zum Werthe 0,00057 geführt.

Wir haben noch eine Bemerkung zu machen über das Verhältniss der Breite der Ringe zum Radius der Aureole. Unter Breite der Ringe verstehen wir den Abstand zweier Minima, unter Radius der Aureole den Radius des ersten Minimums. Wir können aus der oben angeführten Tabelle ersehen, dass die Breite der Ringe nur sehr wenig abnimmt und dieselbe für den ersten, zweiten u. s. w. Ring ausgedrückt werden kann durch die Zahlen 0,506, 0,503, 0,501 u. s. w., während der Radius des ersten Minimums (Aureole) durch die Zahl 0,610 dargestellt ist. Es muss daher stets der Radius der Aureole um etwa ein Fünftel grösser sein als die Breite der Ringe.

Bisher haben wir die Erscheinung in ihrer vollen Ausbildung betrachtet. So tritt sie aber nur auf, wenn die lichtbeugenden Theilchen alle von der gleichen Grösse sind. Sobald dies nicht der Fall ist, so bilden sich die Ringe nicht so vollkommen aus, und ihre Lichtintensität wird sehr geschwächt; bei zunehmender Ungleichheit der Theilchen werden die Ringe unsichtbar und nur die Aureole bleibt noch merklich. Es ist daher die Aureole allein die unvollkommenste Entwicklung der Erscheinung. Bei Anwendung weissen Lichtes wird also die Erscheinung in ihrer unvollkommensten Art nur der helle weisse Schein unmittelbar um die Lichtquelle mit seinem rothen Saume sein, d. h. die Aureole allein [2]).

Nach den bisherigen Auseinandersetzungen ist es von selbst klar, warum es als unkorrekt angesehen werden muss, den rothen Saum der Aureole als ersten Ring zu bezeichnen; Ringe sind eben von zwei Minima begrenzt, und das erste Minimum ist ja der äussere Rand des rothen Saumes der Aureole [3]).

---

1) Wiedemann Analen 34. (1888) S. 809.

2) Ich verweise diejenigen, welche noch eingehender die Fraunhofer'schen Ringe studieren wollen, auf drei Abhandlungen von Carl Exner: „Ueber die Fraunhofer'schen Ringe, die Quetelet'schen Sreifen und verwandte Erscheinungen". Wiener Sitzber. d. Ak. 76. Bd. II. Abth. 1877 und „Ueber die durch zahlreiche unregelmässig vertheilte Körperchen hervorgebrachten Beugungserscheinungen". Ebenda 90. Bd. II. Abth. 1884 und „Uber die kleinen Höfe und die Ringe behauchter Platten". Ebenda 98. Bd. II. Abth. 1889. Carl Exner hat diese und die verwandten Erscheinungen am erschöpfendsten behandelt.

3) Sobald man diese unkorrekte Bennenung auf die monochromatischen Fraunhofer'schen Ringe beziehen will, wird man der Unrichtigkeit derselben sofort bewusst. Es ist daher auffallend, dass Donle (a. a. O. p. 806), trotzdem er durchwegs die richtige Darstellung der Erscheinung aufrecht hält, dennoch den rothen Saum als ersten Ring bezeichnet wissen will.

Aus dem Vorhergehenden ist es nun leicht, den Bishop'schen Ring zu klassificiren: er ist einfach der rothe Saum der Aureole einer wegen der zu grossen Ungleichheit der lichtbeugenden Körperchen auf die Aureole allein reducirten Fraunhofer'schen Ringerscheinung.

Da es wiederholt vorkommt, dass man den Bishop'schen Ring als ersten Ring auffasst, so diene zur Widerlegung dieser Ansicht der Hinweis auf folgende zwei Punkte:

Jede Fraunhofer'sche Ringerscheinung, in ihrer reducirtesten Art, zeigt die Aureole mit dem rothen Saume (wenn weisses Licht sie erzeugt); dieser letztere muss daher beim Bishop'schen Ring vorhanden gewesen sein. Da aber nur ein rother „Ring" sichtbar war, so muss dies der rothe Saum der Aureole gewesen sein.

Ueberdies wissen wir, dass der Radius der Aureole um ein Fünftel grösser sein muss, als die Breite des ersten Ringes. Wäre der rothe Saum beim Bishop'schen Ringe als erster Ring aufzufassen, so wäre die Breite des ersten Ringes grösser gewesen als der Radius der Aureole, was unmöglich ist [1]).

Die beträchtliche Breite des rothen Saumes (12⁰) mag einigermassen auffallen. Doch wird man hierfür leicht eine Erklärung finden. Zunächst muss der rothe Saum schon an und für sich eine grosse Breite aufweisen, da der erste Ring einer Fraunhofer'schen Ringerscheinung, deren Aureole einen Radius von 22⁰ hat, wenn er sichtbar gewesen wäre, eine Breite von 18⁰ gehabt hätte; von dieser Breite wären etwa 6⁰ roth gewesen. Wenigstens so breit wäre also der rothe Saum selbst dann, wenn alles gleich grosse Theilchen die Erscheinung hervorgerufen hätten. Die Ungleichheit der Theilchen musste aber eine noch grössere Breite des rothen Saumes bewirken, wie dies eine einfache Ueberlegung lehrt.

Nachdem wir so festgelegt haben, wie und als was der Bishop'sche Ring aufzufassen ist, können wir nun leicht die Grösse, d. h. den Durchmesser der denselben erzeugenden Theilchen berechnen.

Die Messungen der Radien des Bishop'schen Ringes ergaben im Mittel:

	nach Archibald [2])	nach Riggenbach [3])
Innerer Radius des rothen Saumes	10⁰ 30′	10⁰
Aeusserer „ „ „ „	22⁰ 45′	22⁰

1) Aeusserer Radius des Bishop'schen Ringes 22⁰, innerer Radius 10⁰, Breite des Ringes 12⁰.

2) The Eruption of Krakatoa p. 237 und 257.

3) Beobachtungen über Dämmerung u. s. w. Verhandl. der naturf. Ges. Basel 8. Theil I. Heft S. 8.



Da die Lichtquelle die Sonne war, diese aber selbst einen Radius von 15' hat, so sind diese 15 Minuten von obigen Zahlen abzuziehen. Da ferner der äussere Rand des Bishop'schen Ringes dem ersten Minimum entspricht, so können wir nur mit dem Radius des letzteren eine strenge Rechnung führen. Wir haben also

$$\sin 22^0\, 30 = 1{,}22\, \frac{0{,}00057}{d}$$

Daraus erhält man $d = 0{,}00182$ mm.

Setzt man für R den Werth nach Riggenbach, so erhält man

$$d = 0{,}00188 \text{ mm.}$$

Im Mittel also

$$d = 0{,}00185 \text{ mm.}$$

Dies sind die Durchmesser der kleinsten Theilchen, welche zur Bildung des Bishop'schen Ringes beitrugen.

Den Durchmesser der grössten Theilchen, welche dabei mitwirken, zu erfahren, ist uns mit Sicherheit nicht möglich. Wir können aber eine Supposition machen, die nicht unwahrscheinlich ist und wodurch wir wenigstens einen angenäherten Werth dafür finden können. Nehmen wir an, die Breite des rothen Saumes, welcher von den grössten Theilchen hervorgerufen wurde, wäre derart gewesen, dass sich ein Radius der Aureole von 12° ergäbe, so finden wir für den Durchmesser der grössten Theichen, welche bei Erzeugung des Bishop'schen Ringes mitwirkten

$$d_1 = 0{,}00342$$

also fast doppelt so gross als der der kleinsten Theilchen.

Nachdem wir so in richtiger Weise die Berechnung geführt, sei mir gestattet über die Berechnung Anderer ein paar Worte zu sagen. Es sind mir überhaupt nur drei Berechnungen der Durchmesser der den Bishop'schen Ring erzeugenden Theilchen bekannt geworden:

Flögel[1])	0,00106 mm.
Forel[2])	0,003 mm,
Archibald[3])	0,00159 mm.

Flögel sagt zur Begründung seiner Rechnung nur: „Wird das Maximum des Roth auf 15° gesetzt und angenommen, es entspreche der Auslöschung der helleren Theile des Spektrums (Wellenlänge 0,00055 mm.), so müssten die den Ring hervorrufenden Theilchen 0,00106 mm gross sein.“ Nach dieser Bemerkung zu schliessen, möchte

1) Schriften des naturwissenschaftlichen Vereins für Schleswig-Holstein Bd. V 1884, S. 133. (Separatabdruck.)

2) Archives de Sciences 12. Band 1884 p. 182.

3) The Eruption of Krakatoa p. 257.

man meinen, dass Flögel mit der richtigen Formel gerechnet habe. Mittels derselben erhielte man, wenn man Flögel's irrthümliche Supposition, dass der hellste Theil des Bishop'schen Ringes dem Minimum des weissen Lichtes entspreche, nur zur Controle der Rechnung acceptirte, $d = 0{,}00259$ mm. Nach welcher Formel Flögel gerechnet hat, ist nicht zu ersehen. Die Fraunhofer'sche Formel muss jedenfalls mit dem von Fraunhofer angegebenen Zahlenwerthen angewendet werden; dann gibt sie aber bei durch weisses Licht erzeugten Fraunhofer'schen Ringen auch richtige Resultate (in unserm Falle $d = 0{,}00182$ mm), vorausgesetzt, man setzt für den Radius den richtigen Werth, nämlich den Radius des äusseren Randes des Roth.

Forel sagt nur, dass Hagenbach-Bischoff unter der Annahme eines Durchmessers des rothen Ringes von 25^0, $d = 0{,}003$ mm fand. Da nach den von Forel angegebenen Werthen gerechnet wurde diese Werthe aber folgende sind: Radius des inneren Randes $7—10^0$, Radius der Mitte des Ringes $12—15^0$, Radius des äusseren Randes $18—22^0$, so ersieht man, dass der Radius der Mitte des rothen Saumes des Bishop'schen Ringes zur Rechnung herbeigezogen wurde. Dass einer solchen Rechnung eine irrthümliche Auffassung der ganzen Erscheinung zu Grunde liegt, ist aus allem Bisherigen deutlich.

Archibald benützt die richtige Formel, nämlich

$$\sin\frac{D}{2} = N\frac{\lambda}{d}.$$

Er macht aber die Bemerkung: „Indem ich als mittleren Werth der Durchmesser des inneren und des äusseren Randes des Ringes 21^0 und $45^0\ 30'$ annehme, und voraussetze, dass der erstere die Lage des hellen violetten, der letztere des rothen Ringes bestimmt, erhalte ich folgende Resultate."

Welche Auffassung des Ringphänomens dieser Supposition zu Grunde liegt, ist nicht leicht ausfindig zu machen. Dass dieselbe unhaltbar ist, geht aus unserer ganzen Auseinandersetzung hervor. Es sei aber darauf hingewiesen, dass bei den Fraunhofer'schen Ringen durch die Vermehrung der sie erzeugenden Theilchen nur die Intensität gesteigert wird, nicht aber, wie bei der Vermehrung der Spalten, eine immer grössere Trennung der Farben erreicht wird. Bei den Spalten erreicht man schliesslich ein reines Spektrum, durch Vermehrung der runden Oeffnungen oder Theilchen nie; die Fraunhofer'schen Ringe geben immer nur Mischfarben.

Archibald setzte also für den inneren Radius $\lambda = 0{,}00039$ (violettes Licht) für den äusseren Radius $\lambda = 0{,}00076$ (äusserstes Roth). Er ging konsequent noch weiter und setzte die der hellsten Stelle des

Ringes (Radius 15° 10′) entsprechende Wellenlänge 0,00055 mm. Für die Berechnung aller drei gewählten Punkte benützte er aber überdiess dieselbe Konstante N 0,7655. Diese Konstante entspricht aber nur dem Falle wo $d > D$, aber auch dann nur für das erste Minimum; für $d > D$ wurde dieselbe von Airy (Philosoph. Magazine 3. Ser., 18. Bd., p. 1) und wohl nur angenähert richtig berechnet für den Bishop'schen Ring, wo D so ausserordentlich grösser ist als d kann dieselbe unter keiner Bedingung Anwendung finden.[1])

Ich schliesse, indem ich der Hoffnung Ausdruck gebe, dass vielleicht durch diese Notiz eine Anregung gegeben werde, die kleinen Höfe von Sonne und Mond wieder mehr messend zu verfolgen, um über die Grösse der „Wolkenelemente" und ihre Veränderlichkeit u. s. w. bessere Kenntniss zu erhalten. Seit Kämtz sind meines Wissens keine solchen Messungen mehr gemacht worden oder nur höchst vereinzelte, und doch können wir gewiss nicht behaupten, dass diese Messungen überflüssig geworden seien — denn unsere Kenntnisse über die in der Atmosphäre schwebenden Wassertröpfchen vertragen noch manche Bereicherung.

---

1) Stokes schreibt mir, dass er nur aus Versehen diese Constante statt der richtigen (1,22), in Folge Verwechslung der Columnen in einer seiner Tabellen (Stokes mathematical und physikal papers I. Bd. S. 355), Archibald angegeben habe.

Zur Construction der Linsenformel.

Von

G. Füchtbauer.

Es gibt bekanntlich verschiedene geometrische Darstellungen der Linsenformel

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}\ ^{1)},$$

welche identisch ist mit der ihr bei der Entwicklung gewöhnlich vorausgehenden Proportion

$$(a + a') : a' = a : f \text{ oder } a : a' = (a - f) : f.$$

Auf eine derselben wurde kürzlich in dieser Zeitschrift [2]) durch die Herren A. Kurz und Haase aufmerksam gemacht. Sie besitzt den Vorzug, dass sie die in der Regel gesuchte Strecke, nämlich eine der conjugirten Bildweiten, sogleich an der gewünschten Stelle liefert; da sie sich ausserdem noch sehr vereinfachen lässt, so sei es gestattet, hier auf dieselbe zurückzukommen.

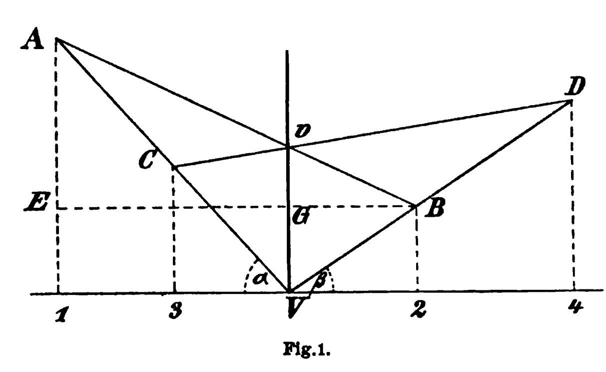


Fig. 1.

Sind (Fig. 1) *1* und *2* conjugirte Bildpunkte der Linse *V* auf deren Axe, *3* ein Objectpunkt derselben, zu welchem der zugehörige Bildpunkt zu finden ist, so errichte man in *1*, *3* und *2* Lote zur Axe, welche die beliebig durch *V* gezogenen Strahlen *VA* und *VD* in *A*, *C* und bezw.

---

1) H. d'Ocagne und Häbler, Hoffmann's Zeitschrift 1886. H. Grabb, Praktische Physik 1889 S. 81. Häbler, Praktische Physik 1889 S. 122. K. Schellbach, Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, 1890 S. 12.

2) Band 25, S. 759 und 760.

B schneiden, ziehe AB und durch dessen Schnittpunkt v mit dem in V errichteten Lot die Gerade CvD, so schneidet das von D auf die Axe gefällte Lot dieselbe in dem zu 3 conjugirten Bildpunkt 4.

Zum Beweise lasse man zunächst $3,4$ beiseite und ziehe BE parallel zur Axe. Nach der Eingangsformel ist nun für die conjugirten Bildpunkte $1,2$ die Strecke $1V$ mit a, $V4$ mit a' zu bezeichnen; Vv sei $= h$, die Winkel der Strahlen VA und VB mit der Axe seien bezw. α und β.

Dann ist

$$BE : BG = AE : vG,$$

oder

$$(a + a') : a' = (a \cdot \operatorname{tg} \alpha - a' \operatorname{tg} \beta) : (h - a' \cdot \operatorname{tg} \beta),$$

oder auch

$$a : a' = (a \cdot \operatorname{tg} \alpha - h) : (h - a' \operatorname{tg} \beta),$$

woraus folgt

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{h}.$$

Demnach ist die Brennweite der fraglichen Linse

$$f = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta},$$

ferner

$$h = f(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta),$$

also Vv constant in Bezug auf a und a'.

Für die conjugirten Punkte 3 und 4 muss daher CD ebenfalls durch v gehen.

Die Construction kann, ohne unausführbar zu sein, dadurch vereinfacht werden, dass man einen der beiden willkürlichen Winkel α oder β gleich Null nimmt. Wird z. B. $\alpha = 0$ und sind (Fig. 2) wieder 1 und 2 conjugirte Bildpunkte der Linse V, so ziehe man zunächst $2B$ senkrecht zur Axe und alsdann die Gerade $B1$, welche das in V errichtete Lot in v schneidet. Dann ist, wenn wieder $1V$ mit a, $V2$ mit a', Vv mit h bezeichnet wird, ersichtlich

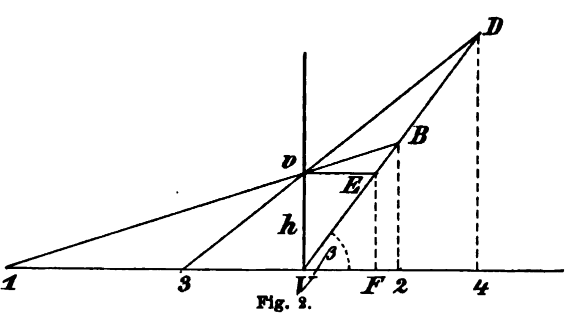


Fig. 2.

$$(a + a') : a = a' \cdot \operatorname{tg} \beta : h$$

oder

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{h}.$$

Es ist also die Brennweite

$$f = \frac{h}{\operatorname{tg} \beta}$$

und h für je zwei andere conjugirte Bildpunkte das gleiche. Ist demnach *3* ein Objectpunkt, so ziehe man die Gerade $3v$, welche VB in D schneidet und fälle von D das Lot $D4$ zur Axe; dann ist *4* der *3* zugeordnete Bildpunkt.

Man bemerkt, dass vE, welches parallel zur Axe gezogen ist, die Brennweite f der Linse darstellt. Die Projection F des Punktes E auf die Axe ist der Brennpunkt, und es ist ersichtlich, dass man zu demselben Punkt als Bildpunkt geführt wird, wenn man auf der Axe einen Objectpunkt im Unendlichen annimmt.

Am einfachsten gestaltet sich die Construction, wenn man $\alpha = 0$ und $\beta = 45^0$ annimmt. Denn in diesem Falle ist $h = f$. Man hat also (Fig. 3) lediglich $Vv = f$ zu machen, den gegebenen Objectpunkt *1* mit v durch eine Gerade zu verbinden und von deren Schnittpunkt B mit dem unter 45^0 zur Axe gezogenen Strahl das Lot $B2$ auf diese zu fällen, um den conjugirten Bildpunkt *2* zu erhalten.

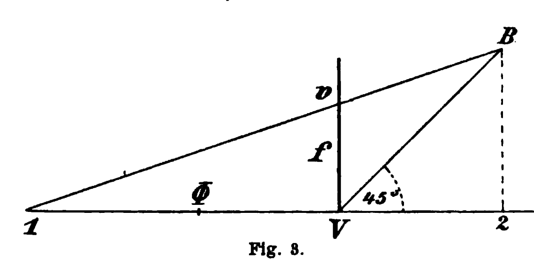


Fig. 3.

Es ist leicht bemerklich, dass die Rückwärtsverlängerung des Strahles VB zum Schnitte mit $1\,V$ kommt, wenn der Objectpunkt *1* innerhalb der vorderen Brennweite der Linse liegt. Für eine Concavlinse aber ist diejenige Richtung des durch V gelegten Strahles, welche im Sinne des durch die Linse gegangenen Lichtes verläuft, so zu nehmen, dass sie mit der senkrecht zur Axe aufgetragenen Zerstreuungsweite Vv einen stumpfen Winkel von 135^0 bildet. So stellt z. B. Fig. 4 den Fall des Galilei'schen Oculares dar, worin *1* der negative Objectpunkt, *2* sein conjugirter Bildpunkt ist. Insoferne man sich AVB als den (schematischen) Hauptstrahl eines Punktes A denken kann, stellen

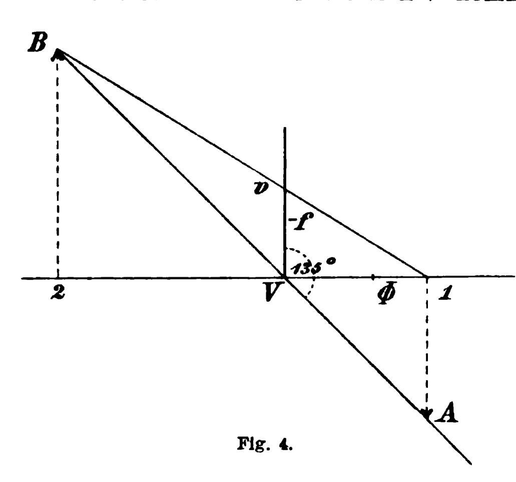


Fig. 4.

1 A und *2 B* sogleich auch die relativen Lagen- und Grössenverhältnisse leuchtender Linien in den zur Axe senkrechten conjugirten Bildebenen dar.

Die Fig. 5 zeigt eine Anwendung unserer Betrachtungen zur Aufsuchung der Brennweite φ einer Doppellinse, welche aus zwei unendlich dünn gedachten, dicht aneinander liegenden Linsen zusammengesetzt ist. Die Brennweiten dieser letzteren seien f und f'. VF sei die Axe, Vv' die Mittelebene derselben, $VF = f$, so dass F der Brennpunkt der ersten gegebenen Linse, $Vv' = f'$. Man ziehe die Gerade Fv', welche den unter 45° zur Axe gezogenen Strahl in B schneidet, und fälle die Senkrechte $B\Phi$ zur Axe. Dann ist Φ der Brennpunkt, $V\Phi = \varphi$ die Brennweite der Combination, was sofort einleuchtet, wenn man durch F eine Senkrechte und durch deren Schnittpunkt mit VB eine Parallele zur Axe zieht.

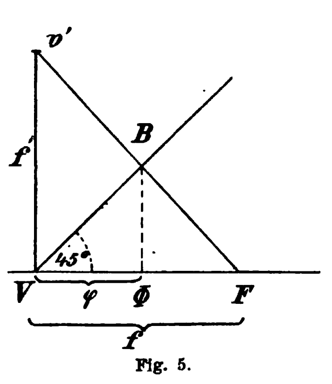


Fig. 5.

Die Aehnlichkeit der Dreiecke FVv' und $F\Phi B$ macht ersichtlich, dass

$$f : \varphi = f' : f' - \varphi$$

oder

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'}.$$

Auch beliebige conjugirte Bildpunkte lassen sich in gleicher Weise leicht bestimmen. So stellt Fig. 6 die Combination aus einer Convex- und einer Concavlinse dar, deren Brennweiten bezw. f und f' sind. *1* ist ein beliebiger Objectpunkt, *2* sein Bildpunkt in Bezug auf die Convexlinse, *2'* der conjugirte Bildepunkt des Systems. Verbindet man noch B' mit *1*, so wird auf Vv die Brennweite der combinirten Linse abgeschnitten.

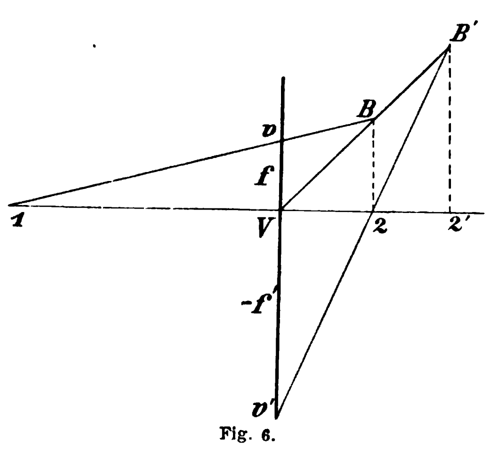


Fig. 6.

Für irgend ein System centrirter und brechender Kugelflächen gilt bekanntlich die Gleichung

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1,$$

worin f und f' die beiden auf die Hauptpunkte V und V' des Systems bezogenen Brennweiten desselben, a und a' die auf dieselben Punkte bezogenen conjugirten Bildweiten sind. Um zu dem Objectpunkt *1* (Fig. 7) den conjugirten Bildpunkt zu finden, trage man in V und V' senkrecht zur Axe die Brennweiten $Vv = f$, $V'v' = f'$ auf,

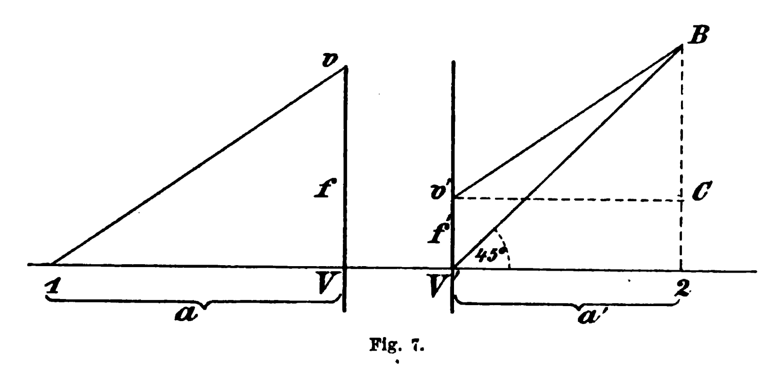


Fig. 7.

ziehe $1v$ und durch v' eine Parallele dazu, welche den unter 45° zur Axe gezogenen Strahl in B schneidet. Die Senkrechte zur Axe $B2$ schneidet diese in dem zu *1* conjugirten Punkt *2*. Denn es geben die ähnlichen Dreiecke $1Vv$ und $v'BC$:

$$a : f = a' : a' - f',$$

oder

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1.$$

Ein neues Element der Verdampfungswärme.

Von

K. Fuchs.

(Ergänzung des Artikels „Ueber Verdampfung". Exners Repertorium 1888 S. 141.)

In einem geschlossenen Gefässe befinde sich Wasser und gesättigter Dampf. Es herrscht dann Gleichgewicht, wenn der Druck in jedem Punkte gleich dem äusseren Drucke ist. Nun übt das Wasser, nach V. d. Waals als Gas aufgefasst, durch die Wärmebewegung der Moleküle, also unabhängig von der Cohäsion, nach dem rectificirten Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze den Druck aus

$$\frac{at}{v-b}$$

wobei t die absolute Temperatur, und v das Volumen der Masseneinheit von Wasser bedeutet; b ist bekanntlich ein Aequivalent des Molecularvolumens.

Dieser calorische Druck wird nun durch die Cohäsion vermindert um den Betrag

$$\frac{c}{v^2}$$

Hier bedeutet c, wie ich wiederholt nachgewiesen zu haben glaube:

1. die Arbeit, welche die Molecularkräfte leisten, wenn die Moleküle der Masseneinheit Wasser aus unendlicher Zertrennung in eine Volumeinheit zusammentreten,

2. den Binnendruck, den die Cohäsion erzeugt, wenn die Masseneinheit Wasser die Volumeinheit ausfüllt.

Es herrscht also Gleichgewicht, wenn gilt

$$\frac{at}{v-b} - \frac{c}{v^2} = p. \qquad \text{(I}$$

Diese Gleichung enthält drei Constanten a, b, c (wenn man per nefas b als Constante ansehen will), und drei Variable: t, v, p. Sie

gibt also noch nicht den Zusammenhang von Temperatur t, Dampfdichte $1/v$ und Dampfspannung p.

Diese erste Fundamentalgleichung wird durch eine zweite Fundamentalgleichung ergänzt. Wir können nämlich den Satz aussprechen:

Die Verdampfung hört auf, wenn die Arbeit, welche durch die Ausdehnung der Masseneinheit Wasser bei constanter Temperatur, also unter Wärmezufuhr, von der Flüssigkeitsform bis zur Dampfform entwickelt wird, gerade hinreicht, die Cohäsion und den äusseren Druck p zu überwinden.

Nun ist die Arbeit, welche durch die Expansion bei constanter Temperatur geleistet wird, offenbar gleich

$$E = \int_{v_1}^{v_3} \frac{a\,t}{v - b} \cdot d\,v.$$

Hier bedeutet v_1 das Volumen der Masseneinheit Wasserflüssigkeit und v_3 das Volumen der Masseneinheit gesättigten Wasserdampfes. Wenn b wirklich constant wäre, dann könnte man integriren und fände die Arbeit

$$E = \log_n \left(\frac{v_3 - b}{v_1 - b}\right)^{a\,t}.$$

Der Druck, den die Cohäsion beim Volumen v erzeugt, ist gegeben durch c/v^2. Die Arbeit, die durch Ueberwindung der Cohäsion geleitet wird, ist also

$$\int_{v_1}^{v_3} \frac{c}{v} \cdot d\,v = - c\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_3}\right).$$

Endlich ist die äussere Arbeit gleich $p\,(v_3 - v_1)$. Die Verdampfung hört also auf und der Dampf ist gesättigt, wenn gilt

$$E = c\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) + p\,(v_3 - v_1). \qquad \text{(II}$$

Dies ist die zweite Fundamentalgleichung zwischen t, v und p. Beide Gleichungen vereint gestatten nun, sowohl die Dampfdichte $1/v$, als auch die Dampfspannung p als Function von t darzustellen.

Mit Ausnahme von c finden wir nun alle Grössen der Formel II in den Tabellen über Wasser und Wasserdampf bei verschiedenen Temperaturen. In den Tabellen finden wir nämlich unter dem Namen r die Verdampfungswärme, d. h. die Wärmemenge, welche bei der Verwandlung der Masseneinheit Wasser in die Masseneinheit Dampf verbraucht wird, indem sie die Arbeit E leistet. Wir brauchen nur r mit $W = 424$ zu multipliciren, um E zu erhalten; ja, wenn wir die

Grösse ϱ der Tabellen mit 424 multipliciren, finden wir sofort die Arbeit $E - p\,(v_2 - v_1)$, da ja $\varrho = r - A\,p\,u$ in der bekannten Bedeutung ist. Wir haben also zur Bestimmung von c die einfache Gleichung

$$424\,\varrho = c\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right).$$

Wenn wir nun c für mehrere Temperaturen berechnen, dann finden wir folgende auffallende, genügend genaue Tabelle

Temp. C.	c
0	244,5
20	238,4
40	234,4
60	231,5
80	229,8
100	225,8

Hierbei sind folgende Einheiten angenommen:

Masse: Kilogramm.
Druck: Kilogramm per Quadratmeter.
Volumen: Kubikmeter.
Arbeit: Meterkilogramm.
Wärme: Litercalorie.

Wenn also bei etwa 15° C 1 kg Wasser aus unendlicher Verdünnung in 1 cbm sich verdichtet, dann ist die Arbeit, welche die Molecularkräfte hierbei geleistet haben, gleich etwa 240 mkg. Wenn das Kilogrammm Wasser auf ein anderes Volumen v gebracht wird, dann ist die Bildungsarbeit nicht mehr c, sondern c/v. Wenn das Kilogramm Wasser also beispielsweise auf das Volumen von 1 l gebracht wird, in welcher Form es ja gewöhnlich erscheint, wenn also $v = 0{,}001$ ist, dann ist die Bildungsarbeit, welche beim Zusammentritt der Moleküle aus unendlicher Zerstreuung in 1 l durch die Cohäsion geleistet wird, etwa gleich 240000 mkg (oder es werden ca. 565 Calorien Wärme entwickelt), und der Binnendruck im Wasser beträgt 240000 kg per Quadratmeter oder 24 kg per Quadratcentimeter.

Worauf es uns jetzt ankommt, das ist lediglich der Umstand, dass die „Constante“ c mit steigender Temperatur immer kleiner wird; ein Umstand, der auch von anderer Seite und auf anderem Wege nachgewiesen worden ist; die absoluten Werthe von c sind uns also gegenwärtig ganz gleichgiltig. Nun lässt sich zeigen, dass c nicht kleiner werden kann, ohne dass durch diese Verkleinerung Wärme gebunden würde, und dieser Wärmeverbrauch zur Verkleinerung von c ist meines Wissens nach nicht behauptet worden.

Nehmen wir n Moleküle gleich der Maasseinheit in unendlicher Zerstreuung. Die Moleküle haben eine Cohäsionskraft von gewisser Intensität und infolge derselben leisten sie beim Zusammentritte aus der Dichte o zur Dichte ϱ eine gewisse Arbeit, welche bekanntlich der Dichte ϱ proportional ist und gegeben ist durch ϱc. Wenn nun bei dieser Sachlage die Cohäsionskräfte verschwinden, ohne dass zu dieser Vernichtung Arbeit erforderlich wäre, dann könnte man die kraftlosen Moleküle ohne Arbeit wieder unendlich zerstreuen und hätte somit den Anfangszustand. Wir hätten dann die Arbeit ϱc aus nichts gewonnen.

Wenn wir den Molekülen nun abermals ohne Arbeitsleistung die Cohäsionskräfte zurückgeben, die Moleküle verdichten, also Arbeit leisten lassen, und abermals ohne Arbeit die Kräfte vernichten, dann hätten wir nochmals die Arbeit ϱc aus nichts gewonnen.

Dies widerspricht dem Principe der Erhaltung der lebendigen Kraft und wir erkennen sofort das Postulat: um eine Kraft zu vernichten, müssen wir eben so viel Arbeit aufwenden, als sie bereits geleistet hat. Umgekehrt aber muss gelten: wenn wir in einem Moleküle eine anziehende Kraft schaffen, dann gewinnen wir so viel Arbeit, als erforderlich ist, die in den Bereich der Kraft fallenden Objecte herauszureissen.

Statt anzunehmen, dass eine vorhandene anziehende Kraft vermindert oder vernichtet wird, können wir auch annehmen, dass dem betreffenden Moleküle eine abstossende Kraft verliehen wird, welche die anziehende Kraft ganz oder theilweise paralysirt. Wir können dann sagen:

Wenn wir eine abstossende Kraft schaffen, dann verlieren wir so viel Arbeit, als diese Kraft leisten würde, wenn alle gegenwärtig in ihren Bereich fallenden Körper ausgeführt würden; wenn wir eine anziehende Kraft schaffen; dann gewinnen wir soviel Arbeit, als wir brauchen würden, alle gegenwärtig in ihren Bereich fallenden Körper auszuführen. — Eine anziehende oder abstossende Kraft zu schaffen, in deren Bereich gegenwärtig kein Körper fällt, erfordert auch keinen Arbeitsaufwand.

Wenn bei der Erwärmung des Wassers der Werth von c vermindert wird, dann bedeutet das, dass die Molecularkräfte der Moleküle vermindert worden sind. Hier empfiehlt es sich abermals, die von $r = r_1$ bis $r = r_2$ mit der stetig schwankenden Intensität $k = f(r)$ wirkende Cohäsion in Elementarkräfte aufzulösen, von denen jede nur von r bis $r + dr$ im Intervall dr mit der innerhalb dr constanten Intensität $k = f(r)$ vorkommt, (wobei Masseneinheit auf Masseneinheit wirkend gedacht ist). Ein Molekül von der Masse μ in einer Flüssigkeit von

der Dichte ϱ enthält innerhalb der Wirkungsschaale einer Elementarkraft vom Radius r die Flüssigkeitsmasse

$$\tfrac{4}{3}\pi\varrho r^3$$

Um diese Flüssigkeitsmasse wieder auszuführen, ist die Arbeit erforderlich

$$\mu\cdot\tfrac{4}{3}\pi\varrho r^3\cdot f(r)\,dr$$

wobei dr der Weg ist, über den die Masse geführt werden muss. Wenn aber die Kraft $f(r) = k$ vor der Ausführung um dk vermindert würde, dann wäre zur Ausführung nur mehr die Arbeit

$$\mu\cdot\tfrac{4}{3}\pi\varrho r^3\cdot(k - dk)\,dr$$

erforderlich. Im Sinne unserer obigen Ausführungen ist aber zur Erniedrigung der Intensität um dk der Arbeitsaufwand

$$\tfrac{4}{3}\pi\mu\varrho r^3\,dk\,dr$$

erforderlich. So viel Moleküle, als in der Volumeinheit enthalten sind, deren Gesammtmasse also ϱ ist, erfordern also zur Intensitätserniedrigung einen Kraftaufwand

$$\tfrac{4}{3}\pi\varrho^2 r^3\,dk\,dr.$$

Da wir aber jedes Molekül hierbei einmal als abstossendes, einmal als abgestossenes gerechnet, jede Wechselwirkung also doppelt gerechnet haben, so ist, wie wir bei allen ähnlichen Capillaritätsrechnungen gesehen haben, der richtige Werth die Hälfte der obigen, also

$$\tfrac{2}{3}\pi\varrho^2 r^3\,dk\,dr.$$

Die Aenderung aller Elementarkräfte von $r = r_1$ bis $r = r_2$ erfordert aber den Arbeitsaufwand

$$\tfrac{2}{3}\pi\varrho^2\int_{r_1}^{r_2} r^3\,dk\,dr.$$

Die Formel für eine Elementarkraft zeigt, dass die Aenderung einer Elementarkraft um so mehr Arbeit erfordert, je grösser ihr Radius r und je dichter die Flüssigkeit ist.

Somit scheint es nachgewiesen zu sein, dass die erfahrungsmässige Verkleinerung der Cohäsionsconstante c bei steigender Temperatur ein neuer Wärme verzehrender Factor ist.

Ueber Beobachtung der Schwebungen zweier Stimmgabeln mit Hilfe des Mikrophones [1]).

Von

Josef Tuma.

Ich will hier einen Apparat beschreiben, dessen Zweck es ist, zwei Stimmgabeln mittels elektrischer Tonübertragung vergleichen zu können. Es hat dies den Vortheil, dass die Stimmgabeln in einen vollkommen abgeschlossenen Raum gebracht werden können, wo man sie leichter, als dies bei den bisher üblichen Versuchsanordnungen möglich war, vor Temperaturänderungen zu schützen im Stande ist.

Es zeigte sich meine Methode besonders vortheilhaft bei der Untersuchung der Abhängigkeit der Tonhöhe einer Stimmgabel vom Luftdrucke, und ich werde die dabei gewonnenen Resultate am Schlusse der Arbeit mittheilen.

Mein Apparat besteht in einem für diesen Zweck construirten Mikrophon und einer elektrischen Anschlagevorrichtung.

I. Das Mikrophon.

Dasselbe ist ein Kohlenmikrophon nach dem Systeme Ader. Es besteht aus zwei festen Kohlenleisten A, Fig. 2, mit je fünf Lagern, in denen die Zapfen der fünf beweglichen Kohlenstäbe B ruhen. Die Leisten sind an dem Holzstücke M befestigt, welches ausserdem noch eine Klammer trägt, in die der Stiel der Gabel eingeklemmt ist.

Diese Klammer besteht zunächst aus einem Messingstücke, wie es in Fig. 3 gezeichnet ist. Es ist in der Mitte cylindrisch abgedreht und trägt an dem oberen Ende ein etwa 2 mm vorstehendes Schraubengewinde s. Der mittlere Theil a hat eine Höhe von 1,7 cm, einen Durchmesser von 2,4 cm und ist an zwei gegenüberliegenden Stellen seiner ganzen Höhe nach in einer Breite von 0,6 cm von rechteckigen Oeffnungen R durchbrochen. Unterhalb des Theiles a befindet sich

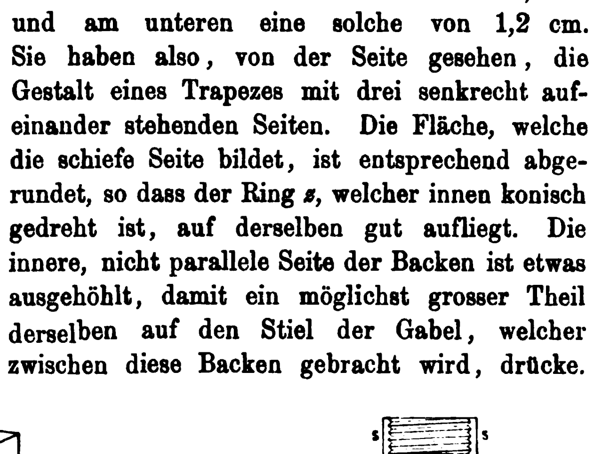
1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Wiener Akad. Bd. 98 (1889).



noch ein etwa 1 cm hoher sechseckiger Ansatz *P* für einen Schraubenschlüssel und ein weiterer etwa 1 cm langer mit einem Gewinde versehener Zapfen, mit welchem man das Ganze auf den Holzklotz *M* aufschrauben kann.

Schliesslich ist das Messingstück von oben bis in die gleiche Höhe mit den unteren Enden der Oeffnungen *R* und der oberen Fläche des Ansatzes *P* in einem Durchmesser von 1,5 cm ausgebohrt.

In die Oeffnungen *R* sind eiserne Becken *N* (Fig. 1 und 2) eingepasst. Diese haben an ihrem oberen Ende eine Breite von 0,5 cm und am unteren eine solche von 1,2 cm. Sie haben also, von der Seite gesehen, die Gestalt eines Trapezes mit drei senkrecht aufeinander stehenden Seiten. Die Fläche, welche die schiefe Seite bildet, ist entsprechend abgerundet, so dass der Ring *s*, welcher innen konisch gedreht ist, auf derselben gut aufliegt. Die innere, nicht parallele Seite der Backen ist etwas ausgehöhlt, damit ein möglichst grosser Theil derselben auf den Stiel der Gabel, welcher zwischen diese Backen gebracht wird, drücke.



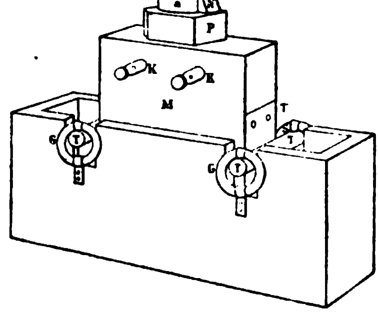




Fig. 1.

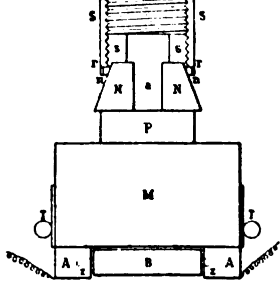


Fig. 2.

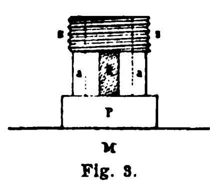
Der Ring *r* wurde in folgender Weise angefertigt. Zuerst wurde aus einer 4 mm starken Eisenplatte ein Ring von 3 mm Breite ausgedreht. Der innere Radius war gleich dem äusseren des mittleren Theiles *a* des oben beschriebenen und in Fig. 3 dargestellten Stückes. Die Innenfläche des Ringes wurde dann konisch gemacht, so dass sich dieselbe an die Rückenfläche der Backen *N* vollkommen anlegte. Hierauf wurde der Ring an zwei gegenüberliegenden Punkten durchschnitten, und nachdem die Backen *N* in die Oeffnungen *R* gebracht waren, in der in Fig. 2 angedeuteten Weise herumgelegt. Dann wurde über ihn noch ein dünner Messingring *n* geschoben, und hierauf die

einzelnen Theile des Ringes *r* mit dem Messingring *n* durch kleine Schrauben verbunden.

Ueber das Gewinde *s* kann man eine 2,5 cm hohe Schraubenmutter *S* bringen, die aussen sechseckig zugefeilt ist, so dass man sie mit einem Schraubenschlüssel anziehen kann.

Das ganze Mikrophon wird durch die Träger *T* und die elastischen Kautschukringe *G* (Fig. 1 und 2) getragen.

Will man also eine Stimmgabel in die Klammer einspannen, so schraubt man zunächst die Mutter *S* hinauf, schiebt den Ring *r* nach und drückt die Backen *N* auseinander. Dann bringt man den Stiel der Stimmgabel zwischen die Backen, aber so, dass das Ende des Stieles auf dem Boden der Bohrung aufsteht, und schraubt jetzt die Mutter *S* wieder herunter, bis der Stiel der Gabel von den Backen erfasst wird. Nun hält man den unteren Ansatz der Klammer *P* mit einem Schraubschlüssel fest und zieht mit einem zweiten die Mutter *S* nach Möglichkeit an.


Fig. 3.

Bei meinen ersten Versuchen hatte ich Telephone von sehr geringem Widerstand und ich schaltete sie mit dem Mikrophon in den Stromkreis einer Batterie von acht Daniell-Elementen. Die Stimmgabel mit dem Mikrophone und dem unten zu beschreibenden Anschlageapparat war in einer Kiste, die mit Baumwolle umhüllt war, möglichst wärmedicht eingeschlossen. Wurde das Mikrophon eine halbe Stunde lang von dem elektrischen Strome der acht Elemente durchflossen, so stieg die Temperatur in dem Kasten um $^1/_{10}$ ° C. Ich suchte daher die Intensität des Stromes, der das Mikrophon durchfliesst, so gering als möglich zu machen, was dadurch gelang, dass ich den Strom, welcher durch das Mikrophon fliesst, möglichst schwächte und ihn durch die primäre Spule eines Dubois-Reymond'schen Schlittenapparates schickte.

Die secundäre Spule verband ich mit dem Telephon. Diese Anordnung hatte noch den besonderen Vortheil, dass ich die Tonstärke unmittelbar nach dem Anschlage durch Ausziehen des Schlittenapparates abschwächen konnte, so dass das Gehör nicht durch dieselbe betäubt wurde. Bei Verwendung empfindlicher Telephone ist ein Daniell-Element vollkommen ausreichend. Nehmen wir dann an, dass der Widerstand der primären Spule gleich jenem der Telephone, die ich zuerst verwandte, sei, was auch ungefähr zutreffen mag, so ist die Intensität bei Anwendung eines Elementes $^1/_8$ jener bei acht Elementen, daher die in dem Mikrophone erzeugte Wärme $^1/_{64}$ der früheren, und in der That konnte ich bei Verwendung nur eines Elementes während eines einstündigen Stromschlusses keine Erwärmung im Kasten wahrnehmen.

II. Beschreibung des elektrischen Anschlageapparates.

Wie aus der vorangehenden Beschreibung des Mikrophones hervorgeht, ist bei meiner Anordnung die Befestigung der Stimmgabel keine starre. Würde man also dieselbe auf einer Seite mit einem Hammer anschlagen, so würde sie in eine pendelnde Bewegung gerathen, was leicht zur Entstehung von Nebengeräuschen im Mikrophon führen würde. Um dies zu verhüten, versuchte ich es, beide Zinken der Stimmgabel in entgegengesetzten Richtungen anzuschlagen, indem ich erwartete, dass sich dann die beiden nach entgegengesetzten Richtungen auf die Gabel wirkenden Kräfte insoweit aufheben werden, dass keine

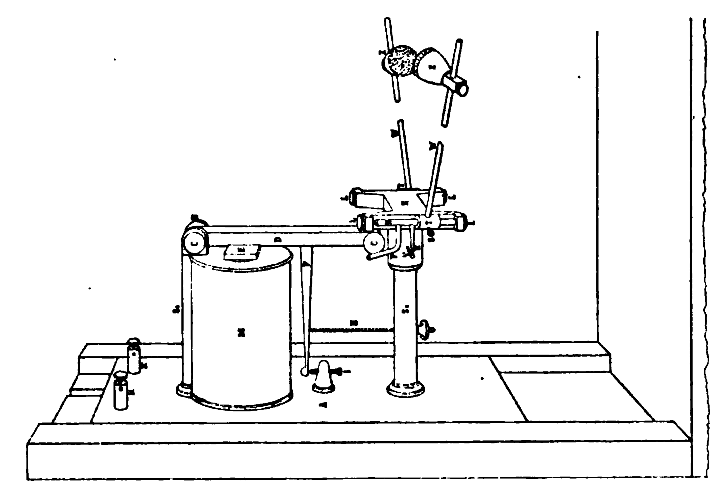


Fig. 4.

oder nur eine sehr geringe Ortsveränderung des Schwerpunktes der Stimmgabel zustande kommt, und lediglich eine momentane Deformation derselben übrig bleibt.

In der Praxis ist zwar ein absolut isochroner Anschlag durch zwei Hämmer nicht zu erreichen, es lehrten aber die Versuche, dass die Sache nicht so heiklich ist, nämlich insofern es sich darum handelt, die Bewegung des Schwerpunktes der Gabel zu verhindern. Es kommt aber hier noch ein zweiter Punkt in Betracht. Schlagen nicht beide Hämmer zu gleicher Zeit an, so kann es geschehen, dass die durch den Schlag des einen Hammers in Schwingungen versetzte Gabel durch den zweiten Schlag wieder zur Ruhe gebracht wird. Wie die Versuche lehrten, tritt dies sehr selten ein, und wenn es einmal vorkommt, so liegt ja kein Hindernis vor, den Anschlag zu wiederholen.

Die Construction des Apparates ist zwar aus Fig. 4 vollkommen klar ersichtlich, um aber deutlicher zu sein, will ich hier doch noch eine kurze Beschreibung desselben folgen lassen.

Auf dem Brette A ist zunächst eine Säule S_1 befestigt, welche an ihrem Ende ein gabelförmiges Lager B trägt. In diesem Lager ist mittels der Schrauben C der einarmige Hebel D befestigt, welcher zunächst den Anker E, dann den Ansatz F und an seinem Ende zu beiden Seiten je eine Schraube G trägt. Der Ansatz F ist in Verbindung mit der Zugspirale H und bildet zugleich mit der Schraube I eine Hemmung. Die Feder H dient dazu, um den Anker E von dem Elektromagneten M abzureissen, sobald der elektrische Strom unterbrochen wird, während die Hemmung I die Grösse der Distanz des Ankers vom Magnete bestimmt.

Weiter trägt das Brett A die Säule S_2, an deren Ende eine doppelt gabelförmig geschnittene Messingplatte K angebraucht ist. Diese Platte bildet durch ihre gabelförmigen Ausschnitte Lager, in welchen die Wellen N von den Schrauben L gehalten werden.

Mit diesen Wellen sind die Ansätze P und R fest verbunden. Der Ansatz P greift unter den Schraubenkopf G, so dass er von diesem mitgenommen wird, sobald der Magnet M den Anker E anzieht. Der andere Ansatz dient zur Befestigung der Zugspirale V, durch welche die Welle N wieder in ihre Ruhelage zurückgezogen wird. Ausserdem ist an der Welle N das durchbohrte cylindrische Messingstück T befestigt, welches den 25 cm langen Hammerstiel W trägt. Mit Hilfe der Schrauben s kann man die Hammerstiele verstellen. Die Hämmer Z endlich sind an ihren Stielen verschiebbar. Sie sind aus Holz gemacht, mit Blei ausgegossen und an ihrer vorderen Fläche mit Filz belegt. Das Brett A kann, wie es die Figur zeigt, in einer verticalen hölzernen Schiene höher oder tiefer gestellt werden, wodurch man die Hämmer, der Höhe der Stimmgabeln entsprechend, verstellen kann. Auf das horizontale Brett, welches die verticale Schiene trägt, wird das Gestell des Mikrophones festgeschraubt, und zwar so, dass die Achse der Klammer genau in der Symmetrieebene des Apparates liegt.

Will man den Apparat in Thätigkeit setzen, so spannt man zuerst die zu beobachtende Stimmgabel in die Klammer ein. Dann verschiebt man die Hämmer an ihren Stielen so lange, bis sie, wenn man sie ganz an die Gabel herandreht, voll auf die Zinken der Gabel treffen. Dann hebt man den ganzen Apparat in der verticalen Schiene so weit, dass der Anschlagepunkt etwa 2 cm unter die Enden der Zinken fällt. Nun schliesst man den Apparat mittels der Klemmschrauben k in den elektrischen Strom einer Batterie. Es wird jetzt der Anker E angezogen. Hierauf lüftet man die Schraude s des Stückes T und verstellt die Hammerstiele so, dass die Hämmer die Gabel eben nicht mehr

berühren, worauf man die Schrauben *S* wieder anzieht, und nun die Beobachtung beginnen kann.

Ich habe bei meinen Untersuchungen zur Bewegung zweier solcher Anschlageapparate, die hintereinander geschaltet waren, sechs Daniell-Elemente verwendet. Doch würden sich, da nur ein momentaner Stromschluss nöthig ist, für dauernden Betrieb Leclauché-Elemente besonders gut eignen.

III. Einige Beobachtungen über den Einfluss des Luftdruckes auf die Tonhöhe der Stimmgabeln.

Um diese Untersuchungen anstellen zu können, kürzte ich zunächst die Hammerstiele an dem einen meiner Anschlageapparate. Dafür befestigte ich an jedem Stiel noch mehrere Messingstücke, um das Trägheitsmoment zu vergrössern.

Hierauf brachte ich diesen Apparat sammt dem Mikrophon auf einen grossen Luftpumpenteller, auf welchen ich beide mit Klebwachs befestigte.

Hierzu fügte ich ein in Fünftelgrade getheiltes Thermometer und bedeckte das ganze mit einer Glasglocke. Der Pumpenteller war mittels Glasröhren mit einer zweistiefeligen Luftpumpe verbunden.

Der andere Apparat mit einer zweiten Stimmgabel war in einer hölzernen Kiste verschlossen. In dieselbe war auf einer Seite in der Nähe der Stimmgabel ein Loch gebohrt, in welchem mittels eines Korkes ein ebenfalls in Fünftelgrade getheiltes Thermometer befestigt war. Die Kiste sowohl, wie auch der Pumpenteller, waren mit einer dicken Lage Baumwolle umkleidet.

Die Temperatur in dem Locale, in welchem die Apparate aufgestellt waren, war nicht absolut constant zu erhalten, trotzdem die Fensterläden geschlossen wurden und nur ich hineinging, um die Thermometer abzulesen und eventuell die Glocke zu evacuiren. Wenn man in der Lage ist, die Apparate vollkommen luftdicht zu verschliessen, so kann man sie in einen Keller stellen, in welchem die Temperatur constant bleibt. Mir war dies nicht möglich. Es wäre mit der Luft auch Feuchtigkeit in die Glasglocke gedrungen, welche den Apparaten geschadet hätte. Auch in der Kiste und der Glasglocke schwankte die Temperatur im Laufe des Tages um etwa 0,1 bis 0,2° C. Doch waren diese Schwankungen für meine Untersuchungen ohne Einfluss. Herr Professor V. v. Lang hat den Temperaturcoefficienten der von mir benutzten Stimmgabeln bereits bestimmt, und zwar bewirkt eine Temperaturerhöhung um 1° C eine Aenderung um 0,088 Schwingungen in der Secunde, also bei 0,2° C um 0,0176 Schwingungen. Wären also die Temperaturen beider Stimmgabeln um 0,2° C verschieden ge-

wesen, so hätten sie in 1ˢ um 0,0176 Schwingungen zu viel oder zu wenig gegeben. Dies hätte in 1ᵐ gerade eine Schwebung betragen. Die folgenden Angaben werden aber zeigen, dass die Temperaturschwankungen in der Glocke und der Kiste vollkommen parallel verliefen, und dass die Differenz zwischen den Angaben beider Thermometer constant war. Es wurden demnach beide Stimmgabeln in gleicher Weise durch die Temperaturschwankungen beeinflusst, so dass durch dieselben die Zahl der Schwebungen nicht geändert wurde.

Die Stimmgabeln, mit denen ich meine Versuche anstellte, sind von König bezogen und haben die Zinken derselben eine Länge von 10 cm, eine Breite von 1,4 cm und eine Dicke von 0,5 cm.

Die Schwebungen konnten nach einmaligem Anschlage bequem zwei bis drei Minuten gehört werden.

Schon bei den ersten Versuchen zeigte es sich, dass die Schwingungszahl der Stimmgabel im luftleeren Raume grösser ist als im lufterfüllten. Den Einfluss des Mittels, in welchem sich die tönende Gabel befindet, kann man ohne alle Vorbereitungen durch folgendes Experiment erkennen: Man schlägt eine Stimmgabel an, nimmt den Stiel derselben zwischen die Zähne und taucht, indem man die Gabel in dieser Weise hält, die Enden der Zinken in Wasser. Man hört dann den Ton plötzlich tiefer werden.

Ich lasse nun eine Reihe von Beobachtungen folgen. Die angeführten Zahlen sind Mittelwerthe aus einer grösseren Zahl von Beobachtungen.

In beistehender Tabelle bezeichnen:

P den Luftdruck in der Glocke in Millimetern ausgedrückt,

T_1 die Temperatur in der Glocke,

T_2 die Temperatur in der Kiste,

φ die Zahl der Schwebungen in 1ˢ.

P	T_1	T_2	φ beobachtet	berechnet	Differenz
39 mm	23,1	23,6	2,576	2,5809	— 49
218	23,2	23,7	2,609	2,6050	+ 40
400	23,2	23,7	2,635	2,6296	+ 54
575	23,15	23,65	2,650	2,6532	— 32
760	23,2	23,7	2,677	2,6782	— 12

Die berechneten Werthe von φ folgen aus der Formel:

$$\varphi = 2,5756 + 0,000135\, P,$$

deren Constanten aus den beobachteten Grössen von φ mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate gefunden wurden. Die letzte Colonne enthält die Differenz der beobachteten Werthe weniger der berechneten in Einheiten der vierten Decimalstelle.

Die Uebereinstimmung der Beobachtung und Rechnung darf zu dem Schlusse berechtigen, dass die Aenderung der Tonhöhe einer Stimmgabel innerhalb der Grenzen von 0 bis 760 mm in linearer Weise mit der Veränderung des Luftdruckes zusammenhängt.

Die Molecularkräfte in der Endosmose.

Von

K. Fuchs.

In einer unendlichen Glasröhre befinde sich eine endliche Menge wässriger Lösung des Stoffes A und eine endliche Menge wässeriger Lösung des Stoffes B, und zwischen beiden befinde sich eine Uebergangsschicht ab (Fig. 1), von der wir nur voraussetzen, dass sie ihre Grenzen nicht verschiebt. Wenn aber in der A-Lösung die Concentration des Wassers C gleich ϱ_1, d. h. in der Volumeinheit der A-Lösung das Wasservolumen ϱ_1 enthalten ist, und die Concentration des Wassers ist in der B-Lösung gleich ϱ_2, dann geht in der Uebergangsschicht die Concentration des Wassers von links nach rechts stetig nach irgend einem

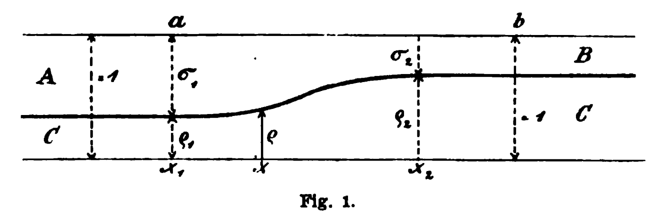


Fig. 1.

Gesetze vom Werthe ϱ_1 in den Werth ϱ_2 über, wobei wir $\varrho_1 < \varrho_2$ annehmen wollen.

Nun soll aus irgend einer Ursache die Arbeit k geleistet werwerden, wenn an einer gewissen Stelle in der Uebergangsschicht die Volumeinheit reinen Wassers um die Wegeinheit nach rechts verschoben wird (wandert), d. h. es soll irgend eine Kraft k vorhanden sein, welche die Volumeinheit des Wassers an dieser Stelle nach rechts zu führen strebt. Das Wasservolumen, welches unter dem Einflusse dieser Kraft an jener Stelle durch die Einheit des Querschnittes strömen wird, ist offenbar einerseits der Kraft k proportional, andrerseits aber auch der Concentration ϱ des Wassers an jener Stelle, denn wo viel Wasser ist, fliesst viel. Den dynamischen Wasserstrom, wie wir ihn nennen wollen, können wir also bezeichnen mit

$$+ q \varrho k$$

wobei q die Proportionalitätsconstante ist und das positive Vorzeichen angibt, dass der Strom in der Richtung der positiven Abscissen x sich bewegt (nach rechts). Dieses Wasservolumen strömt also infolge von Kräften per Zeiteinheit durch die Einheit des Querschnittes der Röhre an die in Rede stehende Stelle.

Die Diffusion führt indes stetig Wasser nach den Orten kleinerer Concentration, und es findet also an unserer Stelle ein nach links gerichteter Diffusionsstrom

$$-p\frac{d\varrho}{dx}$$

statt, wobei p die Diffusionsconstante für jene Stelle ist. Es herrscht Gleichgewicht, wenn beide Ströme gleich sind, also wenn gilt

$$q\varrho k = p\frac{d\varrho}{dx}.$$

Diese Gleichung ist nun leicht integrirt. Wir haben

$$\frac{qk}{p}dx = \frac{d\varrho}{\varrho}$$

oder

$$\int\frac{qk}{p}\,dx = \log\varrho + \text{Const.}$$

Nun ist am Anfang x_1 der Uebergangsschicht $\varrho = \varrho_1$, am Ende x_2 aber $\varrho = \varrho_2$, so dass wir schreiben können

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{qk}{p}\,dx = \log\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) \tag{1}$$

oder

$$\varrho_2 = \varrho_1 e^K \ldots K = \int_{x_1}^{x_2}\frac{qk}{p}\,dx. \tag{2}$$

Wenn die Stoffe A und B gleich grosse und gleich schwere Moleküle besitzen, dann sind p und q constant und wir haben

$$K = \frac{q}{p}\int_{x_1}^{x_2}k\,dx.$$

Das Integral bedeutet dann die Arbeit, welche geleistet wird, wenn die Volumeinheit Wasser aus der A-Lösung durch die Uebergangsschicht in die B-Lösung übergeführt wird. Diese Uebergangsarbeit wollen wir nun berechnen unter der Voraussetzung, dass sie ausschliesslich von den Molecularkräften geleistet wird.

In dem Aufsatze „Ueber die Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten“ in Exner's Rep. 1888 S. 600 ist gezeigt: wenn man von einer Flüssigkeit A das Volumen u und von einer Flüssigkeit B das Volumen v nimmt und die beiden Flüssigkeiten mischt, dann leisten die Molecularkräfte hierbei die Arbeit

$$e = -\frac{uv}{u+v}(a+b-2c),$$

wobei a und b die Cohaesionsconstanten von A und B sind, während c die Adhaesionsconstante der beiden Flüssigkeiten ist. Welche Arbeit wird nun geleistet, wenn man der Mischung noch eine Volumeinheit von A beifügt? Wir brauchen nur e nach u zu differenziren und erhalten

$$\frac{de}{du} = -\frac{v^2}{(u+v)^2}(a+b-2c)$$

oder

$$e' = -\varrho_2^2(a+b-2c),$$

wobei ϱ_2 die Concentration B bedeutet, d. h. das Volumen von B, welches in der Volumeinheit in der Mischung enthalten ist.

Nun lassen wir die beiden Flüssigkeiten A und C heissen und bezeichnen deren Cohaesionen mit den Symbolen aa und cc, ihre Adhäsionen an einander aber mit ac. Die Concentration von A sei σ_1 (also die von C gleich $\varrho_1 = 1 - \sigma_1$). Dann ist die Moleculararbeit, welche geleistet wird, wenn die Volumeinheit von C aus der Mischung von A und C herausgenommen (nicht eingefügt) wird, gegeben durch

$$e' = +\sigma_1^2(aa+cc-2ac).$$

Ein zweites Mal lassen wir die beiden Flüssigkeiten C und B heissen, bezeichnen ihre Molecularconstanten mit cc, bb und cb, und lassen in ihrer Mischung die Concentration von B gleich σ_2, die von C gleich ϱ_2 sein. Dann ist die Moleculararbeit, welche geleistet wird, wenn wir die Volumeinheit von C noch der Mischung beifügen, gegeben durch

$$e' = -\sigma_2^2(bb+cc-cb).$$

Wenn wir also die Volumeinheit von C überführen aus der Mischung von A und C, wo die Concentration von A gleich σ_1 ist, in die Mischung von B und C, wo die Concentration von B gleich σ_2 ist, dann wird hierbei die Moleculararbeit geleistet

$$E = \sigma_1^2(aa+cc-2ac) - \sigma_2^2(bb+cc-bc)$$

$$= 2\sigma_2^2\left(bc - \frac{bb+cc}{2}\right) - 2\sigma_1^2\left(ac - \frac{aa-cc}{2}\right).$$

Wir wollen kürzer schreiben

$$E = 2\sigma_2^2\gamma_2 - 2\sigma_1^2\gamma,$$

wobei γ_2 der Excess der Adhaesion von B und C über das Mittel ihrer Cohaesion bedeutet, während γ_1 dasselbe für A und C ist. Wir haben also

$$\int_{x_1}^{x_2} k\,dx = 2\sigma_2^2\gamma_2 - 2\sigma_1^2\gamma_1.$$

Dies ist die molekulare Arbeit, welche die Volumeinheit des Wassers bei ihrem Durchgang aus A durch die Uebergangsschicht nach B verursacht, wenn die Arbeit bei der Ueberführung von Wasser aus A nach B ausschliesslich durch die Molekularkräfte der betheiligten Stoffe A, B und C geleistet wird.

In der Praxis kommen bei endosmotischen Experimenten meistens auch Niveaudifferenzen ins Spiel. Die beiden Lösungen sollen sich in einer U-förmig gebrochenen Röhre vom Querschnitte $= 1$ befinden, wobei das Diaphragma in den horizontalen Theil gestellt ist. Wenn dann die Volumeinheit Wasser durch das Diaphragma nach rechts strömt, dann senkt sich hierbei die linke Säule vom Gewicht r_1 per Volumeinheit um die Längeneinheit, während gleichzeitig die rechte Säule vom Gewicht r_2 per Volumeinheit sich um die Längeneinheit hebt. Hierbei leistet die Schwere die Arbeit $r_1\,h_1 - r_2\,h_2$, wenn h_1 und h_2 die Höhen der Flüssigkeitsenden über dem Diaphragma sind. Wenn also die Volumeinheit Wasser durch das Diaphragma nach rechts tritt, dann leisten die Molekularkräfte und die Schwere zusammen die Arbeit

$$K = 2\frac{q}{p}(\gamma_2\sigma_2^2 - \gamma_1\sigma_1^2) - (r_2 h_2 - r_1 h_1).$$

Hierbei ist angenommen, dass die Moleküle von A, B und C gleich grosse und gleich schwere Moleküle sind. In Wirklichkeit ist das im allgemeinen nicht der Fall, und wir müssen dem Bruche q/p in der einen Flüssigkeit seinen Maximalwert, und in der anderen seinen Minimalwert zuschreiben. Wenn wir nun in der Formel für den Bruch einmal seinen grössten, einmal seinen kleinsten Wert einsetzen, dann liegt der wahre Werth von K zwischen diesen beiden Extremen. Wir wollen in der Folge dem Bruche q/p einen constanten Wert zuschreiben und wissen, dass dieser irgendwo zwischen den beiden extremen wirklichen Werthen liegt. Wir bezeichnen den Bruch mit n. Unsere Formel 2 laute dann

$$\varrho_2 = \varrho_1\, e^{2n\gamma_2\sigma_2^2 - 2n\gamma_1\sigma_1^2 - r_2 h_2 + r_1 h_1}.$$

Wenn wir die Elemente, welche sich auf die linke Lösung beziehen, auf die linke Seite schreiben, und umgekehrt, dann haben wir

$$\varrho_1\, e^{r_1 h_1 - 2n\gamma_1\sigma_1^2} = \varrho_2\, e^{r_2 h_2 - 2n\gamma_2\sigma_2^2}. \qquad (3$$

Diese. Formel lässt sich sofort für beliebig viel Flüssigkeit anschreiben. Es muss offenbar für jede Lösung gelten

$$\varrho\, e^{rh - 2n\gamma\sigma^2} = y_c,$$

wobei y_c um so grösser ist, je reichlicher Wasser vorhanden ist. In Figur 2 ist die Function y für verschiedene Werthe von γ und für $h = 0$ durch Curven dargestellt. In jedem Falle haben wir $y = 0$ für $\varrho = 0$ und $y = 1$ für $\sigma = 0$; für $\gamma = 0$ ist die Curve eine Gerade. Für genügend kleine γ hat die Curve ein Maximum und ein Minimum, welche zu $\varrho = 0{,}5$ symmetrisch liegen. Wir haben nämlich $\partial y/\partial\varrho = 0$ für

$$\gamma = -\frac{1}{4n\varrho\sigma}.$$

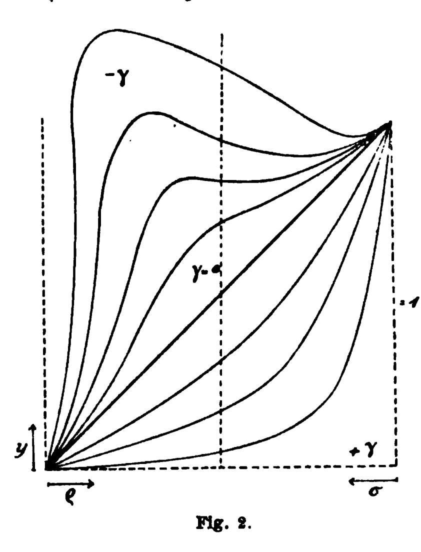


Fig. 2.

Die culminirenden Curven beziehen sich auf Salze, welche auscrystallisiren, wenn der Wassergehalt unter ein gewisses Niveau sinkt. Die sehr interessanten Folgerungen aus den Curven wollen wir aber hier nicht entwickeln.

Die Formel 3 enthält sechs Variable $\varrho_1\ \sigma_1\ h_1\ \varrho_2\ \sigma_2\ h_2$ zwischen denen Relationen bestehen, die wir noch zusammenstellen müssen.

Die Stoffe A und B seien Flüssigkeiten, welche sich mit C (Wasser) ohne Contraction mischen. Wenn wir zum Versuche das Volumen u_1 von A und das Volumen u_2 von B nehmen, von C aber das Volumen v, wovon der Theil v_1 links, der Theil v_2 rechts vom Diaphragma ist, dann gilt

$$\varrho_1 = \frac{v_1}{u_1 + v_1} \quad \varrho_2 = \frac{v_2}{u_2 + v_2}$$

$$v_1 + v_2 = v$$

$$\sigma_1 = \frac{u_1}{u_1 + v_1} \quad \sigma_2 = \frac{u_2}{u_2 + v_2}$$

Wenn ferner die Lösungen sich in verticalen Cylindergläsern befinden, von denen das erste den Querschnitt b_1, das andere den Querschnitt b_2 hat, dann sind die Volumen der Lösungen

$$b_1 h_1 = u_1 + v_1. \qquad b_2 h_2 = u_2 + v_2.$$

Hierdurch sind die Höhen h_1 und h_2 bestimmt.

Wenn bei der Mischung Contraction eintritt, dann bleiben die Producte $r_1\, h_1$ und $r_2\, h_2$, sowie $\varrho_1\ \sigma_1\ \varrho_2\ \sigma_2$ ungeändert. Die Contraction

hat jedoch zur Folge, dass die Molekularfunction γ_1 durch w_1^2 dividirt werden muss, wenn w_1 das Volumen bedeutet, auf welches sich die ursptingliche Volumeinheit der Flüssigkeit contrahiert hat, und ebenso muss γ_2 durch w_2^2 dividirt werden. Es kommt dies daher, dass bekanntlich die Molekulararbeiten homogener Flüssigkeiten u^2 — mal grösser werden, wenn das Volumen u — mal kleiner wird. Im Falle von Contraction muss also für jede Flüssigkeit gelten

$$\varrho\, e^{rh}\, e^{-\frac{n\gamma\sigma^2}{w^2}} = y_c.$$

Bei Salzlösungen haben wir für u_1 und u_2 natürlich nicht die Volumina festen Salzes zu setzen, sondern das Volumen, das dem Salze in der Lösung, d. i. in seiner Flüssigkeitsform zukommt, zu setzen.

In der Praxis haben wir zumeist einerseits des Diaphragmas die Lösung eines Salzes, anderseits reines Wasser. In diesem Falle setzen wir $\varrho_2 = 1$, $r_2 = 1$, $\sigma_2 = 0$, wodurch wir für die rechte Seite (von 3) erhalten

$$e^{h_2} = y_c.$$

Wenn wir für die linke Seite (von 3) nur bei h_1 den Index behalten, dann lautet die Formel 3, auf unsere zwei Flüssigkeiten angewendet:

$$\varrho\, e^{rh_1}\, e^{-\frac{n\gamma\sigma^2}{w^2}} = e^{h_2},$$

woraus wir durch Logarithmirung und einige Umstellungen finden, wenn wir der Einfachheit wegen noch $h_2 = 0$ setzen, d. h. der reinen Wassersäule keine Höhe zuschreiben:

$$h_1 = \frac{1}{r}\left(\frac{n\gamma\sigma^2}{w^2} - \log(1-\sigma)\right).$$

Wenn wir σ klein sein lassen und $\log(1-\sigma)$ in eine Reihe auflösen und hiervon nur die ersten zwei Glieder beibehalten, dann finden wir

$$h_1 = \frac{1}{r}\left(\sigma + \left[\frac{n\gamma}{w^2} - \frac{1}{2}\right]\sigma^2\right).$$

Dies ist die Höhe, auf die durch Endosmose die Salzlösung steigt.

Wenn wir den Flüssigkeiten keine Druckhöhe zuschreiben, und beide Flüssigkeiten Salzlösungen sein lassen, dann lautet die Formel

$$\varrho_1\, e^{-\frac{n\gamma_1\sigma_1^2}{w_1^2}} = \varrho_2\, e^{-\frac{n\gamma_2\sigma_2^2}{w_2^2}},$$

welche gleichwertig ist mit

$$\log\left(\frac{1-\sigma_1}{1-\sigma_2}\right) = \frac{n\gamma_1\sigma_1^2}{w_1^2} - \frac{n\gamma_2\sigma_2^2}{w_2^2}.$$

Wenn wir für kleine σ den Logarithmus in eine Reihe auflösen und zwei Glieder nehmen, dann finden wir

$$\sigma_1 + \left(\frac{n\gamma_1}{w_1} - \frac{1}{2}\right)\sigma_1^2 = \sigma_2 + \left(\frac{n\gamma_2}{w_2} - \frac{1}{2}\right)\sigma_2^2.$$

Grundzüge einer mathematischen Theorie der inneren Diffusion des Lichtes [1].

Von

Von Dr. O. Chwolson [2].

Einleitung.

Unter innerer Diffussion des Lichtes verstehen wir die bekannte, in trüben Medien, z. B. im Milchglas, auftretende Erscheinung der Lichtzerstreuung. Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, zu einer mathematischen Behandlung dieser Erscheinung den Grund zu legen.

Ich will es sofort hervorheben, dass eine vollständige Lösung des Problems vorläufig nicht möglich erscheint, da dasselbe zu einer Functionalgleichung führt, die ich hier angeben will. Es sei h die Dicke einer von zwei unendlichen parallelen Ebenen begrenzten Platte, a die Entfernung eines Punktes M von der Eintrittsebene des Lichtes, K ein Coefficient, der stets <1 ist, α und p zwei Grössen, die ohne grossen Fehler auch als gleich angenommen werden können, (s. Gl. 3) und 5); ferner sei

$$\omega(x) = -\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = li\,(e^{-x}),$$

wo li den Integrallogarithmus

$$li\,(z) = \int_0^z \frac{dz}{lgz}$$

bezeichnet.

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus den Mel. phys. et chim. der Akad. zu St. Petersburg. Bd. 13 (1889).

2) Die vorliegende Abhandlung ist schon im Herbst 1885 Herrn Akademiker A. Gadolin und mir zur Vorstellung an die Akademie eingereicht worden, wurde aber dann vom Autor wieder zurückgezogen, um noch einen Versuch zur vollständigen Lösung der Hauptgleichung zu machen und dann fast unverändert im Herbst 1888 uns wieder zugestellt. Wegen des inzwischen erfolgten Erscheinens einer denselben Gegenstand behandelnden Abhandlung von E. Lommel (Wiedemann's Annalen Bd. 36) schien mir obige Erklärung nothwendig, welche ich leider in Abwesenheit meines Collegen Gadolin nur allein abgeben kann.

St. Petersburg, 4. Juli 1889. Akademiker H. Wild.



Die Lichtintensität $f(a)$ im Punkte M wird, wenn wir von den inneren Reflexionen an den Grenzebenen absehen, durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$f(a) = e^{-pa} - \frac{\alpha K}{2}\int_0^a f(x)\,\omega(pa - px)\,dx - \frac{\alpha K}{2}\int_a^h f(x)\,\omega(px - pa)\,dx.$$

Hier kann $\alpha = p$ gesetzt werden. Für unendlich tiefe Platten wäre $h = \infty$. Bisher ist es mir nicht gelungen, die Function $f(a)$ für beliebige Werthe von p, K und h zu berechnen.

Der Inhalt der vorliegenden Arbeit ist kurz folgender:

§ 1 enthält die Darlegung derjenigen Hypothese über die physikalischen Ursachen der inneren Diffusion, welche der ferneren Rechnung zu Grunde gelegt wird. Diese Hypothese besteht wesentlich in der Annahme, dass die innere Diffusion durch, in die homogene Grundmasse des Mediums eingestreute Partikelchen erzeugt wird, welche als leuchtende Punkte zu betrachten sind, deren Leuchtkraft proportional der auf dieselben einfallenden Lichtmenge ist. Die von aussen direct zu dem Punkte M gelangende Lichtmenge i_1 ist durch das erste Glied der obigen Functionalgleichung gegeben.

§ 2—4 enthalten die Aufstellung der allgemeinen Gleichungen.

§ 5 enthält die vollständige Lösung der Aufgabe für solche Stellen im Innern der Platte, bis zu denen kein Licht von aussen her direct eindringt, die also von den Grenzebenen unendlich weit entfernt sind.

Im § 6 wird ein allgemeiner, für beliebige Platten gültiger Satz bewiesen.

§ 7—10 enthalten die vollständige Behandlung des Problems für den Fall, dass die Diffusion überhaupt nicht bedeutend ist.

§ 1.

Um eine mathematische Theorie der inneren Diffusion des Lichtes aufstellen zu können, muss man eine bestimmte Annahme über die Ursache dieser Erscheinung zu Grunde legen. Es ist nun wohl einleuchtend, dass die nächstliegende und auch wahrscheinlichste Annahme darin besteht, dass in der durchsichtigen Hauptmasse des betreffenden Körpers eine sehr grosse Menge äusserst kleiner Partikelchen, entweder derselben Masse in modificirtem Zustande oder eines völlig anderen Stoffes eingestreut sind. An diesen Partikelchen können die Lichtstrahlen möglicherweise regelmässige Reflexion oder Zerstreuung erleiden. Es ist auch denkbar, dass die eingestreuten Partikelchen aus einem an und für sich durchsichtigen Stoffe bestehen, dessen Brechungscoefficient aber ein anderer ist, als derjenige der Grundmasse.

Die geometrische Form der eingestreuten Theilchen kann eine in hohem Grade verschiedenartige sein, doch ist es gewiss sehr wahrscheinlich, dass für die Gesammtheit einer grossen Menge solcher Theilchen im Durchschnitt eine, nach allen Richtungen im Raume hin gleichförmige Oberflächenvertheilung resultiren wird. In diesem Falle wird die optische Wirkung dieser Gesammtheit wesentlich dieselbe sein, als wie in dem Falle, wo sämmtliche Theilchen Kugelgestalt haben. Es ist nicht unmöglich, dass in einigen Fällen die eingestreuten Partikelchen wirklich kugelförmig sind: wenn nämlich sowohl die Grundmasse, als auch die Partikelchen zu irgend einer Zeit in flüssigem Zustande sich befanden.

Es sei im weiteren ϱ der Radius eines der eingestreuten Theilchen und r^3 dasjenige Volumen, innerhalb dessen durchschnittlich je ein solches Theilchen sich befindet. In dem Volumen v befinden sich also v/r^3 Theilchen. Denken wir uns die sämmtlichen Theilchen als absolut schwarz, d. h. undurchsichtig und nicht reflectirend und bezeichnen für diesen Fall, der offenbar dem absoluten Mangel an innerer Diffusion entspricht mit α den Absorptionscoefficient der Substanz des Körpers. Sind die Theilchen in sehr grosser Menge vorhanden, so wird α gross sein und eine verhältnissmässig dünne Platte des betreffenden Stoffes wird bereits undurchsichtig erscheinen. Findet eine innere Diffussion des Lichtes statt, so wird das Licht offenbar viel tiefer eindringen; in einem idealen Grenzfalle, den wir später betrachten werden, würde das Licht sogar mit constant bleibender Intensität immer tiefer eindringen, d. h. der Absorptionscoefficient wäre gleich Null.

Nehmen wir vorerst an, es finde keine innere Diffussion statt, die eingestreuten Partikelchen seien also völlig schwarz. Ist das Letztere bei einer beliebigen Platte der Fall und tritt normal zur Oberfläche derselben Licht von der Intensität I_0 ein, so wird in einer Tiefe x das Licht die Intensität

$$I = I_0 \, e^{-\alpha x} \tag{1}$$

haben. Wir können leicht einen Ausdruck für α als Funktion von ϱ und r aufstellen. Es ist klar, dass jedesmal, wo x sich um die Länge r vergrössert, die Intensität I sich um einen Theil verringert, der gleich ist dem Verhältniss der von der Projection eines Theilchens occupirten Fläche $\pi\varrho^2$ zu der gesammten Fläche r^2, auf welcher ein Theilchen sich befindet. Es ist also

$$e^{-\alpha r} = 1 - \alpha r = 1 - \frac{\pi \varrho^2}{r^2}$$

und hieraus

$$\alpha = \frac{\pi \varrho^2}{r^3}. \tag{2}$$

Eine ganz analoge Entwicklung findet sich bei Clausius „Ueber die mittlere Länge der Wege u. s. w.“ Pogg. Ann. 1858, Bd. 105 § 5 (Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie 1867, 2. Abteil., Abhandl. XV, S. 269).

Um zur Aufstellung möglichst allgemeiner Formeln zu gelangen, wollen wir die Absorption des Lichtes in der Grundmasse selbst, also z. B. beim Milchglase, in dem reinen Glas, ebenfalls in Betracht ziehen, und es sei β der betreffende Absorptionscoefficient. Setzen wir

$$p = \alpha + \beta \tag{3}$$

so ist Gl. 1) durch

$$I = I_0 e^{-px} \tag{4}$$

zu ersetzen. In den meisten Fallen wird wohl β im Vergleiche mit α sehr klein sein und werden wir daher oft

$$\left.\begin{array}{l} \beta = o \\ \alpha = p \end{array}\right\} \tag{5}$$

annehmen können.

Wir wenden uns zu der wichtigsten Frage — welche Annahme ist zu machen über die Art, wie die Zerstreuung des Lichtes an den eingestreuten Theilchen stattfindet? Die einfachste Annahme ist offenbar: jedes dieser Theilchen kann als leuchtender Punkt betrachtet werden, dessen Lichtintensität i proportional ist der gesammten auf dasselbe einfallenden Lichtmenge und dessen Leuchtkraft nach allen Seiten hin dieselbe ist.

Auf verschiedene Weise lässt sich zeigen, dass diese Annahme der Wahrheit nahe kommt, besonders in Schichten, welche nicht zu nahe an der beleuchteten Oberfläche der Platte liegen.

Sind die eingestreuten Theilchen absolut und regelmässig reflectirende Kugeln, so ist obige Annahme völlig richtig. In der That, es sei Fig. 1, A die betrachtete Kugel, auf welche in der Richtung BO parallele Strahlen fallen. Die Lichtmenge $MNCE$, welche beim Auftreffen auf die Kugeloberfläche mit der Normale einen Winkel zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ bildet, ist proportional dem Producte der Zonenfläche $CEFG$ mit $\cos\varphi$, oder proportional $\sin\varphi \cdot d\varphi \cdot \cos\varphi = {}^1\!/_2 \sin 2\varphi \cdot d\varphi = {}^1\!/_2 \sin\psi \cdot d\varphi$, oder einfacher, proportional $\sin\psi$, wo $\psi = 2\varphi$. Dieselbe Lichtmenge wird reflectirt (CD) in einer Richtung, die mit der der Achse BH die Winkel von ψ bis $\psi + d\psi$ bildet. Die von der Kugel in der Richtung zwischen ψ und $\psi + d\psi$ reflectirte Lichtmenge ist also proportional $\sin\psi$ — genau ebenso, als wäre die Kugel ein leuchtender Punkt, welchen wir uns in O denken können, wenn der Radius der Kugel sehr klein ist im Vergleiche mit den Entfernungen OX derjenigen Punkte X, in welchen wir die durch A hervorgerufene Beleuchtung betrachten werden. Es könnte im ersten Augenblick

befremdlich erscheinen, dass eine einseitig beleuchtete Kugel nach allen Richtungen im Raume gleichviel Strahlen aussendet; man darf eben nicht vergessen, dass wir die Annahme einer absoluten Reflexion zu Grunde gelegt haben, welche ein nach nach allen Richtungen gleich gut sichtbares Spiegelbild der ursprünglichen weit entfernten Lichtquelle liefert. Ausserdem betrachten wir die Kugel aus einer Entfernung, die gross ist im Vergleiche mit dem Radius derselben. Schon Lambert (Photom., S. 300 u. f.) hat auf diese Eigenschaft einer „perfecte reflectens" Kugel aufmerksam gemacht. Dass wenigstens bei dem von mir untersuchten Milchglase, an den eingestreuten Theilchen auch Reflexion stattfindet, beweist ein früherer Versuch (Photometrische Untersuchungen über die innere Diffussion des Lichtes. Mélanges phys. et chim. T. XII, p. 475—545). Es zeigte sich (l. c. p. 513 und 515), dass, wenn auf eine Milchglasplatte in der Einfallsebene völlig polarisirtes Licht fällt und die Dicke derselben eine gewisse Grösse übersteigt, in dem austretenden Lichte keine Spur von Polarisation zu bemerken ist (ausser der auch bei einfallendem natürlichen Lichte beobachteten). Wird die Dicke der Platte soweit verringert, dass z. B. bei normal auffallendem polarisirtem Lichte, im normal austretenden sich die ersten deutlicheren Spuren von Polarisation zeigen, so zeigen sich ebensolche Spuren gleichzeitig auch in dem nach allen anderen Richtungen austretenden Lichte (l. c., p. 517). Dies wäre unmöglich, wenn an den eingestreuten Theilchen gar keine Reflexion stattfände. Findet Zerstreuung des Lichtes an der Oberfläche der Theilchen statt und wird das Licht ausserdem vielleicht auch durch die Theilchen hindurch gebrochen, so würde bei einseitiger Beleuchtung allerdings das wieder ausgesandte Licht nicht nach allen Richtungen gleiche Intensität haben. In grösserer Tiefe, d. h. Entfernung von der beleuchteten Oberfläche der Platte, wo die directe Beleuchtung der Theilchen vernachlässigt werden kann und jedes Theilchen nur von den umliegenden beleuchtet wird, also von allen Seiten Licht empfängt, dürfte das wieder ausgestrahlte Licht wohl ohne Zweifel sehr nahe gleichförmig nach

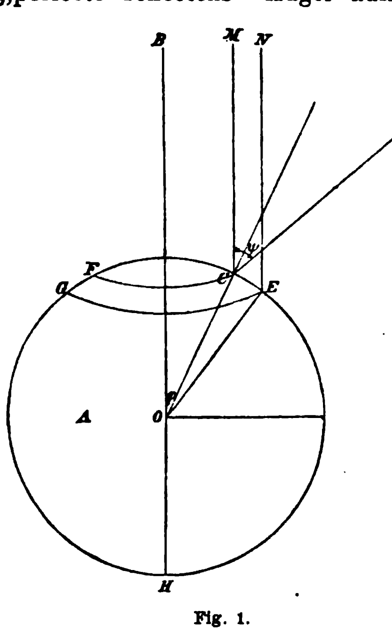


Fig. 1.

allen Seiten hin vertheilt sein. Die durch die Theilchen hervorgerufenen Diffractionserscheinungen werden jedenfalls die Gleichförmigkeit der Lichtvertheilung vergrössern.

Wir wollen im folgenden annehmen, dass die beleuchteten Theilchen als leuchtende Punkte zu betrachten sind und es sei i die Lichtintensität derselben, d. h. die in der Einheit der Entfernung auf die Flächeneinheit fallende Lichtmenge. Ferner sei I die Intensität des Lichtes, durch welches das Theilchen beleuchtet wird, d. h. die auf die Flächeneinheit desselben einfallende Lichtmenge.

Um i durch I ausdrücken zu können, müssen wir noch eine besonders wichtige Grösse einführen. Die von einem Theilchen wieder ausgestrahlte Lichtmenge wird stets einen gewissen Bruchtheil der gesammten aufgefallenen Lichtmenge bilden; dieser Bruch, das Albedo der Theilchen sei mit K bezeichnet. Die einfallende Lichtmenge ist gleibh $I\pi\varrho^2$, die ausgestrahlte $4\pi i$. Die Gleichung

$$4\pi i = K I \pi \varrho^2$$

gibt

$$i = \frac{K\varrho^2}{4} I. \tag{7}$$

Es ist wohl festzuhalten, dass i und I in Bezug anf die Längeneinheit von verschiedenen Dimensionen sind.

Die Grösse i besteht aus zwei Theilen: der erste rührt von der direct von aussen eindringende Beleuchtung her, welche durch Gl. 4) ausgedrückt wird; der zweite verdankt seine Entstehung der Beleuchtung durch die Gesammtheit aller übrigen Theilchen. In grösserer Tiefe, wo der erste Theil verschwindend ist, kann der zweite noch eine sehr bedeutende Grösse haben.

Vernachlässigen wir die Absorption in der Grundmasse, d. h. setzen wir $\beta - 0$ und nehmen wir den extremen Fall, dass das Albedo $K = 1$ ist, dass also gar kein Licht verloren geht, so müssen wir in grösserer Tiefe $i = \text{const.}$, d. h. unabhängig von der Tiefe, erhalten. Es sind also, (s. Gl. 5),

$$\left\{\begin{array}{c} \beta = 0\,(p = \alpha) \\ K = 1 \text{ und} \\ i = \text{const.} \end{array}\right\} \tag{8}$$

zusammengehörige Grössen.

In Wirklichkeit wird stets $K < 1$ sein und also i mit wachsender Tiefe x kleiner werden. Das Sinken von i wird aber jedenfalls langsamer vor sich gehen, als nach dem Gesetz (Gl. 4). Sollte also unter irgend welchen Umständen i als Function von x von der Form

$$i = A e^{-mx} \tag{9 a}$$

sein, so wäre jedenfalls

$$m < p \tag{9,b}$$

zu setzen. Auch ist es a priori klar, dass, je grösser K ist, je stärker also jedes Theilchen von den übrigen beleuchtet wird, desto kleiner der Bruch $\frac{m}{p}$ und desto langsamer die Aenderung von i vor sich gehen muss. Der Grenzfall $K=1$ gibt, (s. Gl. 8), $i=$ const., d. h. $m=0$.

§ 2.

Wir wenden uns zur Aufstellung allgemeiner Formeln für die Lichtbewegung in einer Platte, in welcher innere Diffusion stattfindet. Es sei wie oben, i die Leuchtkraft eines der eingestreuten Theilchen, dessen Coordinaten x, y, z sind. Wir setzen

$$i = f(x, y, z) \tag{10}$$

Ein speciell zu betrachtendes Theilchen M habe die Coordinaten a, b, c und die entsprechende Leuchtkraft $f(a, b, c)$. Diese Grösse rührt erstens von dem directen Eindringen der Strahlen in den Körper her und wollen wir uns hierbei mit der Betrachtung des Falles begnügen, dass parallele Lichtstrahlen auf die ebene Oberfläche des Körpers auffallen. Ist I_0 die Intensität dieser Strahlen an der Oberfläche nach ihrem Eindringen und R_0 die Entfernung des Theilchens M von der Oberfläche in der Richtung der Strahlen, so wird der erste Theil von $f(a, b, c)$ durch Combination von (Gl. 4 und 7) erhalten. Nennen wir ihn i_1, so ist

$$i_1 = \frac{K\varrho^2}{4} I_0 e^{-pR_0} \tag{11}$$

Der zweite Theil von i verdankt seine Entstehung der Beleuchtung durch die Gesammtheit aller übrigen Theilchen. Er besteht wiederum aus zwei Theilen: i_2, herrührend von der directen Beleuchtung der Theilchen (a, b, c) durch die übrigen und i_3, herrührend von dem an der Oberfläche reflectirten Lichte. (Ist die Platte durchscheinend, so kommt zu dem ersten Theile i_1 noch einer hinzu, hervorgerufen durch die an der einen Oberfläche eingedrungenen und an der anderen reflectirten Strahlen).

Um i_2 zu berechnen, bezeichnen wir mit R die Entfernung des Punktes (a, b, c) von dem Volumenelement dv, dessen Coordinaten (x, y, z) sind, und in welchem jedes Theilchen die Leuchtkraft $f(x, y, z)$ besitzt. Die Anzahl dieser Theilchen ist offenbar

$$\frac{dv}{r^3}$$

und es kann also dv als mit der Leuchtkraft

$$\frac{dv}{r_3} f(x, y, z)$$

begabt angesehen werden. Die in (a, b, c) durch dv hervorgerufene Beleuchtung ist also gleich

$$\frac{dv}{r^3} f(x, y, z) \cdot \frac{e^{-pR}}{R^2}.$$

Setzen wir diese Grösse statt I in (Gl. 7), so erhalten wir den durch dv erzeugten Theil von i_2:

$$\frac{K \varrho^2}{4 r^3} f(x, y, z) \cdot \frac{e^{-pR}}{R^2} dv$$

und folglich die Gesammtgrösse i_2, wenn wir noch (Gl. 2) berücksichtigen:

$$i_2 = \frac{\alpha K}{4\pi} \int f(x, y, z) \cdot \frac{e^{-pR}}{R^2} dv, \tag{12}$$

die Integration über das ganze Volumen ausgedehnt.

Der von der Reflexion an der Oberfläche herrührende Theil i_3 wird gefunden, wenn wir in (Gl. 12) R durch $R_1 + R_2$ ersetzen, d. h. durch die Summe der Längen des von dv bis zur Oberfläche hingehenden und des von der Oberfläche nach M reflectirten Strahles und die Function unter dem $\int$ Zeichen mit $F_r(\varphi)$ multipliciren, wo φ der Reflexionswinkel und F_r die nach den Fresnel'schen Formeln bestimmte relative Intensität des innen reflectirten Strahles sind. Also

$$i_3 = \frac{\alpha K}{4\pi} \int f(x, y, z) \frac{e^{-p(R_1 + R_2)}}{(R_1 + R_2)^2} F_r(\varphi) \cdot dv \tag{13}$$

Endlich ist

$$i = f(a, b, c) = i_1 + i_2 + i_3 \tag{14}$$

In grösserer Tiefe, wo das directe Durchscheinen aufhört, sind i_1 und i_3 zu vernachlässigen und es bleibt nur $i = i_2$, (s. Gl. 12).

Es dürfte wohl nicht überflüssig sein, die Richtigkeit der Formel (12) dadurch zu prüfen, dass wenn $\beta = 0$ und $k = 1$, also $f(x, y, z) = \text{const.}\ i_0$ sind, (s. Gl. 8), für die Leuchtkraft i des Punktes (a, b, c) dieselbe Grösse erhalten werden wird. Führen wir Polarcoordinanten (R, φ, ψ) ein, mit dem Anfang in (a, b, c), so wird $dv = R^2 \sin \varphi \cdot d\varphi \cdot d\psi dR$ und (Gl. 12) gibt

$$i = r_0 \cdot \frac{\alpha K}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{-pR}\, R^2 \sin \varphi\, dR\, d\varphi\, d\psi}{R^2}$$

oder

$$i = i_0 \frac{\alpha K}{4\pi} \cdot \frac{4\pi}{p},$$

was bei $\beta = 0$, d. h. $p = \alpha$ und $K = 1$ in der That $i = i_0$ ergibt.

§ 3.

Um weiterhin Abschweifungen zu vermeiden, sollen hier einige auf den Integrallogarithmus bezügliche Formeln angeführt werden. Nach Soldner's [1]) Vorgange nennt man Integrallogarithmus und bezeichnet mit $li\,(z)$ die Function

$$li\,(z) = \int_0^z \frac{1}{\lg z}\,dz.$$

Wir werden nur mit dem Falle $z < 1$ zu thun haben.. Setzt man $z = e^{-x}$, so erhält man eine Function die wir durch $\omega\,(x)$ bezeichnen werden:

$$\omega\,(x) = li\,(e^{-x}) = -\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx. \tag{15 a}$$

Es ist

$$\left\{\begin{array}{l} \omega\,(x) = \lg x - x + \frac{x^2}{2\cdot 1\cdot 2} - \frac{x^3}{3\cdot 1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots + c \\ \omega\,(o) = -\infty;\ \omega\,(\infty) = 0. \end{array}\right\} \tag{15 b}$$

$$c = \lim\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \lg n\right]_{n=\infty} = 0{,}5772156649.. \tag{15 c}$$

Soldner hat (l. c., S. 43) die Function $li\,(z)$ für die Werthe von z zwischen 0 und 1 berechnet und zwar für $z = 0{,}01 - 0{,}02 - 0{,}03$ u. s. w. im ganzen 100 Zahlen, die natürlich alle negativ sind. Mit wachsendem x nähert sich $\omega\,(x)$ so schnell der Null, dass $x\omega\,(x)$ und sogar $e^x\omega(x)$ für $x = \infty$ den Grenzwert Null haben. Bei $x = 0$ wird $\omega\,(x)$ unendlich wie lgx. Wir merken folgende Formeln:

$$\frac{d\omega\,(x)}{dx} = \frac{e^{-x}}{x} \tag{15 d}$$

$$\frac{d\,\omega\,(px)}{dx} = \frac{e^{-px}}{x} \tag{15 e}$$

$$\lim\left[x\cdot\omega\,(x)\right]_{x=0} = 0 \tag{15 f}$$

$$\lim\left[x\cdot\omega\,(x)\right]_{x=\infty} = 0 \tag{15 g}$$

$$\lim\left[e^x\cdot\omega\,(x)\right]_{x=\infty} = 0 \tag{15 h}$$

$$\lim\left[e^{mx}\cdot\omega\,(px)\right]_{x=\infty} = 0\ (m < p) \tag{15 i}$$

1) J. Soldner „Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante" München 1809, pag. 7.

$$\lim \Big[\omega(mx) - \omega(nx)\Big]_{x=0} = \lg \frac{m}{n} \tag{15 k}$$

$$\lim \Big[\omega(x) - \lg x\Big]_{x=0} = c \; (= 0{,}57721\ldots) \tag{15 l}$$

$$\lim \Big[\omega(m \cdot x) - \lg nx\Big]_{x=0} = c + \lg \frac{m}{n} \tag{15 m}$$

$$\int_x^\infty \frac{e^{-px}}{x}\, dx = \omega(px) \tag{15 n}$$

$$\int_n^n \frac{e^{-px}}{x}\, dx = \omega(pn) - \omega(pm) \tag{15 o}$$

Alle diese Formeln sind leicht abzuleiten; am einfachsten, indem man für sehr kleine x einsetzt $\omega(x) = lgx + c$. Für die Grösse $\omega(a-x)$ habe ich drei Entwicklungen gefunden, auf deren eventuelle Anwendungen weiter unten nur hingewiesen werden wird. Ich führe die Formeln daher ohne Beweise an.

Durch Entwicklung des Integrales

$$\int_a^\infty \frac{e^{-x}}{x-q}\, dx$$

gelangt man leicht zu den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} &\omega(a-x) = \omega(a) - e^{-a+x} \sum_{n=1}^{\infty} x^n \lambda_n(a), \\ &\lambda_n(a) = \frac{1}{na^n} - \frac{1}{n(n-1)a^{n-1}} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)a^{n-2}} - \cdots \\ &\qquad - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{1\cdot 2\cdot 4 \cdots n a} \end{aligned}\right\} \tag{16 a}$$

$$\left.\begin{aligned} &\omega(x-a) = \omega(x) - e^{-x+a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sigma_n(a), \\ &\sigma_n(a) = \frac{a^n}{n} - \frac{a^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{a^{n+2}}{n(n+1)(n+2)} - \cdots \end{aligned}\right\} \tag{16 b}$$

Zerlegt man $\omega(a-x)$ direct nach dem Taylor'schen Satze und beachtet, dass der n-te Differentialquotient

$$\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} e^{-x}}{x^{n+1}} \Big[x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots +$$

$$+ n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\Big] = \frac{(-1)^{n-1}}{x^{n+1}} \int_x^\infty e^{-x} x^n\, dx$$

ist, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \omega(a-x) = \omega(a) - \sum \frac{x^n}{1\cdot2\cdot3\ldots n\cdot a^n}\int_a^\infty e^{-a}\, a^{n-1}\, da = \omega(a) - \\ - \sum \frac{x^n\, e^{-a}}{1\cdot2\cdot3\ldots n.a^n}\,\beta_n(a) \\ \beta^n(a) = a^n + na^{n-1} + n(n-1)a^{n-2} + n(n-1)(n-2)a^{n-3} + \ldots \\ + n(n-1)\ldots 3\cdot 2\;1 \end{aligned}\right\} \qquad (16\,c$$

§ 4.

Wir wenden uns nun zur speciellen Betrachtung der inneren Diffusion in einem Körper, der durch eine unendliche Ebene begrenzt wird, in welche das äussere Licht mit der überall gleichförmigen Intensität I eintritt. Es sei x die Entfernung eines Punktes von der Oberfläche; dann kann $i = f(x)$ gesetzt werden, da in allen Punkten einer zur Oberfläche parallelen Ebene, die Leuchtkraft der eingestreuten Theilchen gleich gross sein wird. Ein specieller Punkt sei durch $x = a$ characterisirt. Setzt man, (s. Gl. 14),

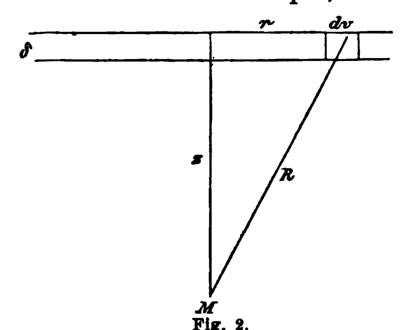


Fig. 2.

$$f(a) = i_1 + i_2 + i_3 \qquad (17$$

so ist, (s. Gl. 11), wenn das Licht zur Oberfläche auffällt,

$$i_1 = \frac{K\varrho^2}{4}\, Ie^{-pa} \qquad (18\,a$$

Bildet das auffallende Licht nach der Brechung mit der Normale zur Oberfläche den Winkel β_1, so wird,

$$i_1 = \frac{K\varrho^2}{4}\, Ie^{-\frac{pa}{\cos\beta_1}} \qquad (18\,b$$

Um i_2 zu finden, berechnen wir zuerst die Beleuchtung eines Theilchens M, Fig. 2, durch eine unendlich dünne, der Oberfläche parallele Schicht. Es sei δ die Dicke dieser Schicht und z die Entfernung derselben von M. Ein Element dv der Schicht habe die Polarcoordinaten (r, ψ), sodass $dv = r\,d\psi \cdot dr \cdot \delta$ ist. Ist i' die Leuchtkraft der Theilchen in der Schicht, so erhalten wir für die, durch die ganze leuchtende Schicht hervorgerufene Leuchtkraft di_2 des Theilchens M, nach (Gl. 12) den Ausdruck

$$di_2 = \frac{\alpha K}{4\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{\infty} \frac{i' e^{-pR}}{R^2} r\, d\psi \cdot dr \cdot \delta \cdot = \frac{\alpha K \delta i'}{2} \int\limits_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-pR}}{R^2} r\, dr \ldots \qquad (18\text{c}$$

Nun ist aber $R^2 = r^2 + z^2$; $r dr = R dR$ und für $r = 0$ ist $R = z$, also

$$di_2 = \frac{\alpha K \delta i'}{2} \int\limits_{z}^{\infty} \frac{e^{-pR}}{R}\, dR = \frac{\alpha K \delta i'}{2} \int\limits_{pz}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}\, dy$$

oder

$$di_2 = -\frac{\alpha K \delta i'}{2}\, \omega(pz) \qquad (19$$

So gross ist also die Leuchtkraft eines Theilchens welche hervorgerufen wird durch eine, in der Entfernung z von ihm befindliche unendliche Schicht, deren Dicke δ ist und in welcher die eingestreuten Theilchen die Leuchtkraft i' haben.

Hier haben α und p die in (Gl. 2) und (Gl. 3) gegebene Bedeutung; K ist das Albedo der Theilchen (s. Gl. 7).

Fig. 3.

Es sei nun, Fig. 3, PQ die Oberfläche der Platte; AB eine Schicht; $OC = x$, $OM = a$. Dann haben wir in (Gl. 19)

$$\delta = dx, \quad i' = f(x)$$

und für

$$a > x \ldots\ldots z = a - x.$$
$$a < x \ldots\ldots z = x - a$$

zu setzen. Es ist also

$$i_2 = -\frac{\alpha K}{2} \int\limits_{x=0}^{a} f(x)\, \omega(pa - px)\, dx - \frac{\alpha K}{2} \int\limits_{x=a}^{h} f(x)\, \omega(px - pa)\, dx, \qquad (20$$

wo h die Dicke der Platte ist.

Da die in (Gl. 13) auftretende Function $F_r(\varphi)$ sich nicht in solche Form bringen lässt, dass die Integrationen ausführbar würden, wollen wir ganz kurz

$$i_3 = \text{Refl.}$$

symbolisch ausdrücken.



Um jedoch weiter unten einen wichtigen Satz beweisen zu können, müssen wir die Form der Grösse i_3 aufsuchen. Es sei (Fig. 4) PQ die Oberfläche der Platte; AB eine Schicht und $A'B'$ das Spiegelgebild derselben. Dann ist in (Gl. 13) $R_1 + R_2 = MC + CD = MD = R$. Genau, wie in (Gl. 18,c) erhalten wir

$$d i_3 = \frac{\alpha K \delta i'}{2} \int\limits_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-pR}}{R^2} r\, dr\, F_r(\varphi).$$

Es ist $R^2 = r^2 + (x + a)^2$; $R\,dR = r\,dr$.

Ferner ist $\delta = dx$ und $\cos\varphi = \frac{x + a}{R} = \frac{px + pa}{pR}$.

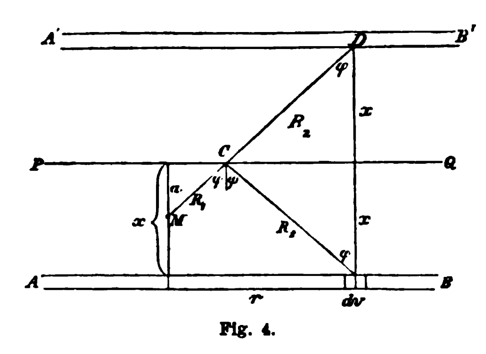


Fig. 4.

Setzen wir also $F_r(\varphi) = F\left(\frac{px + pa}{pR}\right)$, so wird

$$d i_3 = \frac{\alpha K i'}{2} dx \int\limits_{x+a}^{\infty} \frac{e^{-pR}}{R} F\left(\frac{px + pa}{pR}\right) dR$$

$$d i_3 = \frac{\alpha K f(x)}{2} dx \int\limits_{px+pa}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} F\left(\frac{px + pa}{y}\right) dy.$$

Nebenbei sei bemerkt, dass für $z < 1 - n^2$ (wo $n < 1$ der Brechungsexponent ist), F von der Form ist:

$$F(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{n^2 - 1 + z^2} - z}{\sqrt{n^2 - 1 + z^2} + z}\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{n^2 - 1 + z^2_1} - n^2 z}{\sqrt{n^2 - 1 + z^2} + n^2 z}\right]^2.$$

Für $z > 1 - n^2$ ist $F(z) = \text{const.} = 1$.

Setzen wir nun

$$\int\limits_{px+pa}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} F\left(\frac{px + pa}{y}\right) dy = \Omega(px + pa),$$

so wird

$$di_s = \frac{\alpha K f(x)}{2} \Omega (px + pa) dx$$

und endlich

$$\text{Refl.} = i_s = \frac{\alpha K}{2} \int_{x=0}^{\infty} f(x) \Omega (px + pa) dx. \tag{20 a}$$

Setzt man in Ω statt x und a die Grösse $h-x$ und $h-a$, so erhält man i_s', herrührend von der Reflexion an der anderen Oberfläche; h ist hier die Dicke der Platte.

Die Gleichungen 17, 18a, 20 und 20a geben nun die Hauptgleichung für den betrachteten Fall der inneren Diffusion in einer ebenen Platte:

$$\left.\begin{aligned} f(a) = \frac{K I \varrho^2}{4} e^{-ap} - \frac{\alpha K}{2} \int_0^a f(x) \omega (pa - px) dx - \\ - \frac{\alpha K}{2} \int_a^h f(x) \omega (px - pa) dx + \text{Refl.} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Fällt das Licht unter dem Winkel β auf die Platte, so ist das erste Glied rechts durch (Gl. 19a) zu ersetzen. Ist die Platte so dick, dass durch die Schicht $h-a$ kein Licht direct durchgestrahlt werden kann, so kann in dem dritten Gliede als obere Grenze der Integration $h = \infty$ gesetzt werden.

Der Gleichung 21 kann, auch bei $h = \infty$ und bei Vernachlässigung des letzten Gliedes, durch eine Function $f(a)$ von der Form Ae^{-ma} nicht genügt werden.

Das Trägheitsmoment und physische Pendel im Unterrichte.

Von

A. Kurz.

Ueber letzteres teilte Weilenmann im vorigen Jahrgange S. 562 bis 564 einiges mit, was nach meinen Erfahrungen zu weitläufig und auch zeitraubend erscheint und kürzer durch folgendes ersetzt werden könnte.

Man hat vom mathematischen Pendel $t = \pi \sqrt{l:g}$ und auch den Begriff des Trägheitsmoments vorausgeschickt.

Dann ist klar, dass dieses auch beim mathematischen Pendel seine Rolle spielen muss, wie sofort durch Multiplication mit dem Producte $m\,l$ auch einleuchten wird:

$$t = \pi \sqrt{m l^2 : m g l}.$$

Setzt man zur Abkürzung das eine Product K, das andere D und nennt dieselben bezw. Trägheits- und Directionsmoment, so hat man die Formel für das physische Pendel

$$t = \pi \sqrt{K:D};$$

denn der Beweis, dass auch für ein System Σm materieller Punkte sowohl K die im Abstand 1 von der Drehaxe angebracht zu denkende Masse als D die bei 90^0 (gedachter) Ausbeugung ebenso zu denkende Kraft ist, liegt ja schon im Begriffe des Trägheits- und des statischen (oder Drehungs-) Momentes.

Mit dem Namen „Directions"-Moment werden jene 90^0 mit Vortheil von dem factischen Drehungsmoment des Punktes

$$D \cdot \sin \varphi,$$

wo φ der jeweilige Ausschlag ist, unterschieden.

Gelegentlich bemerkt, habe ich jene zweite Gleichung im Jahrgange 1883 dieses Repert. S. 246 mit sieben Zeilen Text, also auch kurz, aber auf andere Weise bewiesen.



Ich will daran noch knüpfen die experimentelle Bestimmung von K während des Unterrichtes, und zwar nur mit der Messung der einzigen Schwingungsdauer t, nicht einer zweiten t_1, welche durch eine Zulage Q zu K und, wenn dies nur oberhalb der Drehaxe geschieht, durch eine von D abzurechnende Grösse S bewerkstelligt wird. (Auch diese letztere Rechnung ist zeitraubend.)

Ich bestimme nämlich D experimentell, indem ich das ganze Pendel wäge . . . . 4775 g,
und es hernach auf eine wenn auch etwas stumpfe Kante lege, wodurch der Schwerpunkt gefunden wird, welcher

76,5 cm

von der Drehaxe absteht. Also ist

$$D = 4775 \cdot 76{,}5 \cdot 981 = 358 \text{ Millionen}$$

und

$$K = D \cdot t^2 : \pi^2 \text{ nahe gleich } 36 \text{ Millionen},$$

wenn das Pendel als Secundenpendel abgerichtet ist.

Dieses mein Pendel habe ich der Atwood'schen Fallmaschine entnommen, bei welcher ich es ohnehin nicht mehr brauche, da ich dafür lieber das Metronom benutze.

Das anisochrone Pendel als Vorlesungsapparat.

Von

A. Kurz.

Eine kleine Bleikugel, an zwei Fäden aufgehängt, so dass diese die Schenkel eines gleichschenkeligen Dreieckes bilden, dessen Basis sozusagen Luft ist, kann bequem im vollen Kreise herumschwingen gelassen werden. Ist ein solcher Weg der Kugel $2a\pi$, also a die Höhe des genannten Dreieckes, so muss der Kugel im untersten Punkte des Kreises die Geschwindigkeit u, im obersten Punkte diejenige o zukommen, dass

$$u^2 = o^2 + 2g\,2a$$

und zugleich

$$o^2 \geqq ag;$$

denn ohne die letztere Bedingung bleibt bekanntlich der Faden nicht gespannt, sondern der von unten an etwa beschriebene Kreisbogen würde, ehe die Kugel den obersten Punkt erreicht, in ein Wurf-Parabel übergehen.

Die in der ersten Gleichung ausgedrückte Verwandlung von kinetischer in potenzielle Energie behandelt schon Poisson in seinem Traité de Méc., theils vor, theils nach dem Pendel; im § 159 und 181. Er spricht auch an beiden Stellen von dem Falle, als ob das Bewegliche den obersten Punkt mit der Geschwindigkeit Null erreichen könnte, was offenbar ein Versehen ist.

Dasselbe ging auch in Duhamels Lehrbuch der Mechanik über und in Schells Theorie der Bewegung und der Kräfte (Lehrbuch der theoret. Mech.). Auf S. 320 des letzteren heisst es, nachdem vom Faden als Mittel zum Zwang, auf dem Kreise zu bleiben, Erwähnung geschehen,

$$v_0^2 : 2g \lesseqgtr a + a\cos\alpha.$$

Hierin ist $a + a\cos\alpha$ die Tiefe der Anfangslage unter dem höchsten Punkte des Kreises und es sollen „im ersten Falle Oscillationen (Hin- und Hergänge), im letzten volle Umläufe stattfinden, im zweiten nähert sich der bewegliche Punkt dem höchsten asymptotisch“.

Statt dessen mache man eine Station im äussersten Punkte rechts oder links des Kreises und schreibe also

$$v_0^2 : 2g \leqq a \cos \alpha,$$

(die Anfangslage selbstverständlich im unteren Halbkreise gedacht wie vorhin), so ist dies der richtige Fall der Oscillationen mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \ldots \right\}.$$

Dagegen

$$v_0^2 : 2g > a \cos \alpha$$

hat mit dem Pendel nichts zu schaffen. Denn gesetzt auch die Kugel würde den Kreis im Aufsteigen über den äussersten Punkt rechts oder links einhalten bis zur Annahme der Geschwindigkeit Null, so würde sie alsdann von diesem höchsten Punkte in der verticalen Geraden herabfallen, soweit dies der Faden zulässt. Aber statt dessen geht die Kugel schon früher von der Kreisbahn in die parabolische Bahn über, wie schon weiter oben gesagt worden.

Einfacher ist es, wenn ich die Anfangsgeschwindigkeit v_0 in den untersten Punkt lege und wiederum mit u bezeichne, wobei, wie leicht zu sehen, nur statt $a \cos \alpha$ auf der rechten Seite a zu schreiben ist, und

$$u^2 : 2g \leqq a \quad \text{oder} \quad u^2 \leqq 2ga$$

ist für das Pendel, sowie

$$u^2 = 4ga + o^2,$$

wobei

$$o^2 \geqq ga,$$

für die (im vollen Kreise) rotirende Kugel.

Die Zwischenwerthe des u^2 von $2ga$ bis $5ga$ gelten der erwähnten Parabel, und ich will nun den Punkt aufsuchen, in welchem der Kreis in die Parabel übergeht.

Derselbe liegt jedenfalls im aufsteigenden Aste, d. h. der bewegliche Punkt erreicht alsdann nicht den obersten Punkt des Kreises. Es mag die zugehörige Geschwindigkeit v heissen, φ der spitze Winkel von v mit der verticalen Geraden, nach welcher die Beschleunigung g gerichtet ist. Der Krümmungsradius der Parabel ist allgemein

$$v^2 : g \sin \varphi;$$

wo dieser Werth $< a$ ist, da ist die Bahn parabolisch, und die Parabel beginnt bei

$$v^2 : g \sin \varphi = a \quad \text{oder} \quad v^2 = g \cdot b,$$

wenn b die Höhe dieses Punktes, in welchem der Kreis in die Parabel übergeht, über dem horizontalen Durchmesser des Kreises ist.

Es empfiehlt sich noch, die Geschwindigkeit u_0 einzuführen, mit welcher die bewegliche Kugel im Aufsteigen diesen Durchmesser trifft; also

$$u^2 - 2ga = u_0^2$$

zu setzen. Dann gelten für die Parabel die Zwischenwerthe von u_0^2 zwischen Null und $3ga$, welche man in dem Ausdrucke

$$3gb$$

zusammenfassen kann, worin b zwischen Null und a liegt und geradezu die vorhin erwähnte Bedeutung hat.

Regt man den im Eingange erwähnten Apparat zu Rotationen an, so wird durch Reibung die Geschwindigkeit verlangsamt; hernach kommt die Parabel zu Stande und zuletzt vollzieht die Kugel die Pendelschwingungen, die ziemlich nahe dem Isochronismus sind oder ihn vermöge der Reibung bald erreichen.

Vermöge der Elasticität des Fadens und der Wände, an welchen derselbe befestigt ist, springt die Bleikugel nach der Beschreibung der ersten Parabel meist nochmals über den horizontalen Durchmesser des Kreises herauf, so dass eine zweite Parabel entsteht, was man als unangenehme Störung oder als angenehme Wiederholung betrachten kann.

An dem Stosse, den der Apparat erfährt, so oft der absteigende Parabelast in den (unteren) Kreisbogen übergeht, merkt man deutlicher zuweilen als an der Betrachtung der oben hinüberfliegenden Kugel, ob man es schon mit einer Parabel oder noch mit einem vollständigen Kreise zu thun hat. Dies ist der Fall, wenn der Scheitel der Parabel nahe dem obersten Punkte des Kreises liegt; und alsdann kommt wohl auch noch eine dritte Parabel aus vorhin besagtem Grunde zur Erscheinung.

Protokoll der Versammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 4. Februar 1890.

Vorsitzender: Hofrat E. Ludwig.

Der Vorsitzende macht Mittheilung von dem Ableben des Mitgliedes der Gesellschaft Dr. J. Paneth. Die Versammlung erhebt sich zum Zeichen der Trauer.

Hierauf erfolgt die Mittheilung des Einlaufes (darunter Anzeiger der Krakauer Akademie und Memorias de la sociedat edentifica „Antonio Alrate" in Mexico) und die Verlesung der von Seite der mit Preisen ausgezeichneten Herren Prof. Dr. Karl Exner und Dr. G. Goldschmiedt eingelaufenen Dankschreiben.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Als Mitglieder werden aufgenommen die Herren: H. Benndorf, Dr. Hermann Grünbaum, Prof. Dr. Karl Hassak, Josef Ferd. Hiebl, Edmund von Moteschiczki, Prof. Anton Neumann, Dr. Ladislaus Niemilowicz, Dr. Karl Schierholz und Dr. Theodor Wähner.

Herr Dr. E. Lecher hält einen Vortrag: Ueber die Maxwell'sche Lichttheorie und die Hertz'schen Versuche.

Der Sekretär.

Protokoll der Versammlung
der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,
vom 11. Februar 1890.

Vorsitzender: Hofrath Stefan.

Herr Dr. R. Benedikt hält einen Vortrag: Ueber die Einwirkung von Chlorzink auf Oelsäure.

Derr Dr. J. Tuma spricht über Beobachtung der Schwebungen zweier Stimmgabeln mit Hilfe des Mikrophones.

Die Herren Dr. Gustav Jäger und Dr. Wilhelm Wirtinger werden als Mitglieder aufgenommen.

Der Sekretär.

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:	Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert & Co., Kommandit-Gesellschaft, Nürnberg. (2/6)	Fabrik elektrischer Maschinen für Beleuchtung, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.
Hartmann & Braun, Bockenheim-Frankfurt a/M.	Elektrische und magnetische Messinstrumente. Vollständige Einrichtungen von Laboratorien.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

Hierbei eine Beilage von **Julius Springer in Berlin.**

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

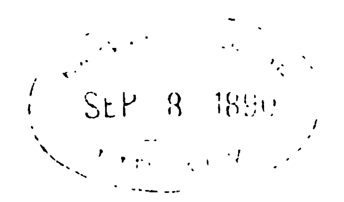
DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 7. Heftes.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1890.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.



Grundzüge einer mathematischen Theorie der inneren Diffusion des Lichtes.

Von

Dr. O. Chwolson.

(Schluss.)

Wir wenden uns zur Betrachtung eines Specialfalles, für welchen die vollständige Lösung keine Schwierigkeiten verursacht. Wir wollen die Lichtbewegung innerhalb einer so dicken Platte untersuchen, dass für die in Betracht kommenden Punkte derselben beide Oberflächen als unendlich entfernt anzunehmen sind.

Da in (Gl. 21) x und a die Entfernungen von der einen Oberfläche bedeuten, so ist es besser, für diesen Fall selbständige Gleichungen aufzustellen. Es möge jetzt in Fig. 3 PQ eine beliebige Ebene constanter i bedeuten und soll sie uns nur dazu dienen, um von ihr aus die x und a zu rechnen. Die Grösse $i = f(a)$ reducirt sich auf i_2. Dieselbe Betrachtung, die uns von (Gl. 19) zu (Gl. 20) führte, ergibt nun für $i = i_2$ in diesem Falle einen Ausdruck, der sich von (Gl. 20) nur durch die Grenzen unterscheidet; statt o und h werden wir $-\infty$ und $+\infty$ zu setzen haben und erhalten so

$$f(a) = -\frac{\alpha K}{2}\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\omega(pa - px)\,dx - \frac{\alpha K}{2}\int_{a}^{\infty} f(x)\,\omega(px - pa)\,dx. \qquad (22$$

Dieser Gleichung genügt eine Function von der Form

$$i = f(x) = Ae^{-mx} \qquad (23$$

Es ist klar, dass hierbei m unabhängig ist von der Lage der Anfangsebene PQ; wird diese verschoben, so ändert sich nur der Coefficient A.

Setzen wir in (Gl. 22) im ersten Integral $a - x = y$, im zweiten $x - a = y$, so wird

$$f(a) = -\frac{\alpha K}{2}\int_0^\infty f(a-y)\,\omega(py)\,dy - \frac{\alpha K}{2}\int_0^\infty f(a+y)\,\omega(py)\,dy.$$

Hier gibt nun der versuchsweise Ansatz (Gl. 23):

$$Ae^{-ma} = -\frac{\alpha K}{2} A e^{-ma}\int_0^\infty e^{my}\,\omega(py)\,dy - \frac{\alpha K}{2}\int_0^\infty e^{-my}\,\omega(py)\,dy.$$

Kürzt man diese Gleichung, so bleibt

$$-\frac{2}{\alpha K} = \int_0^\infty e^{my}\,w(py)\,dy + \int_0^\infty e^{-my}\,w(py)\,dy. \tag{24}$$

Da die Grösse a sich weggekürzt hat, so genügt also der Ansatz (Gl. 23) in der That der Gleichung 22. Zur Bestimmung von m dient die Gleichung 24.

Um die beiden Integrale in Gl. 24 zu berechnen, setzen wir, als untere Grenze, ε statt o und gehen dann erst zur Grenze $\varepsilon = o$ über. Es ist bei partieller Integration, s. (Gl. 15e, i, k, n),

$$\int_\varepsilon^\infty e^{my}\,\omega(py)\,dy = \left[\frac{\omega(py)}{m}\,e^{my}\right]_\varepsilon^\infty - \frac{1}{m}\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-(p-m)y}}{y}\,dy = -\frac{\omega(p\varepsilon)}{m}\,e_{m\varepsilon} + \\ + \frac{1}{m}\,\omega(p\varepsilon - m\varepsilon).$$

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-my}\,\omega(py)\,dy = \left[-\frac{\omega(py)\,e^{-my}}{m}\right]_\varepsilon^\infty + \frac{1}{m}\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-(p+m)y}}{y}\,dy = \\ \frac{\omega(p\varepsilon)\,e^{-m\varepsilon}}{m} - \frac{1}{m}\,\omega(p\varepsilon + m\varepsilon).$$

Setzen wir jetzt $\varepsilon = 0$, so wird

$$\int_0^\infty e^{my}\,\omega(py)\,dy = \frac{1}{m}\lg\frac{p-m}{p}; \quad \int_0^\infty e^{-my}\,\omega(py)\,dy = \frac{1}{m}\lg\frac{p}{p+m}.$$

Endlich gibt (Gl. 24)

$$-\frac{2}{\alpha K} = \frac{1}{m}\lg\frac{p-m}{p+m}$$

oder

$$\frac{\alpha K}{2}\lg\frac{p+m}{p-m} = m. \tag{25}$$

Diese Gleichung bestimmt also den Exponenten m, d. h. den Absorptionscoefficienten innerhalb der Platte an Stellen, die weit genug (s. o.) von den Oberflächen entfernt sind.

Hier ist α, der Absorptionscoefficient für den Fall, dass alle Theilchen schwarz sind, durch (Gl. 2) gegeben; p, s. (Gl. 3), unterscheidet sich sehr wenig von α und K ist das Albedo der Theilchen.

Setzen wir $\alpha = p$, d. h. vernachlässigen wir die Absorption in der Grundmasse, so können wir (Gl. 25) in die Form

$$\frac{K}{2} \lg \frac{1 + \frac{m}{p}}{1 - \frac{m}{p}} = \frac{m}{p} \tag{26}$$

bringen. Diese Gleichung bestimmt das Verhältnis $\frac{m}{p}$ der beiden Absorptionscoefficienten als Funktion des Albedo der eingestreuten Theilchen.

Ist $K = o$, d. h. sind die Theilchen absolut schwarz, so erhält man aus (Gl. 26) $m = p$, wie selbstverständlich.

Setzt man $m = o$, d. h. $i =$ const., so wird, da

$$\lim \left[\frac{1}{x} \lg \frac{1 + x}{1 - x}\right] = 2$$

ist, $K = 1$, wie es auch sein muss. Für alle anderen Werthe von K erhält man für $\frac{m}{p}$ einen echten Bruch.

Ehe wir zu einer näheren Untersuchung der Formel (26) übergehen, wollen wir die Bedeutung des Bruches $\frac{m}{p}$ oder richtiger des Bruches $\frac{p}{m}$ (> 1) klarlegen und einige neue Termina einführen. Die Grösse p wäre der Absorptionscoefficient der Platte für den Fall, dass die eingestreuten Theilchen völlig schwarz wären. Wir wollen der Kürze wegen diese Platte als „graue Platte" bezeichnen. Findet innere Diffusion statt, so werden wir die Platte weiss nennen. In der grauen Platte findet die Verminderung der Lichtstärke nach dem Gesetze e^{-px} statt, ist also durch px bestimmt. Wir wollen nun x die geometrische Tiefe, px dagegen die optische Tiefe eines Punktes der grauen Platte oder einer Ebene nennen. In gleiche optische Tiefen dringt also bei allen grauen Platten gleich viel Licht. Für das Innere der weissen Platte sei ebenso my die optische

Tiefe von irgend einer Anfangsebene aus gerechnet, wenn y die geometrische Tiefe ist. Die Grösse e^{-my} misst zwar eigentlich die Leuchtkraft der eingestreuten Theilchen, doch ist diese proportional der an den betreffenden Punkten vorhandenen Gesammtbeleuchtung. Es seien nun x und y solche geometrische Tiefen der grauen und der weissen Platte, welche gleichen optischen Tiefen d. h. gleichen Lichtschwächungen entsprechen. Dann ist

$$px = my$$

oder

$$\frac{p}{m} = \frac{y}{x} \tag{27}$$

Die Zahl $\frac{p}{m}$ zeigt also an, um wieviel tiefer ein gegebener Bruchtheil der anfänglichen Beleuchtung sich in der weissen Platte fortpflanzt, als in der grauen.

Wie man aus (Gl. 26) sieht, hängt diese Zahl nur von K ab, ist aber von p unabhängig, d. h. also unabhängig davon, ob die lichtzerstreuenden Theilchen mehr oder weniger dicht gelagert sind.

Denken wir uns eine Reihe von Platten, in denen allen die Theilchen dasselbe Albedo K haben. In allen diesen Platten werden die Punkte gleicher optischer Tiefe (von einer beliebigen inneren Ebene aus gerechnet) um gleichviel mal, nämlich um $\frac{p}{m}$ mal tiefer liegen, als in den entsprechenden grauen Platten.

Es folgt dies sofort aus der Gleichung $y = \frac{p}{m} x$.

Um die Abhängigkeit der Zahl $\frac{p}{m}$ von K zu zeigen, genügt es für eine Reihe von Werthen des Bruches $\frac{m}{p}$ die zugehörigen K zu berechnen. Für sehr kleine $\frac{m}{p}$ erhält man aus (Gl. 26)

$$K = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{m}{p}\right)^2 \tag{28}$$

Daraus folgt bereits, dass K sehr nahe gleich 1 sein muss, damit die Zahl $\frac{m}{p}$ gross sein kann. Aus (Gl. 26) berechnet sich die folgende Tabelle

Tabelle I.

$\frac{m}{p} =$ $= \frac{\text{Abs.-Coeff. i. d. weiss. Pl.}}{\text{Abs.-Coeff. d. grauen Pl.}}$	$\frac{p}{m} =$ $= \frac{\text{Tiefe in d. weiss. Pl.}}{\text{Tiefe in d. grauen Pl.}}$ (Die beiden Tiefen entsprechen gleichen Lichtschwächungen.)	Albedo der eingestreuten Theilchen K
0	∞	1
ε sehr klein	$\frac{1}{\varepsilon}$ (sehr gross)	$1 - \frac{1}{3}\varepsilon^2$
0,01	100	0,99996667
0,1	10	0,9967
0,2	5	0,9864
0,3	3,33	0,9692
0,4	2,5	0,9442
0,5	2	0,9102
0,6	1,666	0,8656
0,7	1,4157	0,8071
0,8	1,25	0,7282
0,9	1,1111	0,6117
0,99	1,01010	0,3740
1	1	0

Das anfänglich so überaus langsame Sinken der Zahlen K führt zu dem interessanten Satze:

Nur wenn das Albedo der eingestreuten Theilchen sehr gross (sehr nahe gleich eins) ist, d. h. wenn sie fast alles empfangene Licht wieder zerstreuen, wird die Lichtintensität innerhalb der weissen Platte merklich langsamer abnehmen, als das von aussen her in eine graue Platte eindringende Licht mit der Tiefe geschwächt wird.

Damit die Abschwächung im ersten Fall 100 mal langsamer vor sich gehe als im zweiten, dürfen die Theilchen nur $\frac{1}{30000}$ des empfangenen Lichtes absorbiren; 10 mal langsamere Abschwächung findet statt, wenn etwa $\frac{1}{300}$ absorbirt wird; es muss mehr als 0,9 wieder ausgestrahlt werden, um eine nur 2 mal langsamere Abschwächung zu erhalten; absorbiren die Theilchen 0,387 des empfangenen Lichtes, so geht die Abschwächung innerhalb der weissen Platte nur um $\frac{1}{9}$ langsamer vor sich, als in der grauen und nur um $\frac{1}{99}$ langsamer, wenn 0,626 absorbirt wird.

§ 6.

Wir wenden uns wiederum zur Betrachtung einer Platte von der endlichen Dicke h; die Grösse ph werden wir die optische Dicke bei fehlender Diffusion nennen (wären die eingestreuten Theilchen

absolut schwarz, also die Platte „grau“, so würde der e^{-ph}te Theil des auffallenden Lichtes hindurchgehen, wenn die Reflexion an den Oberflächen nicht gerechnet wird). Ebenso soll px „die optische Tiefe“ eines Punktes sein, der sich in der Entfernung x von der Oberfläche befindet. Für die Leuchtkraft eines Theilchens, für welches $x = a$ ist, fanden wir, (s. Gl. 20a und 21):

$$\left.\begin{aligned} i = f(a) = \frac{KI\varrho^2}{4} e^{-ap} - \frac{\alpha K}{2}\int_0^a f(x)\,\omega(pa - px)\,dx - \\ - \frac{\alpha K}{2}\int_a^h f(x)\,\omega(px - pa)\,dx + \frac{\alpha K}{2}\int_0^\infty f(x)\,\Omega(px + pa)\,dx \end{aligned}\right\} \qquad (29$$

Wir wollen nun einen, besonders für die Experimentaluntersuchung wichtigen Satz beweisen, welcher gültig ist für den Fall, dass man β im Vergleiche mit α, d. h. die Absorption des Lichtes in der Grundmasse vernachlässigt — was wohl stets erlaubt sein dürfte. Es ist dann $\alpha = p$, (s. Gl. 5). Der Satz lautet:

Verschiedene Platten mögen bei fehlender Diffusion von gleicher optischer Dicke sein ($ph = p_1 h_1 = p_2 h_2 = \ldots$, z. B. alle Platten nach einer Seite von unbegrenzter Dicke, $h = \infty$); K sei in allen Platten dasselbe und ebenso die Intensität I des in die Oberfläche eindringenden Lichtes. Dann findet in gleicher optischer Tiefe ($pa = p_1 a_1 = p_2 a_2 = \ldots$) in den verschiedenen Platten die gleiche Beleuchtung I statt. Kürzer ausgedrückt: in solchen Platten ist I eine Funktion von ap:

$$I = F(ap) \qquad (30$$

Da dies für das erste, von der directen Bestrahlung herrührende Glied von i, s. (Gl. 29), selbstverständlich ist, so liegt die Bedeutung des Satzes darin, dass in gleicher optischer Tiefe pa auch die Beleuchtung eines jeden Theilchens durch alle übrigen und durch das an der Oberfläche reflectirte Licht die gleiche ist. Die verschiedenen Platten können sich sowohl durch die Grösse der eingestreuten Theilchen, als auch durch die Dichtigkeit der Einstreuung unterscheiden.

Rein physikalisch ist der Satz so zu verstehen, dass wenn die Theilchen grösser oder dichter (oder beides) genommen werden, so wird ein Theilchen M von den zunächst benachbarten zwar stärker beleuchtet, von den weiter entfernten dringt aber weniger Licht.

Beweis des Satzes. Man kann sich die Leuchtkraft i auf eine Weise entstanden denken, welche analog ist den sog. succesiven Influenzen in der Elektrostatik. Ein bestimmtes Theilchen M wird zuerst

direct von aussen her beleuchtet, wodurch ein Theil von i entsteht, welcher durch das erste Glied in (Gl. 29) repräsentirt wird und welchen wir früher mit i_1 bezeichnet haben. Wir wollen ihn jetzt mit $f_1(a)$ bezeichnen, so dass also

$$f_1(a) = \frac{K I \varrho^2}{4} e^{-pa} \tag{30}$$

ist. Mit dieser Leuchtkraft wird nun jedes Theilchen von allen übrigen beleuchtet, wodurch zu $f_1(a)$ eine neue Grösse $f_2(a)$ hinzutritt. Diese hinzugekommene Lichtstärke f_2 kann nun als neue Beleuchtungsquelle angesehen werden und indem jedes Theilchen durch das $f_2(x)$ aller übrigen beleuchtet wird, tritt zu $f_1(a) + f_2(a)$ das dritte Glied $f_3(a)$ hinzu. Dieses ruft auf die nämliche Weise $f_4(a)$ hervor, dieses $f_5(a)$ u. s. w. Es ist nun klar, dass $f_2(a)$ gleich ist der Summe der drei letzten Glieder in (Gl. 29), wenn $f(x) = f_1(x)$, s. (Gl. 30); setzt man $f(x) = f_2(x)$, so geben jene Glieder $f_3(x)$ u. s. w. Ganz allgemein ist also (wir setzen $\alpha = p$, d. h. $\beta = o$, (s. Gl. 5):

$$\left.\begin{aligned} f_n(a) = &-\frac{pK}{2}\int_0^a f_{n-1}(x)\,\omega(pa-px)\,dx - \frac{pK}{2}\int_a^h f_{n-1}(x)\,\omega(px-pa)\,d+x \\ &+\frac{pK}{2}\int_0^\infty f_{n-1}(x)\,\Omega(px+pa)\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Wir wollen nun allgemein beweisen, dass wenn $f_{n-1}(a) = \varphi_{n-1}(pa)$ eine Function von pa ist, so ist auch $f_n(a)$ eine Funktion von pa. Es ist in diesem Falle also

$$\begin{aligned} f_n(a) = &-\frac{pK}{2}\int_0^a \varphi_{n-1}(px)\,\omega(pa-px)\,dx - \frac{pK}{2}\int_a^h \varphi_{n-1}(px)\,\omega(px+pa)\,dx + \\ &+\frac{pK}{2}\int_0^\infty \varphi_{n-1}(px)\,\Omega(px+pa)\,dx \end{aligned}$$

zu setzen.

Führen wir eine neue Variabele $px = y$ ein, so wird

$$\begin{aligned} f_n(a) = &-\frac{pK}{2}\int_0^{pa} \varphi_{n-1}(y)\,\omega(pa-y)\,\frac{dy}{p} - \frac{pK}{2}\int_{pa}^{ph} \varphi_{n-1}(y)\,\omega(y-pa\;\frac{dy}{p} + \\ &+\frac{pK}{2}\int_0^\infty \varphi_{n-1}(y)\,\Omega(y+pa)\,\frac{dy}{p}. \end{aligned}$$

Hier kürzt sich die Grösse p weg und es bleibt, da ph eine für alle betrachteten Platten constante gegebene Grösse ist, f_n als Funktion von pa, was vorläufig zu beweisen war.

Nun ist aber, s. (Gl. 30), f_1 das Product aus der constanten Grösse $\frac{KI\varrho^2}{4}$ in eine Function von $p a$. Setzt man (Gl. 30) statt $f_{n-1}(x)$ in (Gl. 31) und beachtet, dass p sich kürzt, so erhalten wir

$$f_1(a) = \frac{KI\varrho^2}{4} e^{-ap} = \frac{KI\varrho^2}{4} \psi_1(ap) = \varphi_1(ap)$$

und

$$f_2(a) = \frac{K^2 I\varrho^2}{4 \cdot 2} \psi_2(ap) = \varphi_2(ap). \tag{31 a}$$

Dies wiederum in (Gl. 31) eingesetzt, gibt

$$f_3(a) = \frac{K^3 I\varrho^2}{4 \cdot 2^2} \psi_3(ap) = \varphi_3(ap)$$

u. s. w.

Allgemein wird

$$f_n(a) = \frac{K^n I\varrho^2}{4 \cdot 2^{n-1}} \psi_n(ap) = \varphi_n(ap)$$

sein. Durch Addition erhält man endlich i in der Form

$$i = \frac{I\varrho^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n}{2^{n-1}} \psi_n(ap) \tag{32}$$

So gross ist also die Leuchtkraft eines der eingestreuten Theilchen M, welches sich in der Entfernung a von der Oberfläche befindet.

Um nun die im Punkte M stattfindende Beleuchtung J zu finden, wenden wir uns zur Formel 7, in welcher diese Beleuchtung mit I bezeichnet war. Sie ist also gleich $\frac{4i}{K\varrho^2}$, oder es ist die Beleuchtung J

$$J = I \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{n-1}}{2^{n-1}} \psi_n(ap) = IF(ap) \tag{33}$$

Sind also in den verschiedenen Platten die Theilchen verschieden gross (ϱ) oder verschieden dicht gelagert (r) oder beides, sind aber K, ph und I für alle Platten gleich, so herrscht in optisch gleich tiefen Punkten die gleiche Beleuchtung, w. z. b. w.

Der Schwerpunkt des Beweises liegt, wie man sieht, darin, dass in (Gl. 31) der Faktor p sich weghebt.

Wir haben bei dem Beweise die Glieder von i unberücksichtigt gelassen, welche durch die Reflexion an der zweiten Oberfläche ($a = h$) hervorgerufen werden. Es ist leicht einzusehen, dass auch bei Berücksichtigung dieser Glieder für J ein Ausdruck von der Form 33 erhalten wird.

Für die Experimentaluntersuchung beruht die Bedeutung dieses Satzes darin, dass man sehr dünne Platten aus stark zerstreuendem Stoffe durch dickere aus weniger stark zerstreuendem ersetzen kann — vorausgesetzt, dass in beiden Arten von Platten die zerstreuenden Theilchen von einerlei Art (K) sind und sich nur durch ihre Menge oder Grösse unterscheiden.

§ 7.

Wir haben in § 5 den speciellen Fall der Lichtverbreitung an denjenigen Stellen betrachtet, welche von den beiden Endflächen der Platte so weit entfernt sind, dass eine directe Beleuchtung jener Stellen als nicht mehr vorhanden angenommen werden kann. Im vorhergehenden § 6 war gezeigt worden, wie wir uns bei einer Platte von endlicher Dicke h die wahre Beleuchtung eines Punktes successive entstanden denken können. Die erste direkte Beleuchtung gibt das Glied i_1, s. (Gl. 18a und 29); dasselbe wurde in (Gl. 30) noch durch $f_1(a)$ bezeichnet. Wir wollen nun das zweite Glied $f_2(a)$ berechnen, welches durch die erste gegenseitige Zustrahlung der Theilchen entsteht. Da wir sie als einen Zuwachs von i_1 ansehen können, so werden wir noch die Bezeichnung

$$f_2(a) = \Delta i_1 \tag{33a}$$

einführen. Wir setzen also als erste Annäherung

$$i = f_1(a) + f_2(a) = i_1 + \Delta i_1 = \frac{KI\varrho^2}{4} e^{-ap} + \Delta i_1 \tag{33b}$$

Um diesen Ausdruck zu berechnen, haben wir, nach dem im vorigen Paragraph Gesagten, in (Gl. 29) statt $f(a)$ die Grösse

$$f_1(x) = \frac{KI\varrho^2}{4} e^{-ax}$$

einzusetzen. Das letzte Glied in (Gl. 29) vernachlässigen wir selbstverständlich. So erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} i = \frac{KI\varrho^2}{4} e^{-ap} - \frac{K^2 I\varrho^2 a}{8} \Bigg[\int_0^a e^{-px}\,\omega(pa - px)\,dx + \\ + \int_a^h e^{-px}\,\omega(px - pa)\,dx \Bigg] \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Es ist, $pa - px = y$ gesetzt und dann partiell integrirt:

$$\int_\varepsilon^a e^{-px}\,\omega(pa - px)\,dx = \frac{e^{-pa}}{p}\int_{p\varepsilon}^{pa} e^y\,\omega(y)\,dy = \frac{e^{-pa}}{p}\Big[e^y\,\omega(y)\Big]_{p\varepsilon}^{pa} -$$

$$- \frac{e^{-pa}}{p}\int_{p\varepsilon}^{pa}\frac{dy}{y} = \frac{\omega(pa)}{p} - \frac{e^{-pa}}{p}\lg pa - \frac{e^{-pa}}{p}\left\{e^{p\varepsilon}\,\omega(p\varepsilon) - \lg(p\varepsilon)\right\}.$$

Nach (Gl. 15f) und (Gl. 15k) ist der Grenzwerth (für $\varepsilon = 0$) des Ausdruckes in den Klammern $= c = 0{,}57721\ldots$ Also ist

$$-\int_0^a e^{-px}\,\omega(pa - px)\,dx = \frac{e^{-pa}}{p}\{\lg ap + c - e^{ap}\,\omega(ap)\}. \quad (35a$$

Setzen wir in dem zweiten Integral (Gl. 34) $px - pa = y$:

$$\int_a^h e^{-px}\,\omega(px - pa)\,dx = \frac{e^{-pa}}{p}\int_\sigma^{p(h-a)} e^{-y}\,\omega(y)\,dy.$$

Wir berechnen zuerst durch partielle Integration und mit Berücksichtigung von (Gl. 15o) das Integral

$$\int_\varepsilon^{p(h-a)} e^{-y}\,\omega(y)\,dy = -\int_\varepsilon^{p(h-a)} \omega(y)\,de^{-y} = -\Big[e^{-y}\,\omega(y)\Big]_\varepsilon^{p(h-a)} + \int_\varepsilon^{p(h-a)} \frac{e^{-2y}}{y}\,dy =$$

$$= -e^{-p(h-a)}\,\omega(ph - pa) + \omega(2ph - 2pa) + \{e^{-\varepsilon}\,\omega(\varepsilon) - \omega(2\varepsilon)\}.$$

Der Grenzwerth des Ausdruckes in den Klammern ist gleich $-\lg 2$. Also ist

$$\left.\begin{aligned}-\int_a^h e^{-px}\,\omega(px - pa)\,dx = \frac{e^{-pa}}{p}\{\lg 2 + e^{-ph+pa}\,\omega(ph - pa) -\\ - \omega(2ph - 2pa)\}.\end{aligned}\right\} \quad (35b$$

(Gl. 35a) und (Gl. 35b) in (Gl. 34) eingesetzt ergeben

$$\left.\begin{aligned}i = \frac{KI\varrho^2}{4}e^{-ap} + \frac{K^2 I\varrho^2}{8}\cdot\frac{\alpha}{p}\cdot e^{-ap}\{\lg 2ap + c - e^{ap}\,\omega(ap) +\\ + e^{-p(h-a)}\,\omega(ph - pa) - \omega[2p(h-a)]\}.\end{aligned}\right\} \quad (36$$

Es sei daran erinnert, dass die ω nur negative Werthe besitzen. Im weiteren setzen wir $\alpha = p$. Für unendlich tiefe Platten verschwinden die zwei letzten Glieder und es bleibt:

$$\left.\begin{aligned}i = i_1 + (\varDelta i_1)^{h=\infty} = \frac{KI\varrho^2}{4}e^{-ap} + (\varDelta i_1)^{h=\infty},\\ (\varDelta i_1)^{h=\infty} = \frac{K^2 I\varrho^2}{4}\cdot\frac{e^{-ap}}{2}\{\lg 2ap + c - c^{ap}\,\omega\,ap)\}.\end{aligned}\right\} \quad (36a$$

Für die infolge der inneren Diffusion entstehende **erste, relative Verstärkung der Beleuchtung** erhalten wir bei einer **Platte von der Dicke h in einer Tiefe a:**

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\varDelta i_1}{i_1}\right) = \frac{K}{2}\{\lg 2ap + c - e^{ap}\,\omega(ap) + e^{-p(h-a)}\,\omega(ph - pa) -\\ - \omega[2p(h-a)]\}.\end{aligned}\right\} \quad (37$$

Für unendlich tiefe Platten wird

$$\left(\frac{\varDelta i_1}{i_1}\right)^{h=\infty} = \frac{K}{2}\{\lg 2ap + c - e^{ap}\,\omega(ap)\}. \quad (37a$$

An der beleuchteten Oberfläche ist $a = 0$ und hier erhalten wir

$$\left(\frac{\varDelta i_1}{i_1}\right)_{a=0} = \frac{K}{2}\{\lg 2 + e^{-ph}\,\omega(ph) - \omega(2ph)\}. \tag{38}$$

und **für unendlich tiefe Platten an der Oberfläche die erste relative Verstärkung:**

$$\left(\frac{\varDelta i_1}{i_1}\right)_{a=0}^{h=\infty} = \frac{K}{2}\lg 2 = 0{,}34657\ldots K. \tag{38a}$$

An der entgegengesetzten Oberfläche ist $a = h$ und da die Summe der letzten zwei Glieder in (Gl. 37) hierbei den Grenzwerth $-\lg 2$ erhält, so wird

$$\left(\frac{\varDelta i_1}{i_1}\right)_{a=h} = \frac{K}{2}\{\lg ph + c - e^{ph}\,\omega(ph)\}. \tag{39}$$

In der folgenden Tabelle II sind die Werthe der Grössen $(\varDelta i_1)^{h=\infty}$ und $\left(\frac{\varDelta i_1}{i_1}\right)^{h=\infty}$ für verschiedene Werthe von e^{-ap} nach der Formel (37 a) ausgerechnet. Da $\omega(ap) = li\,(e^{-ap})$ ist, so können aus den Soldner'schen Tafeln die Werthe der ω direct entnommen werden. Das erste Glied von i, s. (Gl. 36), bezeichnen wir durch $i_1(a)$; dann ist $e^{-ap} = \frac{i_1(a)}{i_1(0)} = \frac{i_1(a)}{\frac{1}{2}KI\varrho^2}$ die Abschwächung des Lichtes in der Tiefe a bei fehlender Diffusion, d. h. in der „grauen" Platte.

Tabelle II.

Die Platte ist unendlich dick; $h = \infty$.

$e^{-ap} = \frac{i_1(a)}{i_1(0)} = \frac{i_1(a)}{\frac{1}{2}KI\varrho^2}$	$(\varDelta i_1)^{h=\infty} = \frac{K^2 I\varrho^2}{4}\cdot\frac{e^{-ap}}{2}\cdot\{\lg 2ap + c - e^{ap}\,\omega(ap)\}$	$\left(\frac{\varDelta i_1}{i_1}\right)^{h=\infty} = \frac{K}{2}\{\lg 2ap + c - e^{ap}\,\omega(ap)\}$
1 ($a = 0$)	0,34657 $\frac{K^2 I\varrho^2}{4}$	0,34657 K $\left(= \frac{K}{2}\lg 2\right)$
0,99	0,36811 —	0,37182 K
0,9	0,44695 —	0,49661 K
0,8	0,47515 —	0,59394 K
0,7552	0,4778 —	0,63202 K
0,7	0,47465 —	0,67807 K
0,6	0,45297 —	0,75496 K
0,5	0,42029 —	0,84059 K
0,4	0,36305 —	0,90764 K
0,3	0,29710 —	0,99033 K
0,2	0,21719 —	1,08594 K
0,1	0,12141 —	1,21409 K
0,01	0,01490 —	1,49025 K
Sehr kleine Zahl	Sehr kleine Zahl	Sehr grosse Zahl $\frac{K}{2}\lg 2ap$
0 = ($a = \infty$)	0	∞

Für sehr kleine Werthe der Grösse e^{-ap}, also für sehr grosse ap wird das letzte Glied in der Klammer, $-e^{-ap}\,\omega(ap)$, sehr klein; für $e^{-ap} = 0{,}99$ ist jene Grösse gleich 4,03296 (für $e^{-ap} = 1$ ist sie ∞); für $e^{-ap} = 0{,}01$ ist sie nur noch gleich 0,18297.

Desto tiefer wir in die Platte eindringen, eine desto grössere erste, relative Erhöhung der Helligkeit finden wir also. Die **absolute** Grösse $(\varDelta i_1)^{h=\infty}$ dieser Erhöhung hat nicht etwa ihr Maximum an der Oberfläche, sondern wächst anfangs mit der Tiefe, erreicht ein Maximum und sinkt dann wieder, um schliesslich unendlich klein zu werden. Das Maximum der Grösse $(\varDelta i_1)^{h=\infty} = \frac{K^2 I \varrho^2}{4}\, e^{-ap}\,[\lg 2\,ap + c - e^{ap}\,\omega(ap)]$ findet statt bei

$$\lg 2\,ap + c = 0$$

$$e^{-ap} = \sqrt{e^{-e^{-c}}} = 0{,}7552 \tag{40}$$

und ist der Maximalwerth

$$\frac{K^2 I \varrho^2}{8}\,\mathrm{li}\,(0{,}7552) = 0{,}4773 \cdot \frac{K^2 I \varrho^2}{4}.$$

Es ist das Verhältniss

$$\frac{(\varDelta i)^{h=\infty}_{\max.}}{(\varDelta i)^{h=\infty}_{a=0}} = 1{,}3771.$$

§ 8.

Wir wenden uns zu Platten von endlicher Dicke h. In den hierauf bezüglichen Formeln (35b, 36, 37 und 38) findet sich überall eine Funktion, die wir hier der Kürze wegen durch $\lambda(x)$ bezeichnen wollen, nämlich

$$\lambda(x) = e^{-x}\,\omega(x) - \omega(2x) \tag{41}$$

Die Werthe dieser Function sind stets negativ und wachsen von $-lg\,2 = -0{,}69315$ bei $x = 0$, oder $e^{-x} = 1$, bis Null bei $x = \infty$, oder $e^{-x} = 0$.

Es ist

$$\lambda(x) = e^{-x}\,\mathrm{li}\,(e^{-x}) - \mathrm{li}\,(e^{-2x})$$

und daher nach den Soldner'schen Tafeln leicht die folgende Tabelle auszurechnen:

Tabelle III.

e^{-x}	$\lambda(x) = e^{-x}\,\omega(x) - \omega(2x)$
1 $(x = 0)$	$-$ 0,69315 $(= - \lg 2)$
0,9	$-$ 0,41810
0,8	$-$ 0,27659
0,7	$-$ 0,18222
0,6	$-$ 0,11652
0,5	$-$ 0,07067
0,4	$-$ 0,039385
0,3	$-$ 0,019083
0,2	$-$ 0,0071299
0,1	$-$ 0,0014092
0 $(x = \infty)$	0

Wir wollen nun für verschieden dicke Platten speciell die beiden Oberflächen in Betracht ziehen, und zwar mit Hilfe der Formeln (38) und (39). Es ist ph die optische Dicke der „grauen" Platte (d. h. bei fehlender Diffusion); e^{-ph} ist die durch die direkte Beleuchtung an der Grenzfläche h erzeugte Leuchtkraft, die an der andern Fläche gleich eins gesetzt: $(i_1)_{a=0} = 1$ oder, was dasselbe ist, die Lichtabschwächung in dieser grauen Platte.

Tabelle IV.

Lichtabschwächung in der Platte bei fehlender Diffusion („graue Platte") $e^{-ph} = (i_1)_h$	Erster, relativer Helligkeitszuwachs an der ersten Oberfläche. $\left(\frac{\Delta i_1}{i_1}\right)_{a=0} = \frac{K}{2}[\lg 2 + \lambda(ph)]$	Erster, relativer Helligkeitszuwachs an der zweiten Oberfläche. $\left(\frac{\Delta i_1}{i_1}\right)_{a=h}$
1 $(h = 0)$	0	0
0,9	0,13752 K	0,15004 K
0,8	0,20828 K	0,24737 K
0,7	0,27546 K	0,33150 K
0,6	0,28831 K	0,40839 K
0,5	0,31124 K	0,49402 K
0,4	0,32688 K	0,56107 K
0,3	0,33703 K	0,64376 K
0,2	0,34301 K	0,73937 K
0,1	0,34527 K	0,86752 K
0 $(h = \infty)$	0,34657 $K = \frac{K}{2}\lg 2$	∞

Aus den Zahlen dieser Tabelle lässt sich nun die folgende ausrechnen:

Tabelle V.

Als Einheit der Leuchtkraft dient $(i_1)_{a=0}$, d. h. die an der ersten Oberfläche durch die direkte Beleuchtung erzeugte Leuchtkraft $(i_1)_{a=0} = 1$.

ph = optische Dicke der „grauen" Platte (bei fehlender Diffusion); e^{-ph} — Lichtabschwächung in derselben Platte = Beleuchtung $(i_1)_h$ an der zweiten Oberfläche bei fehlender Diffusion.

$e^{-ph} =$ $= (i_1)\,h$	$(\Delta i_1)_{a=0}$	$(\Delta i_1)_{a=h}$	$(i_1 + \Delta i_1)_{a=0}$	$(i_1 + \Delta i_1)_{a=h}$	$\sigma = \frac{(i_1 + \Delta i_1)_{a=h}}{(i_1 + \Delta i_1)_{a=0}}$ $K = 1$	$\frac{\sigma}{e^{-ph}}$
1 (h=0)	0	0	1	1	1	1
0,9	0,13752 K	0,13504 K	1+0,13752 K	0,9+0,13504 K	0,9099	1,011
0,8	0,20828 K	0,19790 K	1+0,20828 K	0,8+0,19790 K	0,8259	1,032
0,7	0,27546 K	0,23205 K	1+0,27546 K	0,7+0,23205 K	0,7307	1,044
0,6	0,28831 K	0,24503 K	1+0,28831 K	0,6+0,24503 K	0,6559	1,093
0,570377	0,29399 K	0,249046 K	1+0,29399 K	0,5704+0,24905 K	—	—
0,5	0,31124 K	0,24701 K	1+0,31124 K	0,5+0,24701 K	0,5698	1,116
0,4	0,32688 K	0,22443 K	1+0,32688 K	0,4+0,22443 K	0,4706	1,178
0,3	0,33703 K	0,19313 K	1+0,33703 K	0,3+0,19313 K	0,3688	1,229
0,2	0,34301 K	0,14787 K	1+0,34301 K	0,2+0,14787 K	0,2590	1,295
0,1	0,34527 K	0,086752 K	1+0,34527 K	0,1+0,08675 K	0,1388	1,388
0 ($h=\infty$)	0,34657 K	0	1+0,34657 K	0	0	∞

Von besonderem Interesse ist hier die dritte Colonne, welche den ersten, absoluten Lichtzuwachs (infolge der gegenseitigen Zustrahlung der Theilchen) an der zweiten Oberfläche ($x = h$) der Platte angibt.

Es ist s. (Gl. 39),

$$(\Delta i_1)_h = \frac{K}{2} e^{-ph} \{\lg ph + c - e^{ph}\,\omega(ph)\} \tag{42}$$

immer $(i_1)_0 = 1$ gesetzt; $c = 0{,}5772156649\ldots$

Diese Grösse hat ein Maximum bei $lg ph + c = 0$, d. h.

$$ph = e^{-c} = 0{,}561463$$

oder

$$e^{-ph} = e^{-e^{-c}} = 0{,}570377. \tag{43}$$

Dieser Maximumwerth ist gleich

$$-\frac{K}{2}\,\omega(e^{-ph}) = -\frac{K}{2}\,\mathrm{li}\,(e^{-e^{-c}}) = 0{,}249046\ K.$$

Der, durch die gegenseitige Zustrahlung erzeugte **erste, absolute,** Zuwachs an Helligkeit an der **zweiten** Oberfläche der Platten wächst also anfangs mit wachsender Dicke der Platten und erreicht ein Maximum, wenn die Platte bei fehlender Diffusion $e^{-e^{-c}} = 0{,}570377$ des auffallenden Lichtes hindurchlassen würde. Der Zuwachs ist gleich $0{,}249046\, K$.

Interessant ist auch die vorletzte Colonne, welche für den extremen Fall $K = 1$ das Verhältnis σ der, an den beiden Oberflächen stattfindenden Beleuchtungen darstellt, wenn die erste gegenseitige Zustrahlung berücksichtigt wird; die erste Colonne enthält dasselbe Verhältnis e^{-ap} für den Fall, dass gar keine gegenseitige Zustrahlung stattfindet. Die Zahlen der letzten Colonne zeigen endlich um wieviel, bei $K = 1$, infolge der ersten gegenseitigen Zustrahlung, in gewissem Sinne, die Durchdringbarkeit der Platte für Licht gewachsen ist.

Nehmen wir z. B. eine Platte, welche 0,7 des auffallenden Lichtes durchlassen würde, wenn alle eingestreuten Theilchen absolut schwarz wären; es wäre also 0,7 für diesen Fall auch das Verhältnis der an den beiden Oberflächen stattfindenden Beleuchtungen. Infolge der ersten gegenseitigen Zustrahlung wird dies Verhältnis gleich 0,7307, wächst also um 0,044 seines Werthes. Diese Zahlen sind von Bedeutung als Grenzwerthe bei $K = 1$, wenn die Theilchen alles erhaltene Licht wieder ausstrahlen. Bei $K < 1$ werden die σ den e^{-ph} und die Zahlen der letzten Colonne der Eins näher kommen.

§ 9.

Wir haben bisher nur die Grenzwerthe der Grösse Δi_1 betrachtet, welche $a = 0$ und $a = h$ entsprechen, und wenden uns nun zur Untersuchung dieser Grösse für a, welche > 0 und $< h$ ist, d. h. wir wollen den, durch die gegenseitige Zustrahlung erzeugten, ersten, absoluten Lichtzuwachs Δi_1 für Punkte, die innerhalb der Platte liegen, untersuchen. Wir sahen im vorhergehenden Paragraphen, dass für unendlich dicke Platten das Maximum der Grösse Δi_1 in einer Tiefe liegt, welche durch $e^{-ap} = 0{,}7552$ bestimmt wird.

Es zeigt sich, dass auch für endliche Platten ein Maximum der Grösse Δi_1 existirt; dies Maximum liegt in einer Tiefe, die stets geringer ist, als die durch $e^{-ap} = 0{,}7552$ definirte und stets näher zur ersten Oberfläche, als zur zweiten.

Wäre die erste Beleuchtung $i_1 = \text{const. } C_1$, so würde durch die gegenseitige Zustrahlung ein erster Zuwachs Δi_1 entstehen, welcher

sich leicht berechnen lässt, indem man in (Gl. 34) statt e^{-px} ein Constant $= C_1$ einsetzt. Man erhält (durch einfache partielle Integration):

$$\Delta i_1 = \frac{K}{2}\{2 - pa \cdot \omega(pa) - (ph - pa)\,\omega(ph - pa) - e^{-pa} - e^{-(ph-pa)}\}\,C_1 \qquad (43\text{a}$$

(die ω sind negative Grössen!).

Das Maximum dieser Grösse ist bei

$$a = \frac{h}{2}$$

und ist gleich

$$(\Delta i_1)_{a=\frac{h}{2}} = K\left\{1 - \frac{ph}{2}\,\omega\left(\frac{ph}{2}\right) - e^{-\frac{ph}{2}}\right\} C_1 \qquad (43\text{b}$$

während an den beiden Oberflächen

$$(\Delta i_1)_{a=0} = (\Delta i_1)_{a=h} = \frac{K}{2}\{1 - ph \cdot \omega(ph) - e^{-ph}\}\; C_1 \qquad (43\text{c}$$

ist.

Für eine Platte, deren Dicke z. B. durch $e^{-ph} = 0{,}81$ definirt ist, wäre $(\Delta i_1)_{a=\frac{h}{2}} = 0{,}28710\; C_1$; und $(\Delta i_1)_{a=0} = (\Delta i_1)_{a=h} = 0{,}21934\; C_1$.

In Wirklichkeit ist aber i_1 nicht constant, sondern variirt nach dem Gesetz $A\,e^{-pa}$; die erste Beleuchtung wird desto stärker, je mehr wir uns der ersten Oberfläche nähern, daher auch das Maximum näher zur ersten Oberfläche hinrückt.

Der allgemeine Ausdruck für Δi_1 ist, nach (Gl. 36), (wir setzen, wie früher $\alpha = p$ und $(i_1)_{a=0} = \frac{K I \varrho^2}{4} = 1$)

$$\left.\begin{aligned} \Delta i_1 = \frac{K}{2}\,e^{-ap}\{\lg 2\,ap + c - e^{ap}\,\omega(ap) + \\ + e^{-(h-a)}\,\omega(ph - pa) - \omega(2\,ph - 2\,pa)\}. \end{aligned}\right\} \qquad (44$$

Diese Grösse erhält ihren Maximumwerth bei einer Tiefe ap, definirt durch

$$\lg 2\,ap + c - \omega(2\,ph - 2\,pa) = 0 \qquad (45$$

und es ist

$$(\Delta i_1)_{\max.} = \frac{K}{2}\{-\omega(ap) + e^{-ph}\,\omega(ph - pa)\} \qquad (46$$

In (Gl. 45) ist $-\omega(2\,ph - 2\,pa)$ eine positive Grösse; es muss daher

$$\lg 2\,ap + c < 0$$

sein. Dies gibt

$$ap < \tfrac{1}{2}\,e^{-c};\; ap < 0{,}28074$$

und

$$e^{-ap} < \sqrt{e^{-e^{-c}}} \text{ oder } e^{-ap} < 0{,}7552.$$

Die für $h = \infty$ gefundene Tiefe, in welcher Δi_1 seinen grössten Werth erhält, ist also eine maximale. In Platten von endlicher Tiefe h liegt der grösste Werth, $(\Delta i)_{max.}$, in geringerer, durch (Gl. 45) bestimmter Tiefe.

Es ist schwierig, aus der Gleichung (45) für einen gegebenen Werth von ph den zugehörigen von ap zu finden, dagegen ist es leicht, umgekehrt diejenige Plattendicke ph (oder den Werth von e^{-ph}) zu finden, bei welcher Δi_1 seinen Maximumwerth in einer gegebenen Tiefe pa oder bei einem gegebenen e^{-pa} erhält.

Tabelle VI.

Maximum von Δi_1 befindet sich in einer Tiefe, für welche $e^{-ap} =$	Wenn die Dicke h der Platte ergibt für $e^{-ph} =$
$0,7552 = \sqrt{e^{-e^{-e}}}$	0 ($h = \infty$)
0,8	0,4913
0,9	0,7856
0,906	0,8000
0,907	0,8019
0,91	0,8089
0,95	0,9171
0,99	0,989
1	1 ($h = 0$)

In einer Platte, für welche $e^{-ph} = 0,8$, befindet sich das Maximum von Δi_1 in einer Tiefe, für welche $e^{-ap} = 0,906$ ist. Dieser Maximumwerth ergibt sich aus (Gl. 46) als gleich $0,2665\ K$, während an den Oberflächen (s. Tabelle IV) $0,20828\ K$ und $0,19790\ K$ gefunden worden war.

Ich habe für diesen speciellen Fall ($e^{-ph} = 0,8$) auch noch zwei Mittelwerthe von Δi_1 ausgerechnet, und zwar für $e^{-ap} = 0,95$ und $e^{-ap} = 0,85$, unter Zugrundelegung der Formel (44):

Tabelle VII.

Dicke der Platte definirt durch $e^{-ph} = 0,8$.

pa	$e^{-pa} = i_1$	Δi_1
0	1 ($a = 0$)	0,2083 K
0,0513	0,95	0,2580 K
0,0987	0,906	**0,2665** K (Max.)
0,1625	0,85	0,2544 K
0,2231	0,8 ($a = h$)	0,19790 K

Stellt man Δi graphisch als Function der ap dar, so erhält man eine Curve, die etwas steiler zuerst sich erhebt, als sie nachher wieder sich senkt. Der Scheitelpunkt befindet sich nicht in der Mitte, sondern ist gegen die Ordinatenaxe verschoben.

Wir finden noch für dieselbe Platte ($e^{-ph} = 0{,}8$)

$$\frac{(\Delta i_1)_{\text{max.}}}{(\Delta i_1)_{a=0}} = 1{,}2794.$$

Für $h = \infty$ was die entsprechende Zahl gleich 1,3771.

Wir haben uns in den beiden letzten Paragraphen lediglich mit der ersten durch die gegenseitige Zustrahlung entstehenden Vergrösserung von i_1 beschäftigt. Δi_1, (s. Gl. 44) $\left(K I \varrho^2 = 1 \text{ gesetzt}\right)$, ist nichts Anderes, als die in (Gl. 31 a) mit $f_2(a)$ bezeichnete Grösse. Um weiter zu gehen, müssten die $f_3(a)$ berechnet werden, das ist die Leuchtkraft, welche ein Punkt in der Tiefe a erhält infolge davon, dass er von allen übrigen mit der Leuchtkraft $\Delta i_1 = f_2(a)$ beleuchtet wird. Es müsste in (Gl. 44) x für a und der so entstandene Ausdruck statt $f_{n-1}(x)$ in (Gl. 31) eingeführt werden. Mit Hilfe der Formeln (15 n, o) können die so entstehenden Integrale zwar ausgerechnet werden, doch erhält man hierbei Ausdrücke von zu wenig handlicher Form. Es fragt sich nun, in welchem Falle der Ausdruck (36) eine wirkliche Annäherung an den wahren Werth von i darstellt? Wenn die Platte eine bedeutende optische Dicke hat und K gross ist, so ist dies durchaus nicht der Fall — übrigens ist im § 5, (s. Gl. 23 und 26), für ein beliebiges K der Werth von i für Punkte gefunden, die sehr weit von den beiden Oberflächen entfernt sind — es ist dies gleichsam eine Grenzform, welcher sich die Funktion i mit wachsender Tiefe und Dicke assymptotisch nähert.

Der in (Gl. 36) gefundene Ausdruck von $i = i_1 + \Delta i_1$ und die in den Tabellen II, V, VII ausgerechneten Werthe der Δi_1 können als wirkliche Annäherungen gelten, wenn K klein ist, die eingestreuten Theilchen viel Licht absorbiren und überhaupt nur eine geringe Diffusion vorhanden ist.

§ 10.

Für Platten von geringer optischer Dicke, für welche etwa e^{-ph} nicht $< 0{,}7$ ist, lassen sich für die Werthe der i ziemlich enge Grenzen angeben, innerhalb welcher sie sich jedenfalls befinden müssen.

Die Grösse Δi_1 hat ein Maximum bei dem durch (Gl. 45) gegebenen ap und erreicht ihren kleinsten Werth bei $a = h$. Es sei

$$\text{Max. } \Delta i = C_{\text{max.}};\ \text{Min } \Delta i = (\Delta i)_{a=h} = C_{\text{min.}}$$

Denken wir uns alle Werthe von Δi_1 durch einen constanten Werth C_1 ersetzt, d. h. legen wir, statt der von den beiden Oberflächen nach innen zunehmenden Beleuchtung C eine überall constante C_1 der weiteren Rechnung zu Grunde. Diesen Fall behandeln die Formeln (43a, 43b und 43c).

Es sei

$$\left.\begin{aligned} 1-\frac{ph}{2}\,\omega\left(\frac{ph}{2}\right)-e^{-\frac{ph}{2}} &= n \\ \frac{1}{2}\left\{1-ph\,\omega(ph)-e^{-ph}\right\} &= m. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Wir erhalten an den beiden Oberflächen eine Minimumlichtstärke KmC_1 und in der Mitte der Platte ein Maximum KnC_1.

Nehmen wir nun statt der Δi_1 in allen Punkten der Platte den Max.-Werth $C_{\max.}$; so erhalten wir an den beiden Oberflächen die zweiten Zuwüchse der Lichtstärken $KmC_{\max.}$ und in der Mitte $KnC_{\max.}$ Die so erhaltene Lichtvertheilung ersetzen wir wieder durch eine überall constante, gleich dem Maximalwerth $KnC_{\max.}$ derselben. Dies gibt an den Oberflächen $K^2nmC_{\max.}$ und in der Mitte $K^2n^2C_{\max.}$ Wiederum nehmen wir für alle Punkte als neue Lichtquellen die constante Intensität $K^2n^2C_{\max.}$ und erhalten an den Oberflächen K^3n^2m und in der Mitte K^3n^3. Indem wir so immer weiter gehen, erhalten wir Reihen, deren sämmtliche Glieder zu gross sind. An den Oberflächen erhalten wir

$$C_{\max.}\,Km\left\{1+Kn+K^2n^2+K^3n^3+\cdots\right\}=\frac{mK}{1-nK}\,C_{\max.}$$

und in der Mitte der Platte

$$C_{\max.}\,Kn\left\{1+Kn+K^2n^2+\cdots\right\}=\frac{nK}{1-nK}\,C_{\max.} \tag{48}$$

Hätten wir statt $C_{\max.}$ den Werth $C_{\min.}$ angenommen und weiterhin jede Lichtvertheilung durch eine überall constante, gleich den Minimumwerthen $KmC_{\min.}$, $K^2m^2C_{\min.}$ u. s. w. ersetzt, so hätten wir an den Oberflächen $\frac{mK}{1-mK}\,C_{\min.}$ und in der Mitte $\frac{nK}{1-mK}\,C_{\min.}$ erhalten.

Setzen wir also, (s. Gl. 36),

$$i=\frac{KI\varrho^2}{4}\left\{i_1+\Delta i_1+\delta i_1\right\} \tag{48a}$$

wo $i_1=e^{-pa}$ und Δi_1 in (Gl. 44) gegeben ist, so ist an beiden Oberflächen

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{mK}{1-nK}\,C_{\text{max.}} \gtrless (\delta i_1)_{\substack{a=h\\a=0}} \gtrless \dfrac{mK}{1-mK}\,C_{\text{min.}} \\ \text{und in der Mitte der Platte} \\ \dfrac{nK}{1-nK}\,C_{\text{max.}} \gtrless (\delta i_1)_{a=\frac{h}{2}} \gtrless \dfrac{nK}{1-mK}\,C_{\text{min.}} \end{array}\right\} \quad (49$$

Hier sind m und n in (Gl. 47) gegeben.

Ferner ist, (s. Gl. 39)

$$C_{\text{min.}} = (\varDelta i_1)_{a=h} = \frac{K}{2}\,e^{-ph}\left\{\lg ph + c - e^{ph}\,\omega(ph)\right\}$$

und $C'_{\text{max.}} = \text{Max. } \varDelta i_1$ durch (Gl. 45 und 46) bestimmt.

Für alle anderen Punkte der Platte erhält man die entsprechenden Grenzen, wenn man in den Zählern der Ausdrücke (49) statt m und n die allgemeine Grösse q setzt, welche man erhält, wenn man (Gl. 43a) in der Form $\varDelta i_1 = K q C_1$ schreibt.

Zahlenbeispiel. Die Dicke der Platte sei durch $e^{-ph} = 0{,}8$ definirt. Dann ist, Tabelle VII,

$$C_{\text{max.}} = 0{,}2665\ K, \qquad C_{\text{min.}}\ 0{,}1979.$$

Ferner erhalten wir aus (Gl. 47)

$m = 0{,}2265; \qquad n = 0{,}2981.$

Es ist also, aus (Gl. 49), an den Oberflächen

$$\frac{0{,}06036\ K^2}{1-0{,}2981\ K} > (\delta i_1)_{a=\left\{\substack{h\\0}\right.} > \frac{0{,}04482\ K^2}{1-0{,}2265\ K}$$

und in der Mitte

$$\frac{0{,}07944\ K^2}{1-0{,}2981\ K} > (\delta i_1)_{a=\frac{h}{2}} > \frac{0{,}058994\ K^2}{1-0{,}2265\ K}.$$

Es sei beispielsweise $K = 0{,}75$. Dann ist

$$0{,}04384 > (\delta i_1)_{a=\left\{\substack{h\\0}\right.} > 0{,}03001$$

$$0{,}05770 > (\delta i_1)_{a=\frac{h}{2}} > 0{,}03950.$$

Für dieselbe Platte ist, s. Tabelle VII,

$(\varDelta i_1)_0 = 0{,}2083 \cdot 0{,}75 = 0{,}1562;\ (\varDelta i_1)_h = 0{,}1979 \cdot 0{,}75 = 1484;$
da ferner $(i_1)_0 = 1$ und $(i_1)_h = 0{,}8$, so gibt (Gl. 48a):

bei $a = 0$

$$1{,}2000 \cdot \frac{K I \varrho^2}{4} > i_0 > 1{,}1862\,\frac{K I \varrho^2}{4}$$

und bei $a = h$

$$0{,}9922\,\frac{K I \varrho^2}{4} > i_h > 0{,}9784\,\frac{K I \varrho^2}{4}.$$

Der Werth der Helligkeit ist also innerhalb zweier Grenzen eingeschlossen, die sich um etwa 1,3 % von einander unterscheiden.

Das Verhältnis der an den beiden Oberflächen stattfindenden Beleuchtungen kann sich nur sehr wenig von der Zahl 0,8266 unterscheiden, während es bei fehlender Diffusion 0,8 gewesen wäre.

Die Grenzen, innerhalb welcher wir die Grösse δi_1 eingeschlossen haben, könnten noch viel enger gezogen werden, wenn wir, statt für Δi_1 in der weiteren Rechnung Constans zu setzen, eine andere, der Wahrheit näher kommende Funktion eingeführt hätten, z. B. eine parabolische Abhängigkeit der Grösse Δi_1 von h oder vielleicht von e^{-ph}. Ist aber $e^{-ph} < 0{,}5$, oder gar $e^{-ph} = 0$ (für welchen Fall die Zahlen Δi_1 der Tabelle II gelten), so wird jede ähnliche Methode der Annäherung hinfällig. Auf den Fall $e^{-ph} = 0$ bezieht sich der § 5.

Die Theorie des ersten Purpurlichtes.[1])

Von

Dr. J. M. Pernter.

Das eingehende Studium der Dämmerungserscheinungen, welches durch die aussergewöhnliche Pracht derselben im Winter 1883/84 veranlasst und später fortgesetzt wurde, hat zu einer neuen Theorie des ersten Purpurlichtes geführt. Kiessling[2]) war der erste, welcher dasselbe als Beugungserscheinung auffasste. Riggenbach[3]) begründete diese Anschauungen eingehender auf Grund vieler eigener Beobachtungen und führte die Theorie weiter aus. Gegen diese Ansichten erhob besonders Riccó[4]) mehrere Einwürfe, die ihn zur Ablehnung der neuen Theorie führten. Mit Riccó sprachen sich auch Rollo Russel und E. Douglas Archibald gegen dieselbe aus[5]).

Die Auffassung des ersten Purpurlichtes als Beugungserscheinung ist aber von weittragender Bedeutung für die meteorologische Optik und verdient daher eine gründliche Prüfung; dies um so mehr, als meines Wissens bisher eine genügende Widerlegung der Einwürfe, welche gegen dieselbe erhoben wurden, nicht erfolgte.

Führen wir uns vorerst die Erscheinung des ersten Purpurlichtes in seinen charakteristischen Eigenschaften vor Augen. Diese sind: 1. Es tritt stets erst eine gewisse Zeit nach Sonnenuntergang auf (wir beschränken uns auf die Abenddämmerung); 2. Es entwickelt sich über den horizontalen Farbenschichten des Horizontes, welche nach Nord und Süd hin weit verlaufen, als kreisförmig begrenzte

---

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus der Zeitschr. f. Meteorologie 1890.

2) Die Dämmerungserscheinungen im Jahre 1883. Hamburg und Leipzig. Voss 1885, S. 31 ff.

3) Beobachtungen über die Dämmerung, insbesondere über das Purpurlicht und seine Beziehungen zum Bishop'schen Sonnenring. Verhandl. der naturforsch. Gesellschaft in Basel. 8. Theil, 1. Heft 1886, S. 41.

4) Academia dei Lincei. Rendiconti 1885—1886, vol. II p. 6.

5) The eruption of Krakatoa and subsequent phenomena. Report of the Krakatoa Committee of the Royal Society. London 1888, p. 196 ff. und p. 247 ff.

Scheibe mit einer horizontalen Basis von 30—40° Breite; 3. Die Färbung desselben ist bei normalen Dämmerungen stets ganz beschränkt auf rothe Töne von Purpur und Rosa [1]), 4. es zieht sich, indem seine hellste Stelle rasch gegen den Horizont zu sinkt, scheinbar hinter dem hellen Segmente hinab und scheint als Begrenzung des letzteren in seiner ganzen Ausdehnung zu enden. Man sieht es also nicht als Purpurlicht untergehen.

Es sind nun drei Vorgänge, welche zur Erklärung dieser Erscheinung herbeigezogen werden können: Reflexion, Brechung und Beugung. Kiessling [2]) entscheidet sich, nach eingehender Erörterung, für die Beugung, ohne jedoch die Mitwirkung von Reflexion und Brechung gänzlich auszuschliessen. Kiessling's Gedankengang ist etwa folgender:

Die rothe Farbe ist unabhängig von dem Vorgange, durch welchen man das erste Purpurlicht erklären will, denn dieselbe ist dadurch gegeben, dass das Sonnenlicht nach Sonnenuntergang die tiefsten Schichten der Atmosphäre durchdringen muss, um über dem Horizonte des Beobachters, sei es durch Reflexion, Brechung oder Beugung, dem Auge sichtbar zu werden. Bei diesem Durchgang durch die untersten Schichten wird es aber schon roth (siehe die oben citirten Abhandlungen von Lord Rayleigh und Mc. Connel) und ist daher seine Röthe nicht erst aus dem Vorgange der Reflexion, Brechung oder Beugung an den Theilchen der hohen Luftschichten zu erklären.

Desgleichen stimmen alle drei genannten Vorgänge darin überein, dass sie die Strahlen von ihrem geraden Wege ablenken in das Auge des Beobachters; soweit sind sie also alle drei geeignet, das erste Purpurlicht zu erklären.

Es ist aber die Gestalt und der Verlauf desselben, welcher uns Anhaltspunkte liefert, zu entscheiden, welches der wesentliche Vor-

---

1) An den Ecken zwischen der rothen Scheibe des Purpurlichtes und dem hellen Segmente treten grüne Farbentöne auf, welche erwiesenermaassen keine Contrastfarben sind. Bezüglich der Erklärung dieser grünen Färbungen möchte ich auf eine Bemerkung Strutt's (Lord Rayleigh) am Ende seiner Abhandlung: On light from the sky etc. (Phil. Magazine 4. Ser. Bd. 41, p. 116) hinweisen. Er hatte gezeigt, dass von Theilchen welche kleiner als eine Lichtwellenlänge sind, zerstreutes Licht immer blau, das von innen durchgelassene immer roth sein müsse. Wenn aber diese Theilchen eine grössere Luftschichte einnehmen, durch welche das Licht durchgeht, so gibt es eine gewisse Schichtendicke, bei der das durchgehende Licht grün erscheinen muss. (Siehe auch Mc. Connel, On diffraction colours etc. Phil. Magazine 5. Ser. Bd. 28, p. 288).

2) Untersuchungen über Dämmerungserscheinungen. Hamburg und Leipzig. Voss 1888, S. 153 ff.



gang ist, der diese specifische Gestalt des ersten Purpurlichtes und seinen Verlauf bedingt.

Würde das erste Purpurlicht schlechtweg der Reflexion des Sonnenlichtes an den in den Höhen der Atmosphäre schwebenden Körperchen (Staub, Wassertröpfchen, Eisnadeln) zu verdanken sein, so müsste es als allgemeine, fast ganz gleichmässige Röthung des westlichen Himmels, in überall gleicher Breite, der ganzen horizontalen Ausdehnung des Dämmerungsbogens entlang erscheinen, und nicht auf letzterem als eine kreisförmige Scheibe von nur etwa 30° horizontaler Breite aufsitzen.

Man hat wohl versucht, das Fehlen der Röthe rechts und links von der kreisförmigen Scheibe durch die Absorption zu erklären, welche die reflektirten Strahlen da erleiden, weil, wie man sagte, hier der Weg durch die Atmosphäre ein soviel längerer sei. Allein Kiessling hat gezeigt, dass letzteres gar nicht der Fall ist, indem die Entfernung der lichtreflektirenden Schichte an der hellsten Stelle des Purpurlichtes eine grössere ist, als die Entfernung dieser Schichte in der Richtung rechts und links vom Purpurlichte, wo die Färbung eine bläulichweisse oder grünliche ist. Ueberdies „müsste, wenn die Abrundung des Purpurlichtes nur durch Absorption bewirkt würde, die rothe Färbung desselben ganz allmählich in den verdeckenden rauchigen Dunst übergehen, was keineswegs der Fall ist. Je klarer die Luft ist, desto schärfer hebt sich der Rand der rothen Färbung von der bläulichweissen oder grünlichen seitlichen Umgebung ab“. (Kiessling a. a. O. S. 11.)

Reflexion allein ist also durchaus ungenügend zur Erklärung des ersten Purpurlichtes. Ob und inwieweit dieselbe dabei mit thätig ist, kann hier nicht untersucht werden; jedenfalls ist sie nicht schlechtweg auszuschliessen, da ja Licht, wo immer es auf Körper stösst, immer auch eine Reflexion erleidet.

Das erste Purpurlicht ist koncentrirtes Licht (wenn man so sagen darf), es tritt normal nur in einer kreisförmigen Scheibe auf. Diese Koncentration und Form desselben ist durch Reflexion nicht zu erklären; es erübrigt somit noch die Brechung und Beugung. Besehen wir uns zuerst die Brechung.

Wollte man in Höhen über 10,000 m nur Eisnadeln als brechende Körper vorhanden annehmen, so könnte man daraus die Form des ersten Purpurlichtes nicht genügend erklären. Nachdem es sich hierbei nicht um die Brechung weissen, sondern nur rothen Lichtes handelt, so würde durch die Brechung desselben in Eisnadeln ein rother Bogen von 23° oder 46° Halbmesser um den Sonnenort als Mittelpunkt erscheinen, dessen Breite nur gering sein könnte.

Nehmen wir aber an, in diesen grossen Höhen befänden sich Tröpfchen überkalteten Wassers oder wohl auch durchsichtige Eiskügelchen, so ist es allerdings richtig, dass die Wirkung der Brechung in denselben in unserem Falle, wo es sich nur um rothes Licht handelt, eine rothe Scheibe, deren Mittelpunkt der Sonnenort ist, sein müsste — vorausgesetzt, der Durchmesser dieser Tröpfchen wäre wenigstens einige Male grösser als die Wellenlänge des rothen Lichtes und es würden daher die gewöhnlichen Brechungsgesetze zu Recht bestehen. Die Erscheinung, wie sie infolge der Brechung allein eintreten würde, lässt sich dann leicht berechnen. Es müsste ein Lichtschein um den Sonnenort als Mittelpunkt sich ausbreiten, der bis etwa 82° von der Sonne reichen würde; seine Intensität würde noch in 30° Entfernung von der Sonne etwa ein Drittel derjenigen der Mitte betragen, in 40° Entfernung noch etwa ein Siebentel. Ich setze die von Clausius[1]) (allerdings für weisses Licht) berechneten Zahlen hierher:

Ablenkung	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
Intensität	1	0,83	0,54	0,28	0,14	0,06	0,03

Kiessling beschränkt sich darauf, zuzugeben, das wohl die Brechung beim ersten Purpurlichte auch mit einfliessen dürfte. Wir müssen uns aber die Sache näher ansehen.

Das erste Purpurlicht tritt folgendermaassen in Erscheinung: In etwa 16° Höhe (18°,3 Abstand von der Sonne) beginnt es sichtbar zu werden und verbreitet sich dann so, dass anfänglich sein unterer Rand gegen den Horizont zu, sein oberer gegen das Zenith zu sich ausbreitet; bei einer Sonnentiefe von 3°,5—4° erreicht sein oberer Rand einen Sonnenabstand von 37°, sein unterer von 10°; zu dieser Zeit tritt seine grösste Lichtstärke ein, wobei in etwa 15°,2 Höhe (18°,9 Sonnenabstand) die hellste Stelle desselben zu liegen kommt, also nahe in demselben Sonnenabstand, in welchem es zuerst sichtbar wurde. Bei einer Sonnentiefe von 5°,5 erreicht der untere Rand einen Sonnenabstand von 8°,5 (Höhe 3°) und von da ab scheint er hinter dem auf dem Horizonte aufstehenden Dämmerungsbogen sich hinabzuziehen, bis die Sonnentiefe etwa 6° beträgt, wo dann der obere Rand in einer Höhe von etwa 10° (Sonnenabstand etwa 16° und gleichzeitig das ganze Purpurlicht verschwindet. Diese Schilderung des Verlaufes ist nach Riggenbach's Messungen im Jahre 1885 entworfen (a. a. O. S. 29 u. S. 37). Die Beschreibung von Bezold's und Hellmann's stimmen damit im wesentlichen überein, ohne dass sie genaue Messungen enthalten.

1) Poggendorf, Annalen, 16. Bd. (1849), S. 169.

Es ist nothwendig, diesen Verlauf vor Augen zu halten, um uns ein Urteil bilden zu können, ob die Brechung als genügende Ursache für das erste Purpurlicht angesehen werden kann.

Vorerst möchte es scheinen, dass die Form desselben, die kreisförmige rothe Scheibe, durch die Brechung erklärt werden könne; ist es ja doch die Wirkung der Brechung in Wasserkügelchen, dass sich um die Sonne ein mit der Entfernung von derselben an Intensität abnehmender Lichtschein ausbreiten muss. Allein dieser Lichtschein müsste sich, wie obige Zahlen zeigen, viel weiter ausbreiten, als dies beim Purpurlicht unter normalen Verhältnissen der Fall ist. Die grösste Ausdehnung zeigt das Purpurlicht, nach Riggenbach's Messungen, zur Zeit der grössten Lichtstärke desselben, wo sein oberer Rand bis zu einem Sonnenabstand von 37°,5 reicht. In 40° Sonnenabstand hat aber der Lichtschein, wenn er von der Brechung herrührt noch ein Siebentel der Intensität der Mitte. Berücksichtigt man, dass die hellste Stelle des Purpurlichtes in nicht ganz 20° Sonnenabstand liegt und diese, falls dasselbe von der Brechung in Wasserkügelchen herrühren würde, etwas mehr als 0,54 der Intensität der Mitte betragen würde, so würde also der fragliche Schein schon in einer Entfernung nicht mehr sichtbar sein, wo er noch fast ein Viertel der Intensität der hellsten Stelle betragen muss, wenn er von der Brechung herrührt. Ist dies schon an sich nicht wohl denkbar, so erscheint es ganz ausgeschlossen, wenn man überlegt, dass gerade um diese Zeit die allgemeine Tageshelle in einem Sonnenabstande von 40° schon fast ganz verschwindet, so dass die leiseste rothe Färbung da erkenntlich sein müsste, und noch viel weiter gegen das Zenith zu wahrnehmbar werden müsste.

Jedenfalls müsste man erwarten, das bei zunehmender Dunkelheit dieser rothe Lichtschein in immer grösseren Sonnenabständen noch sichtbar werden müsste. Die Beobachtung lehrt uns aber das Gegentheil; mit weiter zunehmender Sonnentiefe liegt der obere Rand des Purpurlichtes nun in einem immer kleineren Sonnenabstande.

Dazu kommt noch, dass das Purpurlicht zur Sonne excentrisch ist, was in der Auffassung desselben als Brechung nicht erklärlich wäre. Denn die Ausbreitung des hellen Scheines infolge der Brechung in durchsichtigen Kügelchen ist von der Grösse der letzteren unabhängig. Es wäre also da kein Grund für die Excentricität des ersten Purpurlichtes erfindlich.

Endlich ist es eine wenig wahrscheinliche Annahme, dass in diesen Höhen Tröpfchen flüssigen oder gefrorenen Wassers in Menge vorhanden seien und ist daher eine Erklärung, welche dieselben als Grundbedingung fordert, von vornherein auf schwache Füsse gestellt.

Es ist jedoch ohne weiteres zuzugeben, dass, falls solche Tröpfchen in den grossen Höhen, in welchen das erste Purpurlicht seinen Sitz hat, existiren, dieselben auch Brechungserscheinungen hervorrufen müssen. Diese werden aber, nach dem Gesagten, ebenso wie die Reflexion an den dort schwebenden Theilchen nur von untergeordnetem Einflusse sein.

Da uns also weder Reflexion noch Brechung zu einer genügenden Erklärung des ersten Purpurlichtes geführt haben, so erübrigt uns nur noch die Beugung. Wir wollen nun sehen, ob wir mit Hilfe der Gesetze der Beugung an kleinen, unregelmässig vertheilten Theilchen die ganze Erscheinung des Purpurlichtes in Form und Verlauf erklären können.

Kiessling beschränkt sich hierbei auf folgende zwei Beweisgründe: 1. Wo immer kleine Stofftheilchen vom Lichte getroffen werden, tritt Beugung ein und ist dieselbe vollständig unabhängig davon, ob diese Stofftheilchen für Licht durchlässig sind oder nicht; 2. sind diese Stofftheilchen so angeordnet, dass von unten nach oben immer kleinere vorhanden sind, so ist das Beugungsbild zur Lichtquelle excentrisch, wie es durch Glasplatten, welche von unten nach oben mit immer kleineren Quecksilbertröpfchen beschlagen waren, nachgewiesen wurde.

Diese zwei Gründe zusammengehalten mit dem negativen Ergebnisse aus Reflexion und Brechung sprechen wohl für die Beugungstheorie des ersten Purpurlichtes, geben aber noch keine vollkommene Darstellung der Erscheinung in ihren Einzelheiten.

Riggenbach hat den Gedanken Kiessling's durch viele Messungen an der Erscheinung des ersten Purpurlichtes geprüft. Seine Messungen fallen in die Zeit der Sichtbarkeit des Bishop'schen Ringes. Kiessling's Auffassung des ersten Purpurlichtes als Fortsetzung des Bishop'schen Ringes bildete denn auch den Ausgangspunkt der Messungen Riggenbach's. Dieselben ergaben folgende Resultate:

1. Der Bishop'sche Ring verschwand bei einer Sonnentiefe von beiläufig 2°, um fast dieselbe Zeit — nur wenig später — erscheint das erste Purpurlicht.

2. Die Stelle der grössten Helle des Bishop'schen Ringes kurz vor seinem Verschwinden befand sich etwa in 19°,2 Sonnenabstand; die hellste Stelle des ersten Purpurlichtes, bald nachdem es sichtbar ist, liegt in etwa 18°,6 Sonnenabstand — bei der Schwierigkeit genauer Messungen eine auffallende Uebereinstimmung.

3. Das Licht des Bishop'schen Ringes ist senkrecht zum Radius desselben schwach polarisirt (also senkrecht auf die Polarisationsebene des gewöhnlichen blauen Himmelslichtes); desgleichen zeigt sich auch das rothe Licht des ersten Purpurlichtes senkrecht auf den durch die Sonne gehenden grössten Kreis schwach polarisirt.

Aus dieser Uebereinstimmung zieht Riggenbach den Schluss, dass das erste Purpurlicht im wesentlichen eine Fortsetzung des Bishop'schen Ringes und daher eine Beugungserscheinung ist.

Nicht jedem Pupurlichte geht aber eine solche sichtbare Beugungserscheinung, wie es der Bishop'sche Ring war, voraus und ist die Frage berechtigt: warum nicht? da ja beide wesentlich das Gleiche sein sollen und von der gleichen Ursache herrühren sollen. Beide sollen Beugungsbilder sein, hervorgerufen durch viele unregelmässig vertheilte „runde“ Körperchen. Darauf wäre zu erwidern, dass, falls die Anzahl dieser lichtbeugenden Körperchen eine sehr geringe ist die Intensität des gegebenen Lichtes so klein ist, dass es nicht eher in Sichtbarkeit treten kann, als bis die Helle des zerstreuten Tageslichtes eine geringere ist, als die des gebeugten Lichtes. Das Vorhandensein einer so lichtschwachen, dem Bishop'schen Ringe wesentlich gleichen Beugungserscheinung an gewöhnlichen klaren Tagen gibt sich übrigens dem Polariskope kund. Ich habe schon

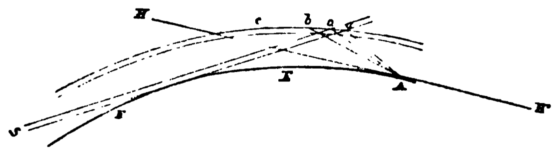


Fig. 1.

im Dezember-Heft 1889 S. 453, darauf hingewiesen, dass die neutralen Punkte und ihr Verhalten bei und nach Sonnenuntergang, sowie die Lage der Polarisationsebene innerhalb derselben uns die Existenz eines solchen lichtschwachen unsichtbaren Bishop'schen Ringes verrathen.

All' dies macht es nun wohl höchst wahrscheinlich, dass das erste Purpurlicht eine Beugungserscheinung sei, es überhebt uns aber nicht der Pflicht, die Frage noch eingehender und ins Detail zu erwägen.

Konstruiren wir uns das erste Purpurlicht als Beugungserscheinung nach der Theorie und prüfen wir dann, ob dieses theoretische Purpurlicht mit dem thatsächlichen übereinstimmt.

Wenn die Sonne untergegangen ist und die Sonnenstrahlen beim Durchgang durch die unteren Schichten der Atmosphäre nur mehr rothes Licht geben, so haben wir zunächst eine monochromatische Lichtquelle. Befinden sich in den hohen Schichten der Atmosphäre viele unregelmässig vertheilte „runde“ Körperchen, seien es nun Wassertröpfchen, Staub oder dergleichen, so wird das monochromatisch-rothe Licht an denselben eine Beugung erleiden, welche Frauenhofer'sche Ringe erzeugt. Sind diese Körperchen, wie nicht anders zu erwarten,

nicht alle gleich gross, sondern von beträchtlich verschiedener Grösse, so wird die Erscheinung sich auf die Aureole reduciren. Die Aureole bei monochromatisch rothem Lichte ist aber eine rothe Scheibe, deren Durchmesser von der Grösse der Körperchen abhängt, mit der (rothen) Sonne als Mittelpunkt. (Siehe hierüber meinen Artikel „Zur Theorie des Bishop'schen Ringes" im November-Heft 1889 dieser Zeitschrift.)

Das erste Purpurlicht erscheint nun in der That als rothe Scheibe. Allerdings ist dieselbe nicht als voller Kreis sichtbar, da ja die Sonne schon unter dem Horizonte steht; ja, diese rothe Scheibe reicht nicht einmal bis zum Horizont herab. Dies letztere mag auf den ersten Blick als eine Schwierigkeit für die Auffassung desselben als Beugungserscheinung angesehen werden. Es ist aber leicht zu begreifen, dass die grosse Helligkeit der Schichten nahe am Horizonte das lichtschwache Purpurlicht nicht sichtbar werden lässt. Dies wird aus beistehender Figur deutlich sein.

Sei HH der Horizont eines Ortes A der Erdoberfläche, bei ac die höchste Schichte, welche für uns noch wahrnehmbare Lichtzerstreuung ausübt, saa' ein Bündel Sonnenstrahlen, welches die untersten Schichten der Atmosphäre durchsetzt und durch Absorption daselbst als rothes Licht die oberste Schichte trifft. Es ist sogleich aus der Zeichnung zu ersehen, dass wohl in der Richtung Aa' und Ab das Auge das rothe Licht fast ungestört wahrnehmen kann, dass aber schon in der Richtung Ac dies nicht mehr der Fall sein kann. Denn in dem Raume hinter dem Bündel saa' wird von der dort befindlichen Atmosphäre Sonnenlicht zerstreut, das nicht durch die untersten Atmosphärenschichten hindurchging und daher weder so stark geschwächt ist, noch roth gefärbt erscheint.

Hieraus werden nun zwei weitere Eigenthümlichkeiten des ersten Purpurlichtes erklärlich. Wir wissen, dass das erste Purpurlicht als Aureole aufgefasst ein rother Schein von bestimmtem Durchmesser sein muss. Die Beobachtung erweist aber, dass man deutlich eine hellste Stelle, ein Maximum des Purpurlichtes, in einem Sonnenabstand von 18—19° wahrnimmt. Es findet dies darin seine Erklärung, dass infolge der eben geschilderten und in der Figur dargestellten Verhältnisse nur der obere Theil des Purpurlichtes sichtbar ist und das Roth desselben wohl nach Aussen hin ungestört bleibt, nach Innen aber durch zerstreutes weisses Licht immer mehr überdeckt wird. Statt dass also das Purpurlicht als rothe Scheibe mit stets abnehmender Intensität von der Sonne nach aussen erscheinen kann, wird zunächst der Sonne bis zu einer gewissen Höhe über dem Horizont anderes Licht das rothe überdecken und der übrig bleibende Theil der rothen Scheibe des Purpurlichtes wird ein rothes Maximum zwischen innerem und

äusserem Rande aufweisen. Letzteres wird durch die Beobachtung bestätigt.

Es erübrigt nun noch zu untersuchen, ob die Dimensionen der rothen Scheibe des Purpurlichtes der Theorie entsprechen, welche letzteres als die Aureole einer durch rothes Licht erzeugten Fraunhofer'schen Ringerscheinung ansieht.

Die Dimensionen einer solchen Ringerscheinung hängen von dem Durchmesser der lichtbeugenden Körperchen ab. Diese Grösse ist aber fast immer unbekannt, nur zur Zeit als der Bishop'sche Ring sichtbar war, hatten wir die Möglichkeit, den Durchmesser der lichtbeugenden Theilchen zu ermitteln[1]). Wir fanden[2]) den Durchmesser der kleinsten dieser Theilchen zu 0,00185 Millimeter. Ist das Purpurlicht die Aureole einer Fraunhofer'schen Ringerscheinung (also die Fortsetzung des Bishop'schen Ringes zur Zeit seiner Sichtbarkeit), so wird dieselbe, wenn nur mehr das äusserste Roth (Wellenlänge 0,00076 Millimeter) von den unteren Schichten der Atmosphäre durchgelassen wird, einen Radius haben, den wir aus der Formel erhalten

$$\sin R = 1{,}22 \frac{0{,}00076}{0{,}00185}$$

woraus $R = 30^\circ\, 5'$.

Der Sonnenabstand des äusseren Randes des ersten Purpurlichtes könnte also höchstens 30° betragen; ja es ist zweifellos, dass das rothe Licht in der Nähe des Minimums wegen seiner Lichtschwäche schon nicht mehr sichtbar sein kann und daher die äussere sichtbare Grenze nicht einmal soweit hinausreichen könnte.

Wir haben nun Messungen von Riggenbach (a. a. O. S. 37) über die Vertikalausdehnung des ersten Purpurlichtes; ich setze daraus die auf den obersten Punkt des äusseren Randes bezüglichen hierher; es sind Mittelwerthe, aus 76 Messungen zusammengestellt.

Tiefe der Sonne:									
2°,75	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5
Sonnenabstand des oberen Randes:									
18°,3	27,5	31	37,5	37	30,5	25	21,5	18	14,5

Hieraus ersehen wir, dass im Jahre 1885 der grösste Sonnenabstand des äusseren Randes im Vertikal der Sonne (37°,5) fast 10° grösser ist als die Theorie verlangt. Es frägt sich nun, ob dies ein

---

Vielleicht liesse sich ein Weg finden, aus dem Sonnenabstand der neutralen Punkte bei hoher Sonne diese Grösse auch unter den gewöhnlichen Verhältnissen zu berechnen.

2) Zur Theorie des Bishop'schen Ringes. Zeitschr. f. Meteorol. 1889, S. 407 und dieses Rep. Bd. 26 S. 329.

Beweis ist, dass die Theorie unhaltbar ist? Folgende Erwägungen dürften zeigen, dass dies nicht der Fall ist.

1. Die Scheibe des ersten Purpurlichtes ist immer auffallend stark excentrisch zur Sonne, mehr noch als der Bishop'sche Ring es nach Sonnenuntergang war. Die Erklärung dieser Excentricität ist eben gegeben worden. Leider fehlt uns jeder Anhaltspunkt, die Grösse dieser Excentricität anzugeben, sie bewirkt aber jedenfalls, dass der oben gefundene theoretische Radius um die gleiche Grösse vergrössert erscheinen muss.

2. Der Durchmesser der kleinsten Theilchen des Bishop'schen Ringes wurde aus der Erscheinung des letzteren berechnet, wie er bei vollem Tageslicht der über dem Horizonte stehenden Sonne erschien. Es ist aber wahrscheinlich, dass gegenüber dieser grossen Helle die äusserste Grenze des Bishop'schen Ringes zu lichtschwach war, um beobachtet werden zu können. Es dürften also in Wirklichkeit noch kleinere Theilchen dabei im Spiele gewesen sein als die oben berechneten.

Nach Sonnenuntergang, wo die Tageshelle so sehr abgenommen hat, wird dann aber die Grenze der Sichtbarkeit der rothen Scheibe des Purpurlichtes nach diesen allerkleinsten Theilchen zu berechnen sein und daher dürfte der oben gefundene theoretische Werth des Radius des Purpurlichtes zu klein sein.

3. Endlich ist zu beachten, dass in den oben angeführten Mittelwerthen von Riggenbach auch Messungen eingegangen sind, welche bei anormaler Entwicklung des Purpurlichtes gemacht wurden, die stets eine zu weite Ausdehnung desselben bewirkt und daher die Mittelwerthe in dem Sinne beeinflusst, dass sie zu gross sich ergeben.

Diese anormale Entwicklung des Purpurlichtes verlangt aber eine besondere Erklärung, welche Riggenbach (a. a. O. S. 42) gegeben hat. Die zu erklärende Thatsache ist folgende: Das erste Purpurlicht entwickelt sich zuweilen, wenn auch selten, weit über die zulässigen Grenzen einer Beugungserscheinung hinaus, so dass es bis an den Zenith, ja in besonderen Fällen, welche besonders im Winter 1883—84 häufig waren, über denselben hinaus sich ausdehnte. Diese Ausnahmsfälle erklärt Riggenbach folgendermaassen: Die Schichte, in welcher sich das erste Purpurlicht durch Beugung entwickelt, liegt über der Region der Cirri. Sind nun letztere vorhanden, so werden sie durch das gebeugte Licht erleuchtet und der Beobachter erhält nun von diesen Cirri diffuses Licht, welches dann sich über weite Theile des Himmels erstrecken kann. Eine einfache Zeichnung, die sich Jeder leicht machen kann, stellt diesen Vorgang klar dar. Soweit ist gewiss Alles richtig. Es frägt sich aber, ob es möglich, den

Nachweis zu liefern, dass diese anormale Ausdehnung des Purpurlichtes mit dem Vorhandensein feiner Cirri thatsächlich zusammenfällt. Riggenbach (a. a. O. S. 33) weist für seine Beobachtungen nach, dass jederzeit, wenn das Purpurlicht anormal entwickelt war, sein Beobachtungsort (Basel) im Gebiete einer Anticyklone so lag, dass die Gradienten dort sehr schwach waren; nicht eigentlich im Centrum, sondern mehr gegen den Rand einer Anticyklone. Auch Kiessling kam (Wetter, Bd. 2, S. 161) zum gleichen Resultate. Es ist nun eine schon vielfach hervorgehobene Thatsache, dass gerade in diesen Gebieten Cirrus-Bewölkung mit auffallender Regelmässigkeit auftritt. Diese feinen Gebilde sind oft kaum sichtbar, erscheinen dann aber nach Sonnenuntergang in der diffusen rothen Beleuchtung des Purpurlichtes. Kiessling tritt in seinem grossen Werke (S. 158) dieser Erklärung Riggenbach's bei. Sie ist in der That wohlbegründet.

Nach der Ausschliessung von Reflexion und Brechung als genügende Ursache des ersten Purpurlichtes und der Darlegung, dass durch die Beugung die Erscheinung in Form und Verlauf erklärt zu werden vermag, müssen wir die Kiessling-Riggenbach'sche Theorie des ersten Purpurlichtes als wohlbegründet anerkennen.

Es erübrigt nun noch die Einwürfe kennen zu lernen und zu widerlegen, welche Riccó gegen dieselbe seinerzeit erhoben hat und die Archibald[1]) auch zu den seinigen macht, indem er sie abdruckt und beifügt, dass Riccó's Einwürfe Kiessling's Auffassung vom ersten Purpurlicht in hohem Maasse erschüttern und er so lange dasselbe durch Reflexion hervorgerufen ansehen werde, bis Riccó's Einwände widerlegt sind. Die letzteren sind folgende:

Aus vier Messungen fand Riccó, dass der Radius des Bishop-schen Ringes mit der Höhe desselben über dem Horizonte durch folgende Gleichung

$$R = 26^\circ - 7^\circ,16 \sin \tfrac{3}{2}h$$

zusammenhängt.

Es wird also für $h = 0$, $R = 26^\circ$. „Wenn daher der Scheitel des Ringes am Horizonte gesehen würde, müsste er nicht weniger als 26° von der Sonne abstehen.“ „Dagegen geht das erste Purpurlicht am Horizonte unter, wenn die Sonne 9°,5 unter dem Horizonte steht.“

Darauf ist erstens zu erwidern, dass weder der Bishop'sche Ring noch das erste Purpurlicht als solches am Horizonte untergeht. Ferner ist die Veränderung des Radius oben auf ihre wahren Ursachen zurückgeführt. Endlich erklärt sich sowohl das frühere Verschwinden (vor dem Untergange am Horizonte) als die Verkürzung des Sonnen-

1) The eruption of Krakatoa etc., S. 249.

abstandes des ersten Purpurlichtes beim Hinabsinken hinter dem Dämmerungsbogen daraus, dass dies rothe Licht eben nur von rothen Sonnenstrahlen herrührendes gebeugtes Licht ist. Es liegt dieses einfach in den geometrischen Verhältnissen der Erde und der Atmosphäre und hängt im weiteren von der Höhe der obersten lichtzerstreuenden Schichte ab, sowie von den Beugungsgesetzen.

Der zweite Einwurf Riccó's besagt, dass die Geschwindigkeit, mit welcher der Bishop'sche Ring der Sonne nachfolgt, eine ganz andere sei, als die, mit welcher das Purpurlicht der Sonne folgt.

Dagegen ist zu erwidern, dass dies eher für als gegen die Beugungstheorie spricht. Bei untergehender Sonne wächst übrigens der Sonnenabstand des Bishop'schen Ringes und desgleichen wächst anfänglich auch der Radius der rothen Scheibe des ersten Purpurlichtes. Da der Bishop'sche Ring verschwand, als er den grössten Sonnenabstand aufwies, so ist es schwer zu sehen, wie man einen Vergleich machen kann zwischen dem Nachfolgen des Bishop'schen Ringes und dem des ersten Purpurlichtes, wenn nicht in der Periode des letzteren, wo sich sein Sonnenabstand noch vergrössert. Diese Vergrösserung des Sonnenabstandes stimmt aber, wie wir gesehen haben, mit der Beugungstheorie — und nur mit letzterer — wenn man die zunehmende Excentricität der Erscheinung dazu berücksichtigt.

Das dritte Argument nimmt Riccó von der Veränderlichkeit der Form des ersten Purpurlichtes her. Dies bezieht sich aber auf die oben untersuchten anormalen Ausdehnungen des Purpurlichtes, deren Erklärung Riggenbach, wie mir scheinen will, richtig gegeben hat.

Der vierte Einwurf lautet: Wäre das erste Purpurlicht eine Beugungserscheinung, so könnte seine Farbe nur hervorgebracht werden durch Uebereinanderlagerung des Roth und Violett zweier benachbarter Ringe, man müsste also im Spektroskop neben dem Maximum im Roth auch eines im Violett erhalten. Letzteres fehlt.

Abgesehen davon, dass die ganze Erscheinung des Purpurlichtes als Aureole einer Fraunhofer'schen Ringerscheinung aufzufassen ist und von Uebereinanderlegung „benachbarter Ringe“ streng genommen überhaupt keine Rede sein kann, ist das Fehlen des violetten Maximums einfach dadurch erklärt, dass ja das Purpurlicht ein durch monochromatisch-rothes und nicht durch weisses Licht hervorgerufene Beugungserscheinung ist; violett kommt also gar nicht in Betracht.

Die übrigen Einwände Riccó's lassen sich in den Satz zusammenfassen: Der Bishop'sche Ring und das erste Purpurlicht sind zwei unabhängige Erscheinungen, weil sie in ihrem Auftreten und ihrer Intensität an ein und demselben Tage oft ganz verschieden waren.

Was für Veränderungen in der Atmosphäre über und unter dem Horizonte dies immer verursachen mochten, als Argument gegen die Auffassung des ersten Purpurlichtes als Beugungserscheinung kann dies doch auf keinen Fall angesehen werden und ich glaube nicht, dass Riccó selbst grosses Gewicht auf dasselbe legt.

Es sei noch eines Einwurfes Russel's erwähnt, welcher besagt, dass die Dämmerungsstrahlen, welche Riccó oft beobachtete (auch Andere haben sie gesehen) ein Beweis dafür sei, dass das erste Purpurlicht durch die Reflexion direkter Sonnenstrahlen erzeugt wird.

Ja, warum sollten denn die Dämmerungsstrahlen nicht ebenso gut auftreten können, wenn das erste Purpurlicht durch die Beugung direkter Sonnenstrahlen hervorgerufen wird?

All' diese Einwürfe erschüttern also nicht im geringsten die Kiessling-Riggenbach'sche Theorie und wenn auch, besonders wegen Mangels einer genügenden Anzahl messender Beobachtungen, einzelne Punkte heute noch nicht vollständig erschöpfend klargestellt werden können, im Wesentlichen scheint die Auffassung des ersten Purpurlichtes als Beugungserscheinung wohlbegründet zu sein.

Randwinkel und Kantenwinkel.

Von

K. Fuchs.

Es ist die Frage aufgeworfen worden, ob eine Flüssigkeit, die eine feste Wand berührt, den Randwinkel auch an der Kante selber bewahrt, wo Flüssigkeit und Wand zusammenstossen, oder ob die Kante vielleicht eiuen grösseren oder kleineren Winkel zeigt.

Wenn man diese Frage mit Hilfe der Elementarkräfte behandelt, wie sie in fast allen meinen Arbeiten verwendet wurden, dann findet man leicht, dass im allgemeinen einem stumpfen Randwinkel ein noch stumpferer Kantenwinkel, einem spitzen Randwinkel ein noch spitzerer Kantenwinkel entspricht.

Wir wollen also Randwinkel und Kantenwinkel für eine Elementarkraft bestimmen, welche zwischen den Entfernungen r und $r + dr$ wirksam ist. Ein Massenpunkt, die Masseneinheit der Flüssigkeit A enthaltend, ziehe die Masseneinheit der Flüssigkeit in der Wirkungsschaale zwischen jenen beiden Entfernungen mit der Kraft k_1 an, während der Massenpunkt die Masseinheit der Wandsubstanz B mit der Kraft k_2 anzieht. Die Dichte der Flüssigkeit sei ϱ_1, die der Wand sei ϱ_2.

Wir wollen nun zunächst den Randwinkel bestimmen, wie er sich aus einer Elementarkraft ergibt. In Fig. 1 ist $o\,o'$ die Oberfläche der Flüssigkeit. Eine quadratische Flächeneinheit der Oberflächenhaut werde um die Strecke λ gestreckt. Da das Volumen der Flüssigkeit zwischen der Oberfläche und einer Schicht $\nu\,\nu'$ in der Tiefe h unter der Oberfläche constant bleiben muss, wird offenbar $\nu\,\nu'$ um eine Strecke ε nach oben rücken, und die Constanz des Volumens wird durch die Gleichung ausgesprochen

$$1 \cdot 1 \cdot h = 1 \cdot (1 + \lambda)(h - \varepsilon).$$

Wenn λ und ε sehr klein sind, dann reducirt sich diese Bedingung auf $\varepsilon = h\lambda$. Das Flüssigkeitselement $\varrho_1\,dv$ oder $\varrho_1\,dh\,do$ verliert durch dieses Emporrücken um ε das schraffirte Flüssigkeitsvolumen $\pi\,(r^2 - h^2)\,\varepsilon$

oder $\pi(r^2 - h^2)h\lambda$ aus einer Wirkungsschaale. Indem diese Scheibe von der Masse $\pi\varrho_1(r^2 - h^2)h\lambda$ austritt, leistet die Elementarkraft von $\varrho_1\,dv$ eine negative Arbeit, welche wir auch folgendermaassen entstanden sein denken können. Wir nehmen an, dass die ungestreckte Haut in unendlich zerstreute Moleküle aufgelöst wird, und dass dieselben sodann wieder in Form der gestreckten Haut zusammengefügt werden. Die Auflösungsarbeit können wir berechnen, indem wir annehmen, dass bei jedem Flüssigkeitselement $\varrho_1\,dv$ alle in seiner Kugel eingeschlossene Flüssigkeit ausgeführt wird. Die Zusammenfügungsarbeit hingegen finden wir, wenn wir von jedem Element $\varrho_1\,dv$ annehmen, dass diejenige Flüssigkeitsmenge in dessen Kugel eintritt, die der gestreckten Form der Haut entspricht. Dann wird offenbar die Zusammenfügungsarbeit bei jedem Elemente kleiner sein, als die Auflösungsarbeit, und zwar um die obige Ausführungsarbeit der schraffirten Scheibe, welche Arbeit gleich ist $\pi\varrho_1^2(r^2 - h^2)k_1 h\lambda\,dh\,do$. Nun ist offenbar bei dieser Rechnung sowohl die Auflösungsarbeit, als auch die Fügungsarbeit doppelt zu gross gerechnet, weil wir jedes Flüssigkeitselement einmal als anziehendes, einmal als angezogenes gerechnet haben.

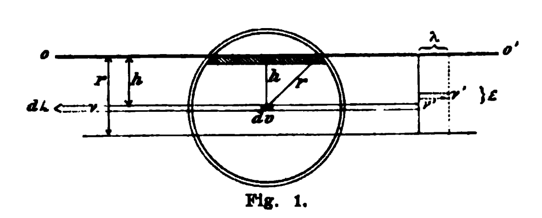


Fig. 1.

Folglich ist auch obige Arbeitsdifferenz, die Ausführungsarbeit der schraffirten Scheibe, doppelt zu gross. Diesen Umstand wollen wir später berücksichtigen.

Die Arbeit also, welche durch die Molecularkräfte von $\varrho_1\,dv$ bei Austritt der schraffirten Scheibe geleistet wird, ist $-\pi\varrho_1^2(r^2 - h^2)k_1 h\lambda\,dr\,dh\,do$. Alle Elemente der vollen Schicht $\nu\nu'$ liefern die negative Molecularbeit (wenn wir do durch 1 ersetzen) $-\pi\varrho_1^2(r^2 - h^2)k_1 h\lambda\,dh\,dr$. Alle Schichten von $h = o$ bis $h = r$ liefern die Moleculararbeit (wir integriren noch h) $-\pi\varrho_1^2 r^4 k_1 \lambda\,dr/4$. Da diese Arbeit auf einem Wege λ geleistet wird, so ist die zu überwindende Kraft oder Oberflächenspannung gleich $-\pi\varrho_1^2 r^4 k_1\,dr/4$. Nach obigen Entwicklungen haben wir aber die Hälfte zu nehmen und erhalten als contractive Oberflächenspannung, die durch die Cohäsion der Flüssigkeit erzeugt wird

$$-a = -\tfrac{1}{8}\pi\varrho_1^2 r^4 k_1\,dr.$$

Wenn die Oberfläche $o\,o'$ an der festen Wand anliegt, dann tritt bei der Deformation der Oberflächenhaut an Stelle der ausgetretenen Flüssigkeitsscheibe eine Wandscheibe von der Masse $\pi\varrho_2(r^2 - h^2)h\lambda$, und wenn diese in die Kugel der Centralmasse $\varrho_1\,dh\,do$ eintritt, wobei zwei Masseneinheiten sich mit der Kraft k_2 anziehen, dann wird hierbei

die positive Moleculararbeit geleistet, $\pi \varrho_1 \varrho_2 (r^2 - h^2) h \lambda k_2 \, dh \, dr \, do$. Hieraus berechnet sich ganz wie vorher eine expansive Oberflächenspannung

$$+ 2c = + 2\tfrac{1}{8} \pi \varrho_1 \varrho_2 r^4 k_2 \, dr.$$

Doppelrechnung hat hier nicht stattgefunden.

Jetzt können wir leicht den Randwinkel berechnen, wie ihn eine Elementarkraft liefert. In der der Wand anliegenden Flüssigkeitsoberfläche (Contactfläche) herrscht parallel zur Wand die Spannung $2c - a$; in der freien Oberfläche, welche mit der Wand den Winkel φ bildet, herrscht die Spannung $-a$ mit der zur Wand parallelen und obiger Spannung entgegenwirkenden Componente $-a \cos \varphi$. Da die beiden zur Wand parallelen Componenten einander im Gleichgewicht halten müssen, muss gelten

$$-a \cos \varphi = 2c - a \quad \text{oder} \quad \cos \varphi = 1 - \frac{2c}{a}.$$

Wenn wir für c und a ihre Werthe einsetzen, dann finden wir

$$\cos \varphi = 1 - \frac{2 k_2 \varrho_2}{k_1 \varrho_1}.$$

Diesen Randwinkel liefert also eine Elementarkraft. Wir ersehen hieraus: Ein Randwinkel ist nur dann möglich, wenn $\varrho_1 k_2 < \varrho_1 k_1$ ist; widrigenfalls überzieht die Flüssigkeit die Wand vollständig als Haut ohne Rand. Der Randwinkel ist ein rechter für $2 \varrho_2 k_2 = \varrho_1 k_1$; er ist ein spitzer für $2 k_2 \varrho_2 < k_1 \varrho_1$; er ist ein stumpfer für $2 k_2 \varrho_2 > k_1 \varrho_1$.

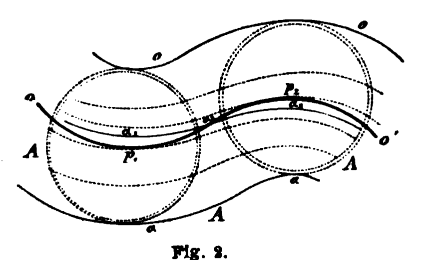


Fig. 2.

Nun wollen wir einen neuen Begriff einführen, den man am besten mit dem Namen „Potential“ bezeichnen könnte. Denken wir einen Massenpunkt μ, der die Masseneinheit der Flüssigkeit in sich vereint, in der Nähe des Flüssigkeitsrandes gelegen, so dass ein Theil der Wirkungskugel Flüssigkeit von der Masse m_1 enthält, während ein anderer Theil Wandsubstanz von der Masse m_2 enthält. Wenn μ aus unendlicher Ferne an seinen Platz gebracht worden ist, dann hat μ bei der Aufnahme von m_1 die Moleculararbeit $m_1 k_1 \, dr$ geleistet, bei der Aufnahme von m_2 aber die Arbeit $m_2 k_2 \, dr$. Die Summe $m_1 k_1 \, dr + m_2 k_2 \, dr$ wollen wir das Potential der Molecularkräfte für den Punkt nennen, wo μ sich befindet. In Fig. 2 sind in der Nähe einer wellenförmigen Oberfläche $o\,o'$ der Flüssigkeit A die Flächen gleichen Potentiales oder die Niveauflächen der Molecularkräfte der Flüssigkeit gezeichnet. In der Entfernung r über der Oberfläche ist das Potential

$p = o$, weil ein dort befindlicher Massenpunkt noch keine Flüssigkeit in seiner Kugel besitzt. In der Tiefe r unter der Oberfläche hat das Potential seinen grössten Werth, den wir mit α bezeichnen wollen, wobei die ganze Wirkungskugel mit Flüssigkeit erfüllt ist. In ebener Oberfläche oder an einem Wendepunkte ist $p = \alpha/2$, da dort die Hälfte der Kugel Flüssigkeit enthält; bei concaver Oberfläche hebt sich die Niveaufläche $\alpha/2$ über die Flüssigkeitsoberfläche, während sie bei convexer Oberfläche untertaucht, wie dies die Figur erkennen lässt. Wir können nun den Satz aufstellen:

Die Flüssigkeit ist im Gleichgewicht, wenn die Oberfläche mit einer Niveaufläche der Molecularkräfte zusammenfällt.

Für das Potential α können wir sofort seinen Werth anschreiben

$$\alpha = \tfrac{4}{3}\pi \varrho_1 r^3 k_1 \, dr.$$

Wenn wir μ nicht in Flüssigkeit, sondern in die Wand versenken, so dass seine ganze Kugel sich mit Wandsubstanz B füllt, dann erhalten wir das Potential

$$\gamma = \tfrac{4}{3}\pi \varrho_2 r^3 k_2 \, dr.$$

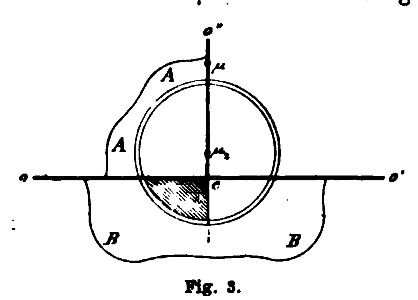


Fig. 3.

Es ist nun lästig in den Formeln für $\cos\varphi$, α und γ die Factoren ϱ_1 und ϱ_2 nachzuschleppen, da sie sich nur dann als nützlich erweisen, wenn wir mit nicht homogenen Stoffen arbeiten. Wir wollen daher schreiben e_1 und e_2 für $k_1 \varrho_1$ und $k_2 \varrho_2$, was darauf hinausläuft, dass der Intensitätscoefficient der Molecularkräfte sich nicht auf zwei Masseneinheiten, sondern auf zwei Volumeinheiten bezieht. Unsere Formeln lauten dann einfacher

$$\alpha = \tfrac{4}{3}\pi r^3 e_1 \, dr \qquad \gamma = \tfrac{4}{3}\pi r^3 e_2 \, dr$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{2 e_2}{e_1}.$$

Wir behandeln nun drei Fälle:

1. Lassen wir den Randwinkel einen rechten sein (Fig. 3), also $2 e_2 = e_1$. In der oberen Oberfläche ist das Potential des Punktes μ gleich $\alpha/2$. Wenn μ aber nach μ_1 kommt, dann taucht die Schaale unter die Wandoberfläche, und das schraffirte Flüssigkeitsvolumen wird also durch das doppelte Wandvolumen ersetzt. Wenn das schraffirte Volumen gleich v ist, so ist durch Ausführung des A-Volumens v die Arbeit geleistet worden $- v e_1 \, dr$; durch Einführung von B vom Volumen $2v$ aber wird die Moleculararbeit $+ 2 v e_2 \, dr$ geleistet. Da aber $2 e_2 = e_1$ ist, ist auch

$$2 v e_2 \, dr - v e_1 \, dr = (2 e_2 - e_1) v \, dr = o$$

d. h. das Potential $a/2$ bleibt ungeändert. Wir finden also: Für $\varphi = R$ ist der Kantenwinkel gleich dem Randwinkel.

2. Wir nehmen einen spitzen Randwinkel (Fig 4), für welchen $2\,e_2 < e_1$ gilt. In μ_1 ist das Potential noch $a/2$. In μ_2 jedoch taucht die Schaale unter die Wandfläche; es wird durch Aufnahme von Wandsubstanz positive Arbeit geleistet, und diese kann nur so paralysirt werden, dass unterhalb des Punktes i die Oberfläche sich convex krümmt, so dass der Flüssigkeitsinhalt der Schaale sich um das punktirte Volumen vermindert; widrigenfalls bliebe das Potential der Oberfläche μ_2 nicht gleich $a/2$. Wir finden also: ein spitzer Randwinkel fordert einen noch spitzeren Kantenwinkel.

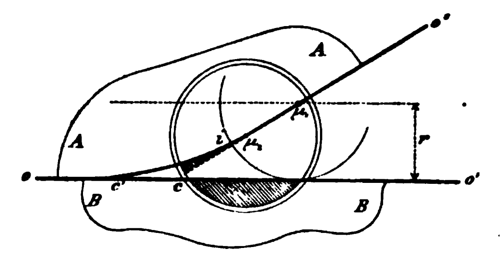


Fig. 4.

3. Wir nehmen einen stumpfen Randwinkel (Fig. 5), für welchen gilt $2\,e_2 > e_1$. In μ_1 ist das Potential noch $a/2$. In μ_2 jedoch ist eine Flüssigkeitslinse vom Volumen v durch eine Wandlinse ersetzt. Die Ausführung der Flüssigkeitslinse bringt mit sich die Moleculararbeit $-v\,e_1\,dr$; die Einführung der Wandlinse bringt die Moleculararbeit $+v\,e_2\,dr$ mit sich; das Potential $a/2$ hat sich daher in μ_2 gändert, um $+v\,e_2\,dr - v\,e_1\,dr$ oder $+(e_2 - e_1)\,v\,dr$. Da nun nothwendig $e_1 > e_2$ ist, so ist das Potential nothwendig kleiner geworden. Dieser Ausfall kann nur so paralysirt werden, dass die Oberfläche in der Wandnähe concav verläuft, und also der Flüssigkeitsinhalt um das punktirte Volumen vermehrt wird. Wir finden also: ein stumpfer Randwinkel erfordert einen noch stumpferen Kantenwinkel.

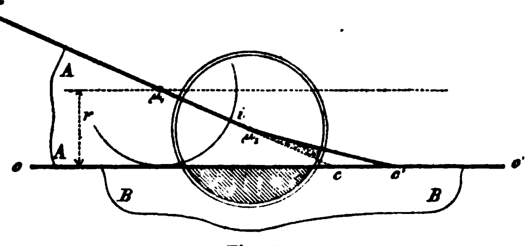


Fig. 5.

Wir wollen noch gleichsam zur Controlle den Massenpunkt bei c (Fig. 6 und 7) in die Kante legen und dann in der Oberfläche nach μ_3 verschieben. Die Wirkungsschaale ist für die erste Lage punktirt, für die zweite Lage doppelt gezeichnet. Betrachten wir Fig. 6, die sich auf einen stumpfen Randwinkel bezieht. Anfangs geht die Wandoberfläche durch μ hindurch; später liegt sie um λ tiefer; μ hat also aus seiner Wirkungsschaale die schraffirte Scheibe von Wandsubstanz vom Volumen $\pi\,r^2\,\lambda$ verloren, wodurch die Arbeit geleistet wurde

$-\pi r^2 \lambda e_2 dr$. Aufgenommen wurde aber von Flüssigkeit nur eine Halbscheibe vom Volumen $\pi r^2 \lambda/2$, wodurch die Arbeit geleistet wurde $+\pi r^2 \lambda e_1 dr/2$. Das Potential hat sich also geändert um $\pi r^2 \lambda dr$ $(e_1/2 - e_2)$ oder $(e_1 - 2e_2)\pi r^2 \lambda dr/2$. Da nun $2e_2 > e_1$ ist, ist das Potential kleiner geworden. Wenn es den Werth $\alpha/2$, den es in c haben muss, auch in μ_3 behalten soll, muss die Oberfläche concav sein, damit durch die Verschiebung nach μ_3 auch ein weiteres Volumen Flüssigkeit (punktirt) in die Schaale aufgenommen werde.

Ganz ähnlich argumentiren wir bei Fig. 7, die sich auf einen spitzen Randwinkel bezieht. Durch die Verschiebung ändert sich das Potential zunächst um $(e_1 - 2e_2)\pi r^2 \lambda dr/2$. Da aber jetzt $2e_2 < e_1$ ist, ist das Potential grösser geworden, und es sinkt nur dann auf seinen Anfangswerth herab, wenn in Folge Convexität das punktirte Volumen Flüssigkeit aus der Schaale tritt.

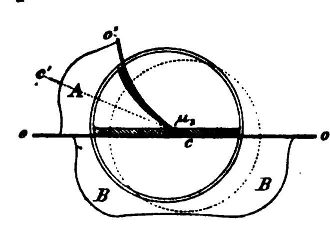


Fig. 6.

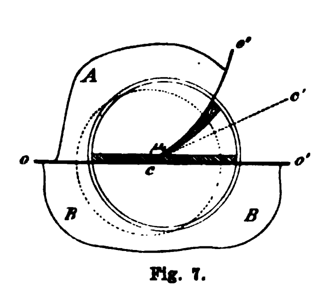


Fig. 7.

Es ist leicht für den Kantenwinkel einen approximativen Werth zu finden. Wir nehmen in Fig. 6 und 7 die punktirten Linien cc', welche eigentlich nur Tangenten zur Oberfläche im Randpunkte c sind, per nefas als Oberfläche der Flüssigkeit. Die A-Flüssigkeit ist dann zwischen die Ebenen co und cc' eingeschlossen, und wir können ihr Volumen v_1 als Theil x des Volumens V der ganzen Kugel angeben. Das Volumen der Wandsubstanz ist für den Punkt c gleich $V/2$. Das Potential in c ist also $x V e_1 dr + V e_2 dr/2$ oder $(2xe_1 + e_2) V dr/2$. Dieses soll dem Potential der ebenen Oberfläche $V e_1 dr/2$. gleich sein. Es muss also gelten

$$\frac{(2xe_1 + e_2) V dr}{2} = \frac{V e_1 dr}{2}$$

oder

$$2xe_1 + e_2 = e_1$$

und hieraus

$$x = \frac{e_1 - e_2}{2e_1}.$$

Wenn ψ den Winkel occ' in Graden angibt, dann gilt $x = \psi/360$, so dass wir für den Kantenwinkel und für den Randwinkel die beiden Gleichungen erhalten

$$\cos\varphi = 1 - \frac{2e_2}{e_1} \qquad \frac{\psi}{180} = 1 - \frac{e_2}{e_1},$$

wobei nur zu beachten ist, dass φ ausserhalb der Flüssigkeit, ψ aber in der Flüssigkeit gemessen ist.

Diese Resultate gelten für eine einzelne Elementarkraft vom Radius r. Für alle Elementarkräfte von $r = r_1$ bis $r = r_2$ zusammengenommen ist (wie auch anderen Ortes gezeigt worden):

$$\cos\varphi = 1 - 2\int_{r_1}^{r_2} r^4 e_2\, dr : \int_{r_1}^{r_2} r^4 e_1\, dr.$$

Das Potential in c ist dann

$$\int_{r_1}^{r_2} x\, V e_1\, dr + \tfrac{1}{2}\int V e_2\, dr = \tfrac{4}{3}\pi \int_{r_1}^{r_2} r^3 e_1\, dr + \tfrac{2}{3}\pi \int_{r_1}^{r_2} r^3 e_2\, dr.$$

Ferner das Potential in der freien ebenen Oberfläche

$$a = \int_{r_1}^{r_2} \alpha = \tfrac{4}{3}\pi \int_{r_1}^{r_2} r^3 e_1\, dr$$

und hieraus

$$\frac{\psi}{180} = 1 - \int_{r_1}^{r_2} r^3 e_2\, dr : \int_{r_1}^{r_2} r^3 e_1\, dr.$$

Hier haben die Integrale die dritte Potenz von r, im Ausdruck für φ aber die vierte Potenz. Wir wollen die Integrale durch Symbole bezeichnen und schreiben

$$\cos\varphi = 1 - \frac{2 J_2^4}{J_1^4} \qquad \frac{\psi}{180} = 1 - \frac{J_2^3}{J_1^3}.$$

Nun ist es keineswegs feststehend, dass die Werthe der Integrale der zweiten Gleichung in demselben Verhältnis stehen, wie die Werthe

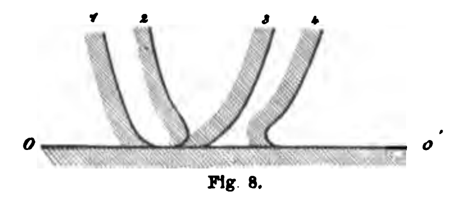


Fig. 8.

der Integrale der ersten Gleichung, d. h. wir dürfen nicht annehmen, dass gilt

$$J_1^4 : J_2^4 = J_1^3 : J_2^3.$$

Hieraus aber lässt sich die Folgerung ableiten, dass auch concavconvexe Oberflächenränder möglich sind, d. h. dass alle vier Randcurven der Fig. 8 möglich sind.

Ueber die Schallgeschwindigkeit beim scharfen Schuss nach von dem Krupp'schen Etablissement angestellten Versuchen. [1])

Von

E. Mach.

Aus Anlass meiner Abhandlung „Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des durch scharfe Schüsse erregten Schalles" [2]) erhielt ich von dem Krupp'schen Etablissement die auf dem Schiessplatze bei Meppen über die Schallgeschwindigkeit angestellten Beobachtungen zur Einsicht und Benutzung, wofür ich hier meinen besten Dank ausspreche. Ein Theil dieser Versuche ist schon vor ungefähr zwei Jahren ausgeführt worden.

Schon ein flüchtiger Blick auf die S. 1256 u. ff. mitgetheilten Tabellen zeigt, dass die auffallend grosse Schallgeschwindigkeit in der Schussrichtung, welche aus vielen dieser Versuche hervorgeht, sich sehr wohl mit der in zwei früheren Arbeiten [3]) dargelegten Ansicht vereinigen lässt, nach welcher die knallende Kopfwelle des Projectils mit der Projectilgeschwindigkeit fortschreitet, so lange letztere grösser ist, als die normale Schallgeschwindigkeit. Für kurze Flugbahnen und hohe Projectilgeschwindigkeiten erweist sich wirklich die Schallfortpflanzungszeit und die Flugzeit als gleich. Ob die erwähnte Auffassung auch die Beobachtungsergebnisse für grössere Strecken erklärt, welche zum Theil mit kleinerer Projectilgeschwindigkeit durchflogen werden, muss durch eine genauere Betrachtung entschieden werden, welche hier folgt.

Wir tragen die Zeiten (t) nach OT, die zugehörigen Projectilgeschwindigkeiten (v) nach OV auf und erhalten so die Curve MNP. Wir nehmen an, dass, so lange v grösser ist als die Schallgeschwindig-

---

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus den Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. Bd. 98 (1889).

2) Wiener Berichte, 48. Bd., II. a., S. 41.

3) Mach und Salcher, Photogr. Fixirung der durch Projectile in der Luft eingeleiteten Vorgänge. Wiener Berichte, 45. Bd., II. a., S. 764 und die oben citirte Arbeit.

keit c, Schall und Projectil mit einander gehen, und nur für $v < c$ der Schall mit c fortschreitet. Für alle Strecken, welche in einer Zeit $< OQ$ durchflogen werden, kommen dann Schall und Projectil zugleich am Ziel an, für Strecken grösserer Flugzeit ist die Schallfortpflanzungszeit (oder kürzer die „Schallzeit") kleiner als die Flugzeit.

Um genaueren Einblick in den Vorgang zu gewinnen, können wir folgendes einfache Verfahren anwenden. Wir denken uns ein Projectil von 1 qcm Querschnitt und 1 kg Gewicht mit der Geschwindigkeit v horizontal bewegt. Erfährt dasselbe in Luft von 1,206 kg Gewicht per Cubikmeter den Widerstand von p kg, so ist $\frac{dv}{dt} = -9{,}81\,p$ [m.sec^{-2}]. Hiernach lässt sich die Geschwindigkeitsabnahme von Secunde zu Secunde (oder auch für kleinere Zeittheile) berechnen, wenn p für jedes v experimentell ermittelt ist. Kennt man so für jeden Zeitpunkt die Geschwindigkeit, so erlaubt die berechnete Tabelle auch (durch Summation entsprechend der Quadratur der Curve MNP) für jeden Zeitpunkt den zurückgelegten Weg, oder umgekehrt, zu bestimmen [1]).

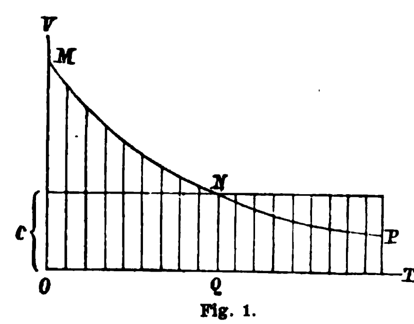


Fig. 1.

Für ein Projectil vom Querschnitt q [qcm], vom Gewicht r [kg] und für δ-mal dichtere Luft erscheint der Werth von $\frac{dv}{dt}$ im Verhältnis $1 : \frac{q\delta}{r} = \mu$ vergrössert; es findet also schon für eine μ-mal kürzere Zeit dieselbe Geschwindigkeitsabnahme statt. Wenn die Curve MNP für das erstere Projectil gilt, haben wir für das letztere die Abscissen (nach OT) μ-mal zu verkürzen. Alle Horizontalcomponenten von Projectilbewegungen sind phoronomisch ähnlich, wenn man Punkte von gleicher Geschwindigkeit als homolog betrachtet. Alle homologen Zeiten und homologen Wege zweier solcher Bewegungen stehen in demselben Verhältnis (μ).

Die Krupp'sche Schusstafel VI [2]) entspricht dem oben fingirten Projectil für ein Luftgewicht von 1,206 kg per Cubikmeter, welches durch den Barometerstand von 750 mm, die Temperatur von 15° C

1) Ich spreche hier in Uebereinstimmung mit der Redeweise der Artilleristen vom Projectil**gewicht**, vom **Luftgewicht**, obgleich es sich eigentlich um die **Massen** handelt.

2) Diese den Artilleristen leicht zugängliche Schusstafel habe ich hier natürlich nicht aufnehmen können.

und die relative Feuchtigkeit von 50% bedingt ist. Anstatt der Geschwindigkeit von Secunde zu Secunde gibt dieselbe jedoch Zeit und Weg von Meter zu Meter Geschwindigkeitsverlust an. Für ein Projectil mit dem Coefficienten μ sind alle Zeiten und horizontalen Wege zwischen denselben Geschwindigkeiten μ-mal kleiner als jene der Tafel.

Um also einen Fall der folgenden Versuche zu analysiren, bestimmen wir nach den Angaben über das Geschoss und nach den meteorologischen Daten den Coefficienten μ und die normale Schallgeschwindigkeit c[1]). Ist die Strecke, welche die Krupp'sche Schusstafel VI zwischen der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und c ausweist s, und $\frac{s}{\mu}$ grösser als die Strecke, auf welcher beobachtet wurde (in den Tabellen S. 1256 u. ff. mit x bezeichnet), so soll nach unserer Auffassung die Schallzeit der Flugzeit gleich sein. Für v_0 und die Strecke μx gibt die Tafel VI die Zeit t, wodurch sich die Flugzeit zu $\frac{t}{\mu}$ bestimmt. Ist umgekehrt $\frac{s}{\mu} < x$ und entspricht s in Tafel VI die Zeit t_1, so wird $\frac{s}{\mu}$ in $\frac{t_1}{\mu}$ vom Projectil und vom Schall durchsetzt, während der Rest des Weges $x - \frac{s}{\mu}$ in der Zeit $\frac{x - \frac{s}{\mu}}{c}$ vom Schalle durchlaufen wird, so dass

$$\frac{t_1}{\mu} + \frac{x - \frac{s}{\mu}}{c}$$

die ganze Schallzeit vorstellt.

Für eine merkliche Windgeschwindigkeitscomponente w in der Schussvorrichtung suchen wir in Tafel VI den Weg s anstatt zwischen v_0 und $c + w$[2]), zwischen $v_0 - w$ und c und bestimmen die zugehörige Zeit t_1. Der entsprechende, von Projectil und Schall durchlaufene Weg ist $\frac{s}{\mu} + \frac{w t_1}{\mu}$, während der Rest des Weges $x - \frac{s + w t_1}{\mu}$ mit der

---

1) Zur Berechnung von c wurde (mit Verwendung der sehr guten Regnault-schen Zahl 330,7 für 0° C und trockene Luft), weil es nicht nöthig war, mehr als die drei ersten Stellen zu berücksichtigen, die einfache Formel vorwendet:

$$c = 330{,}7\left(1 + 0{,}00183\, t + 0{,}889\, \frac{e}{b}\right),$$

in welcher t die Temperatur, b den Barometerstand und e den Dunstdruck bedeutet.

Die Windcorrectur, die immer etwas unzuverlässig ist, wurde, soweit sie auf die dritte Stelle Einfluss hatte, in einer besonderen Rubrik hinzugefügt.

2) Hierbei ist also c die Schallgeschwindigkeit ohne Rücksicht auf die Windecorrectur.

Geschwindigkeit $c+w$ vom Schall durchlaufen wird, so dass die ganze Schallzeit durch

$$\frac{t_1}{\mu}+\frac{x-\frac{s+w\,t_1}{\mu}}{c+w}$$

dargestellt ist.

Es folgen nun die auf dem Krupp'schen Schiessplatz angestellten Beobachtungen (I—XIV) mit allen zur Berechnung nöthigen Angaben, an welche sich besondere Tafeln (Ia—XIVa) zur Vergleichung der Beobachtung und Rechnung anschliessen. In letzteren bedeutet μ den erwähnten Coefficienten, t_r die nach der Theorie berechnete, t_b die beobachtete Schallzeit, f_r die berechnete, f_b die beobachtete Flugzeit, c die den meteorologischen Umständen entsprechende Schallgeschwindigkeit. Zu einer Auswahl der Reihen, welche leicht den Anschein der Willkürlichkeit hätte gewinnen können, mochte ich mich nicht entschliessen. Vielleicht interessiren sich auch Andere für das vollständige Material.

Wir nehmen zuerst die Reihen VIII—X in Augenschein. In denselben ist die Projectilgeschwindigkeit durchaus kleiner als die Schallgeschwindigkeit; die fragliche Theorie kommt also hier gar nicht in Betracht. Die Reihen sind hingegen sehr geeignet, um auf Grund derselben die Güte der Beobachtungen zu beurtheilen. In VIII ist die normale Schallgeschwindigkeit 335—336, mit Rücksicht auf den Wind 341 (in der Schussrichtung). Die Beobachtungen ergeben in der That in den meisten Fällen sehr nahe die letztere Geschwindigkeit. Die grösste Differenz ergibt die vierte Beobachtung: 341 — 334 = 7, was einem Fehler von 0,2 Secunden entspricht. Es wäre jedoch unbillig, den ganzen Betrag als Beobachtungsfehler anzusehen, da in diesem Fall viel wahrscheinlicher ein zeitweiliges Nachlassen des Windes die Herabdrückung des Werthes hervorgebracht hat. Ungefähr innerhalb derselben Grenzen liegen die Differenzen in den Reihen IX und X, so dass man die Beobachtungen, namentlich in Anbetracht der sehr einfachen Mittel, als recht gute bezeichnen kann. Eine sehr genaue Bestimmung der Schallgeschwindigkeit ist bei der fraglichen Versuchsanordnung nicht zu erwarten, weil der bedeutende und wechselnde Einfluss des Windes nur durch gleichzeitige Beobachtung in entgegengesetzter Richtung auf derselben Strecke fortschreitender Schallwellen eliminirt werden kann [1]).

---

1) Die neueren Bestimmungen der Schallgeschwindigkeit können als sehr zuverlässig gelten und die drei ersten Stellen sind jedenfalls sicher. Mit feineren Mitteln gewinnt man dieselben schon auf sehr mässigen Strecken. So hat Dr. Tumlirz in meinem Laboratorium die Schallgeschwindigkeit für trockene Luft von 0° C in



II. 15 cm K L/30 Nr. 157 (D M) Geschossgewicht: 51 kg	1./9.87	505	6500	10	17,44	373	19	6444	18,43	350	758	+20	86	6,5-7,5 m
	„	490	3953	5	11,01	359	15	4259	11,06	385	759	+21	83	6,3-8,3 m
	2./9.87	505	„	8	11,11	356	25	4103	10,65	385	753	+20	87	6,5-7,3 m
	„	504	2082	9	5,71	365	20	2075	4,55	456	754	+23	84	7,2-8,0 m
	3./9.87	490	8000	7	22,39	357	15	8410	26,73	315	760	+20	85	7,3 m einzelne Stöße bis 10,4 m
	1./10.87	501	6500	6	18,15	358	13	6431	18,99	339	758	+ 6	100	0-0,5 m
III. 15 cm K L/30 Nr. 118 (D M) Geschossgewicht: 51 kg	26./10.87	487	3958	7	11,59	342	20	4165	11,22	371	771	+ 3	94	2,3 m

SSW

Geschütz	Datum	Anfangsgeschwindigkeit	Schallversuche				Schiessversuche				Meteorologische Angaben			
			Beobachtungspunkt 0 und x	Anzahl	Gemessene Schallzeit im Mittel	Mittlere Geschwindigkeit des Schalles	Anzahl	Mittlere Entfernung	Mittlere Flugzeit	Mittlere Fluggeschwindigkeit des Geschosses von 0 bis x Meter	Barometer	Thermometer in Celsius-graden	Relative Feuchtigkeit in Percenten	Windrichtung und Stärke
		m/sec.	m		Sec.	m/sec.		m	Sec.	m/sec.	mm			
I. 26 cm RK L/20 Nr. 27 (DM) Geschossgewicht: 187 kg.	18./3.89	474	2082	4	5,11	407	—	—	—	—	758	+ 5	93	
	„	494	„	3	4,96	420	—	—	—	—	„	„	93	
	„	482	„	2	5,00	416	5	2060	4,97	415	„	„	93	
	„	486	„	3	4,99	417	5	2094	5,05	414	„	+ 8	95	
	„	456	„	4	5,14	405	—	—	—	—	751	+ 6	92	
	„	451	„	5	5,15	404	—	—	—	—	„	„	92	

Geschütz	Datum	Anfangsgeschwindigkeit	Schallversuche: Beobachtungspunkt 0 und x	Schallversuche: Anzahl	Schallversuche: Gemessene Schallzeit im Mittel	Schallversuche: Mittlere Geschwindigkeit des Schalles	Schiessversuche: Anzahl	Schiessversuche: Mittlere Entfernung	Schiessversuche: Mittlere Flugzeit	Schiessversuche: Mittlere Fluggeschwindigkeit des Geschosses von 0 bis x Meter	Meteorologische Angaben: Barometer	Meteorologische Angaben: Thermometer in Celsius-graden	Meteorologische Angaben: Relative Feuchtigkeit in Percenten	Meteorologische Angaben: Windrichtung und Stärke
		m/sec.	m		Sec.	m/sec.		m	Sec.	m/sec.	mm			N N O
IV. 15 cm MK L/22 Nr. 83 (DM) Geschossgewicht: 29,5 u. 34,5 k g	1./9.87	532	3953	3	11,12	356	25	3981	10,26	388	759	+21	87	6,3 - 8,5 m
	„	„	6500	10	17,82	365	28	6703	22,78	294	758	+20	86	7,6 - 8,0 m
V. 12,5 cm RK L/28 Nr. 45 (DM) Geschossgewicht: 18,25 kg	19./3.89	469	2082	2	5.64	369	5	2047	--	—	750	+ 9	88	8,5 m
	„	468	2880	4	7,96	362	8	2915	8,74	334	„	+13	85	Schussrichtung
	„	„	3951	3	11,19	353	10	4041	13,58	298	„	+11	85	

VI. 10,5 cm K L/35 Nr. 1 (DM) Geschossgewicht: 18,0 kg	14./12.87	512	5466	20	15,99	342	18	5391	15,98	337	751	+ 8	95
	„	„	„	18	15,98	342	20	5203	15,17	343	„	„	95
VII. Schnellf. 6 cm K L/40 Geschossgewicht: 3,0 kg	14./3.89	603	552	4	0,89	620	—	—	—	—	762	+ 6	90
	„	„	1029	2	2,01	512	—	—	—	—	„	„	90
	„	„	1500	11	3,19	470	—	—	—	—	„	„	90
VIII. 21 cm Haubitze L/12 Nr. 1 Geschossgewicht: 140, 140, 91, 91 91, 140, 91, 140 kg	19./2.89	156	2210	4	6,47	342	5	2358	22,27	106	766	+ 8	94
	„	„	„	4	6,50	340	5	2395	22,38	107	„	„	94
	„	187	2559	3	7,55	339	5	2741	33,49	82	„	„	94
	„	„	3219	4	9,63	334	5	3265	26,57	123	„	„	94
	„	236	4679	2	13,76	340	5	4013	41,21	97	765	+ 7	95
	„	242	„	4	13,76	340	5	4500	41,76	108	„	„	95
	„	236	„	5	13,83	339	3	4794	33,86	142	„	„	95
	„	242	„	5	13,81	341	5	5261	33,81	156	„	„	95

Geschütz	Datum	Anfangsgeschwindigkeit	Schallversuche				Schiessversuche				Meteorologische Angaben			
			Beobachtungspunkt 0 und x	Anzahl	Gemessene Schallzeit im Mittel	Mittlere Geschwindigkeit des Schalles	Anzahl	Mittlere Entfernung	Mittlere Flugzeit	Mittlere Fluggeschwindigkeit des Geschosses von 0 bis x Meter	Barometer	Thermometer in Celsiusgraden	Relative Feuchtigkeit in Percenten	Windrichtung und Stärke
		m/sec.	m		Sec.	m/sec.		m	Sec.	m/sec.	mm			
IX. 15 cm Haubitze L/12 Nr. 1 (DM) Geschossgewicht: 51, 51, 51, 51, 51	20./3.89	113	552	4	1,60	345	—	—	—	—	743	+10	90	N.N.O.
	„	205	990	2	2,90	341	5	1090	5,21	209	„	„	90	
	„	172	„	3	2,89	342	—	—	—	—	„	„	90	
	„	171	„	3	2,89	342	5	786	4,63	169	„	„	90	Schussrichtung
	„	245	1500	3	4,42	339	5	1525	6,22	245	„	„	90	
	„	248	„	2	4,41	340	3	1527	6,26	244	„	„	90	
	„	309	„	2	4,41	340	3	1523	5,26	290	„	„	90	
	„	„	1949	10	5,85	333	—	—	—	—	„	+12	80	
	„	„	3958	10	11,39	345	—	—	—	—	„	„	80	

51, 29,5, 29,5, 29,5, 29,5, 51, 51, 51, 29,5, 29,5, 29,5, 51, 51, 51 kg	"	"	5466	5	15,9	344	15	5461	50,8	107,5	"	"	80
	"	245	1949	10	5,79	337	—	—	—	—	"	"	80
	"	"	3958	6	11,40	347	—	—	—	—	"	"	80
	"	"	5466	10	15,9	344	13	4453	43,02	103,5	"	"	80
	"	309	1949	10	5,79	337	—	—	—	—	"	"	80
	"	"	3951	10	11,46	345	—	—	—	—	"	"	80
	"	"	5466	5	15,9	344	15	5468	50,5	108	"	"	80
	"	245	1949	10	5,79	337	—	—	—	—	"	"	80
	"	"	3958	6	11,40	347	—	—	—	—	"	"	80
	"	"	5466	10	15,9	344	15	4464	42,99	104	"	"	80
X. 12 cm Feldmörser Nr. 1 Geschossgewicht: 16,4, 16,6 kg	1./9.87	295	5500	5	15,42	357	10	5455	28,42	192	758	+20	86
	30./5.88	209	4000	3	11,24	356	9	3556	28,53	125	759	+28	65
XI. 12 cm K L/35 c/87 Nr. 9 (Norwegen) Geschossgewicht: 26 kg	25./5.89	545	7033	5	19,15	367	5	8273	26,9	308	754	+28	56

Schussrichtung SSW

Geschütz	Datum	Anfangsgeschwindigkeit	Schallversuche				Schiessversuche				Meteorologische Angaben			
			Beobachtungspunkt 0 und x	Anzahl	Gemessene Schallzeit im Mittel	Mittlere Geschwindigkeit des Schalles	Anzahl	Mittlere Entfernung	Mittlere Flugzeit	Mittlere Fluggeschwindigkeit des Geschosses von 0 bis x Meter	Datum	Thermometer in Celsius-graden	Relative Feuchtigkeit in Percenten	Windrichtung und Stärke
		m/sec.	m		Sec.	m/sec.		m	Sec.	m/sec.	m			NNO.
XII. 24 cm K L/35 Nr. 5 (Holland) Geschossgewicht: 215 kg	4./6. 89	548	2531	3	5,11	495	—	—	—	—	769	+23	80	7,8 m.
	„	548	4028	4	8,58	472	12	4020	8,63	466	769	+21	82	0,8–1,5 m.
	„	548	7083	5	17,56	401	10	7292	17,89	408	767	+23	70	1,8–2,5 m.
	„	548	10000	5	26,52	377	10	10338	28,45	363	767	+23	70	1,8–2,5 m.
	„	548	4000	6										
		Schall hin u. zurück			20,2	davon ist								
		die Flugzeit . .			8,63	bis zur Scheibe abzuziehen,								
		Schallzeit also .			11,57	345				—	769	+21	82	0,8–1,5 m.

XIII. 35 cm K L/35 Nr. 6 (Türkei) Geschossgewicht: 725 kg	7./6.89	547	2531	6	5,12	494	7	2567	5,16	497,5	765	+26	58	3,5–4,8 m
XIV. 34 cm K L/35 Geschossgewicht: 586 kg	5./7.89	585	11997	1	29,80	403	—	—	—	—	766	+21	68	2,5 m S.S.W.

Nummer der Reihe	μ	Endgeschw. des Projectils	t_r	t_b	$t_b - t_r$	f_r	f_b	$f_b - f_r$	c	c mit Rücksicht auf den Wind
	2,969	376	4,91	5,11	+0,20	—	—	—	334	335
	2,969	391	4,75	4,96	+0,21	—	—	—	334	335
Ia.	2,969	382	4,86	5,00	+0,14	4,85	4,97	+0,12	343	335
	2,933	386	4,82	4,99	+0,07	4,85	5,05	+0,20	336	339
	2,930	365	5,12	5,14	+0,02	—	—	—	335	336
	2,930	362	5,23	5,15	+0,07	—	—	—	335	336

Nummer der Reihe	μ	Endgeschw. des Projectils	t_r	t_b	$t_b - t_r$	f_r	f_b	$f_b - f_r$	c	c mit Rücksicht auf den Wind
II a.	3,415	289	17,17	17,44	+0,27	18,52	18,43	−0,09	344	350
	3,405		10,81	11,01	+0,70	10,46	11,06	+0,60	344	351
	4,388		9,96	11,11	+1,15	10,53	10,65	+0,12	344	348
	3,357	387	4,73	5,71	+0,98	4,71	4,55	−0,16	346	350
	3,426	247	21,86	22,39	+0,53	26,44	26,73	+0,29	344	352
	3,598		17,80	18,15	+0,35	18,77	18,99	+0,22	335	334
III a.	3,705		10,60	11,59	+0,99	11,26	11,22	−0,04	333	335
IV a.	5,874		10,21	11,12	+0,91	11,17	10,26	−0,91	344	351
	5,078		16,78	17,82	+1,04	21,28	22,78	+1,50	344	351
V a.	2,182		4,84	5,64	+0,80				336	337
	2,150		6,92	7,96	+1,04	7,02	8,74	+1,72	339	340
	2,168		9,92	11,19	+1,17	10,19	13,58	+3,39	338	339
VI a.	4,927		15,01	15,99	+0,98	16,14	15,98	−0,16	336	337
	4,927		15,01	15,98	+0,97	15,42	15,17	−0,25	336	336
VII a.	9,873		1,01	0,89	0,12				335	333
	9,873		2,08	2,01	−0,07				335	333
	9,873		3,33	3,19	−0,14				335	333

Nummer der Reihe	c beobachtet	c berechnet	c berechnet Rücksicht auf den Wind	c beobachtet	c berechnet	c berechnet mit Rücksicht auf den Wind
VIII a.	342	336	341	340	335	341
	340	336	341	340	335	341
	339	336	341	339	335	341
	334	336	341	341	335	341
IX a.	345	337	342	337	338	341
	341	337	342	347	338	341
	342	337	342	344	338	341
	342	337	342	337	338	341
	339	337	342	345	338	341
	340	337	342	344	338	341
	340	337	342	337	338	341
	333	338	341	347	338	341
	345	338	341	344	338	341
	344	338	341			
X a.	357	344	351	356	345	350

Nummer der Reihe	μ	t_r	t_b	$t_b - t_r$	f_r	f_b	$f_b - f_r$	c berechnet	c berechnet m. Rücks. a. d. Wind
XI a.	4,155	18,88	19,15	+0,77	25,88	26,90	+1,02	350	351
XII a.	2,087	5,10	5,11	+0,01				346	345
	2,104	8,64	8,53	−0,11	8,65	8,63	−0,02	344	344
	2,085	16,67	17,56	+0,89	17,82	17,89	+0,07	346	345
	2,085	25,55	26,52	+0,97	27,81	28,45	+0,64	346	345
XIII a.	1,333	4,91	5,12	+0,21	4,98	5,16	+0,18		
XIV a.	1,549	28,93	29,80	+0,87					

In der Reihe I sind die Anfangsgeschwindigkeiten und auch noch die Endgeschwindigkeiten des Projectils durchaus grösser als die normale Schallgeschwindigkeit. In der That stimmen auch, was schon ohne Rechnung ersichtlich, die beobachteten Flugzeiten und Schallzeiten sehr genau überein. Selbstverständlich folgen auch für die mittleren Schallgeschwindigkeiten und Fluggeschwindigkeiten dieselben Werthe. Die normale Schallzeit würde 6,14—6,21 statt 5 Secunden betragen.

In der Reihe II kommen schon grössere Strecken in Betracht, auf welchen die Endgeschwindigkeit des Projectils unter die Schallgeschwindigkeit sinkt. In diesen Fällen wird auch die Flugzeit grösser als die Schallzeit. Berechnet man nun die Schallzeiten nach der theoretischen Ansicht, so stimmt auch die Rechnung (t_r) oft mit der Beobachtung (t_b) sehr gut überein. In der überwiegenden Zahl von Fällen bleibt aber in allen Reihen die berechnete Schallzeit gegen die beobachtete mehr oder weniger zurück. Da aber auch die berechneten Flugzeiten gegen die beobachteten zurückbleiben, so folgt zunächst nur, dass die der Rechnung zu Grunde gelegten Coefficienten μ etwas zu klein waren. Bei genauerer Durchsicht sämmtlicher Reihen zeigt sich nun, dass die berechneten Schallzeiten etwas mehr hinter den beobachteten zurückbleiben, als die berechneten Flugzeiten. Während die Differenzen von $f_b—f_r$ öfter auch negativ sind, bleiben die Differenzen $t_b—t_r$, sehr wenige Fälle abgerechnet, positiv. Die algebraische Abweichungssumme $\Sigma(f_b—f_r) = +0{,}034\,\Sigma f_r$, dagegen $\Sigma(t_b—t_r) = +0{,}046\,\Sigma t_r$, wenn sämmtliche Beobachtungen in Betracht gezogen werden. Denkt man sich die Coefficienten μ so gewählt, dass $\Sigma(f_b—f_r) = 0$ wird, so fallen die berechneten Schallzeiten im ganzen noch immer etwas zu klein aus, so dass ungefähr $\Sigma(t_b—t_r) = +0{,}012\,\Sigma t_r$ wird.

Eine ernstliche Schwierigkeit für die erwähnte theoretische Ansicht wird man in den dargelegten Verhältnissen kaum finden, zumal die Mitführung der knallenden Kopfwelle durch das Projectil optisch nachgewiesen ist, demnach eine andere Auffassung recht künstlich erscheinen müsste. Doch bleibt die Tendenz der Beobachtung die Schallzeit der berechneten gegenüber zu vergrössern, zu erklären. Eine vollständige Analyse von Beobachtungen, die ich selbst nicht mitgemacht habe, vermag ich natürlich nicht zu geben. Es sei jedoch erlaubt, Vermuthungen auszusprechen.

---

einer Röhre von nur 42 m Länge gemessen und die Zahlen 330,36, 330,43, 330,70, 330,69, 330,77, 330,49, 330,45, 330,58, 330,60, 330,60 (Mittel 330,57) gewonnen, die also unter einander und mit der Regnault'schen in den drei ersten Stellen übereinstimmen. (Vergl. Tumlirz, Wiener Berichte, 80. Bd., II. a., October 1879.)

Die Messungen wurden mit einer Tertienuhr ausgeführt, welche der Beobachter mit dem Telephon am Ohr beim Hören des Knalls auslöste, beim Ankommen des Schalls arretirte. Eine Verkürzung der beobachteten Zeit kann sich nur ergeben, wenn der Beobachter auf den ersten Knall langsamer reagirt, als auf den zweiten, eine Verlängerung ergiebt sich in dem umgekehrten Fall. Nun ist es nicht wahrscheinlich, dass der Beobachter, welcher durch das Horchen am Telephon auf das Abfeuern vorbereitet ist, bei diesem schlechter reagiren wird, als beim Ankommen des Schalles nach einer noch unbekannten Zeit. So setzen auch die im Orchester spielenden Musiker ohne merklichen Fehler gleichzeitig ein, während dieselben beim Beginn der Musik ohne vorausgegangene Tactirzeichen sicherlich ungleich einsetzen würden. Bei Ausführung einer Bewegung nach einem Schall beträgt nach S. Exner die Reactionszeit 0,136 Secunden. Dieselbe ist aber wahrscheinlich kleiner oder grösser, je nachdem der Beobachter auf den Eintritt des Schalles mehr oder weniger vorbereitet ist.

Ich vermuthete, dass der Knall bei Beobachtungen auf grössere Entfernungen etwas verlängert erscheint, wodurch der Beobachter verführt werden kann, den zweiten Druck etwas später auszuüben; dies wird jedoch von Seiten des Leiters der Beobachtungen bestritten.

Vielleicht bedarf auch die Theorie selbst einer quantitativen Modification. Die knallende Kopfwelle existirt nachgewiesenermaassen nur bei die Schallgeschwindigkeit übersteigenden Projectilgeschwindigkeiten. Je mehr sich die letzteren der ersteren nähern, desto schwächer wird die Kopfwelle. Wann sie aufhört durch das Ohr wahrnehmbar zu sein, ist nicht untersucht. Vielleicht findet dies schon bei 360—370 m/sec. statt. Dann käme diese Welle nicht mehr in Betracht, und man hätte sich vorzustellen, dass von da an die Schallfortpflanzung mit der normalen Geschwindigkeit stattfindet, wodurch ebenfalls die beobachtete Schallzeit vergrössert würde.

Soviel sich nach dem bisher Vorliegenden urtheilen lässt, dürften die hervorgehobenen Umstände zur Erklärung der Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung ausreichen.

Es wird mir nachträglich von artilleristischer Seite eingewendet, dass die Erhöhung der Schallgeschwindigkeit durch die mit grosser Geschwindigkeit ausgestossenen Pulvergase hervorgebracht werden könnte. Ich zweifle nicht daran, dass bei Messungen auf kleinen Strecken auch die Pulvergase eine bescheidene Rolle spielen, wie dies schon Regnault bekannt war. Die Ausflussgeschwindigkeit der Pulvergase kann bei grossem rückständigem Gasdruck bedeutend, selbst grösser sein, als jene des Projectils, wird aber der geringen Masse der Gase und ihres grossen Volums wegen schon auf der Strecke von wenigen Metern vernichtet sein. Der Gasstrahl wird plattgedrückt und nimmt die Pilzform an, wie der blosse Anblick und noch überzeugender die Momentphotographie lehrt.

Die Existenz der optisch nachgewiesenen Kopfwelle wird nicht mehr in Abrede gestellt. Man ist jedoch geneigt, dieselbe nicht mit dem Knall, sondern mit dem Sausen des herankommenden Projectils in Zusammenhang zu bringen. Den Beweis, dass die Kopfwelle einen Knall erzeugt, glaube ich bereits erbracht zu haben. Die Kopfwelle ist stationär, wie ich mich durch zweimalige photographische Fixirung desselben Projectils wiederholt überzeugt habe. Das Sausen erfordert einen periodischen Wechsel der Luftverdichtung. Ein Projectil, das sich mit einer die Schallgeschwindigkeit übersteigenden Geschwindigkeit annähert, kann man vor der Ankunft überhaupt nicht hören, denn sonst müsste ja der Schall doch vorausgehen, was gegen die Voraussetzung ist. Saust das ankommende Projectil, so ist seine Geschwindigkeit gewiss kleiner als die Schallgeschwindigkeit und es fehlt die Kopfwelle, ein schnelleres Projectil mit der Kopfwelle saust aber für den Beobachter am Ziel nicht.

Strömungen durch Capillaritätskräfte.

Von

K. Fuchs.

1. Wenn man in ein Uhrglas Oel giesst und mitten darauf einen Tropfen Spiritus thut, dann beginnt das Oel an der Oberfläche unter dem Weingeist hervor centrifugal zu strömen und es stellt sich eine Circulation ein, als würde das Oel unten in der Mitte erwärmt. Wenn man hingegen den Weingeist an den Rand des Oelspiegels thut, so dass er einen Ring bildet, dann kehrt sich die Richtung der Circulation um: das Oel strömt an der Oberfläche centripetal.

Es ist leicht, für diese Erscheinung eine mögliche Erklärung zu finden. Nehmen wir an, dass das Oel in seiner obersten Schicht, wo es unmittelbar vom Weingeist berührt wird, von demselben so afficirt wird, dass seine Anziehung gegen unverändertes Oel sowohl als gegen Weingeist vermindert wird. Wenn diese Schicht dünn genug ist, dann werden sich Weingeist und unverändertes Oel über die veränderte Schicht hin anziehen und jene Schicht zwischen sich auspressen. Es ist also bei dieser Erklärung wesentlich, dass die Dicke der veränderten Schicht kleiner sei als die Wirkungsweite der Molecularkräfte. Der veränderte Stoff wird dahin abströmen, wo er freie Bahn findet: unter dem centralen Tropfen also centrifugal, unter dem peripherischen Ringe centripetal.

Sehr reich entwickelt finden wir solche Circulationen im Protoplasma der Pflanzen, und zwar regelmässig an die Bedingung der Sauerstoffaufnahme gebunden. Die Pflanzenzellen, welche hier in Betracht kommen, sind dünnwandige Kammern, die ursprünglich wohl ganz mit dem zähflüssigen, an den Wänden stark adhärirenden Protoplasma erfüllt waren, in denen sich aber oft so viel und so grosse Wasserbläschen bilden, dass das Plasma nur noch einen dünnen Wandbeleg bildet und zuweilen noch Wände und Balken, welche die einzelnen Wasserräume oder Vacuolen trennen. Der Zellkern befindet sich stets im Plasma, nie im Wasser, und ihm zu gespannt sind die Wände und Fäden, wenn solche vorhanden sind. Das Protoplasma strömt dann stets in einen Theil der Stränge von der Wand nach dem Kern, in einem anderen Theile aber umgekehrt vom Kern nach

der Wand, und zwar strömt das Plasma der Fäden an der Wand stets gewissen Punkten zu oder von gewissen Punkten ab, und diese Fusspunkte der Ströme ändern langsam ihre Lage.

Diese Strömungen erklären sich zwanglos durch die Annahme, dass Sauerstoff durch die Wand eindiffundirt und vom Plasma aufgenommen wird, dass aber sauerstoffreiches (gesättigtes) Plasma an der Wand sowohl als auch an sauerstoffarmem Plasma schwächer adhärirt, als armes Plasma an sich selbst und an der Wand. Wenn das Oxygen nur sehr langsam vom Plasma aufgenommen wird, dann bleibt die gesättigte Schicht dünner als die Wirkungsweite der Adhäsion zwischen Wand und armem Plasma, so dass das O-reiche Plasma von dem Punkte aus, wo die O-Aufnahme stattfindet, centrifugal abgedrängt wird.

Ueber den Kern müssen wir dann gerade die entgegengesetzte Annahme machen: er zieht O-reiches Plasma stärker an als O-armes und reisst überdies das O des Plasmas an sich, entsättigt es also. Dann wird an den Anströmungspunkten des Kernes das O-arme Plasma centrifugal abströmen.

Hier ist natürlich nicht der Ort, zu zeigen, welche Variationen diese Erklärung zulässt und wie viel seine Einzelheiten der Strömungen, die beobachtet worden sind, sich zwanglos aus unseren Theorieen erklären lassen.

2. Eine andere auffallende Erscheinung ist folgende: Wenn man auf einer Glastafel einen Wassertropfen und einen Weingeisttropfen in Contact bringt, dann zeigt sich unter vielen auffallenden Erscheinungen auch die, dass unter Umständen der Weingeist wie in einem Strahl in das Wasser stürmt. Es entsteht dann ein wildes Stürmen. Die Contactfläche von Wasser und Weingeist bleibt lange scharf erkennbar. Sie wird aber offenbar immer grösser; sie krümmt und kraust sich unter heftigem Wogen hin und her, bis das Gewirre für das Auge zu gross wird und die Contactfläche derart verblasst, dass sie nicht mehr zu erkennen ist.

Diese grosse Kraftentfaltung und tangentiale rapide Vergrösserung der Contactfläche lässt sich leicht erklären durch die Resultate, die in meiner Arbeit über die Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten enthalten sind (Exner Rep. S. 629, 1888). Es ist dort gezeigt, dass die Mischungsschicht sich kräftig tangential zu expandiren strebt, wenn die Adhäsion der beiden Flüssigkeiten grösser ist als das Mittel ihrer Cohäsionen. Diese expansive Spannung wird zwar um so schwächer, je dicker die Mischungsschicht ist; wenn aber die Schicht sich thatsächlich tangential expandirt, dann verdünnt sie sich gleichzeitig immer wieder, so dass die Kraft sich immer wieder restituirt. Hiermit scheint aber jenes Stürmen erklärt zu sein.

Protokoll der Versammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 4. März 1890.

Vorsitzender: Hofrath Ludwig.

Die Protokolle der beiden letzten Sitzungen werden verlesen und genehmigt.

Nach Mittheilung des Einlaufes gelangt ein Antrag des Herrn Dr. E. Lecher, betreffend die Ausschreibung zweier im Jahre 1895 zu verleihender Preise, zur Verlesung. Nachdem der Antragsteller und die Herren: Dr. Goldschmiedt, Dr. Herzig, Hofrath Ludwig, Dr. Margules, Hofrath Stefan und Dr. Wegscheider das Wort ergriffen hatten, wird beschlossen, den Antrag an eine Commission zu verweisen, deren Nominirung dem Präsidium übertragen wird.

Herr Dr. J. M. Pernter hält hierauf einen Vortrag über die Theorie des ersten Purpurlichtes der Abenddämmerung.

Der Secretär.

Protokoll der Versammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 18. März 1890.

Vorsitzender: Hofrath Ludwig.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Der Vorsitzende theilt mit, dass in die Commission zur Berathung des Antrages Lecher die Herren: v. Barth, Bauer, Ditscheiner, v. Lang, Lecher, Lieben, Margules, Oser und Stefan berufen wurden.

Herr Director Dr. Aristides Brezina hält einen Vortrag: Ueber den Stand unseres Wissens von den Meteoriten.

Die Herren: Stanislaus Bukowski, Ritter von Ossorga, Prof. Dr. Fl. Kratschmer und Dr. M. Russo werden als Mitglieder aufgenommen.

Der Sekretär.

Protokoll der Versammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 22. April 1890.

Vorsitzender: Hofrath Ludwig.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Nach Mittheilung des Einlaufes werden die angekündigten Vorträge gehalten, und zwar vom Herrn Hofrath Dr. J. Stefan: Ueber die Theorie der Eisbildung, und vom Herrn Dr. H. Strache: Ueber Pyridin-o-Dicarbonsäuren.

Herr Joseph Klaudy, Adjunkt am technologischen Gewerbemuseum, wird als Mitglied aufgenommen.

Der Secretär.

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:	Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert & Co., Kommandit-Gesellschaft, Nürnberg. (2/7)	Fabrik elektrischer Maschinen für Beleuchtung, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.
Hartmann & Braun, Bockenheim-Frankfurt a/M.	Elektrische und magnetische Messinstrumente. Vollständige Einrichtungen von Laboratorien.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.



XXVI. Band. 8. Heft.

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 8. Heftes.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1890.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

13

Ueber die Veränderung elektrostatischer Kraftwirkungen durch eine leitende Wand [1]).

Von

Gottlieb Adler.

Die vorliegende Abhandlung [2]) führt die Untersuchung der Veränderung, welche eine leitende, zur Erde abgeleitete Ebene in der mechanischen Kraftwirkung elektrischer Systeme hervorbringt, für zwei einfachste Fälle durch.

Der erste Theil der Abhandlung untersucht jene Aenderung, welche eine leitende Wand in der wechselseitigen mechanischen Kraftwirkung zweier elektrisch geladener Punkte bewirkt. Die Art der diesbezüglich gestellten Fragen und der Beantwortung, welche dieselben durch eine sehr einfache auf Thomson's Theorie der elektrischen Bilder basirende Rechnung finden, will ich an dem speciellen Beispiele der Anziehung illustriren. Für diese ergibt die geführte Rechnung, dass es für die Lagen des angezogenen elektrischen Massenpunktes zwischen dem anziehenden und der leitenden Wand eine kritische Stelle gibt, diesseits welcher jene eine Schwächung, jenseits welcher sie eine Verstärkung der ursprünglichen Anziehung bewirkt; dass weiters innerhalb der letzteren Zone ein Punkt existirt, in welchem diese Verstärkung einen Maximalwerth erreicht. Der kritische Punkt sowohl, als der Maximalpunkt der Verstärkungswirkung der Wand liegen um so näher an letzterer, je stärker die entferntere Masse im Verhältnis zur näheren geladen ist. Mit dem Betrage dieses Verhältnisses steigt auch der Maximalbetrag der Verstärkung in Procenten der ursprünglichen Anziehung ausgedrückt; für den Grenzfall, ein ursprünglich homogenes elektrisches Feld, in das der angezogene elektrische Punkt gebracht worden, vermag die Verstärkungswirkung der Wand 100 % der ursprünglichen Anziehung zu erreichen.

---

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus den Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. Bd. 99. 1890.

2) Den wesentlichen Inhalt dieser Abhandlung enthält eine vorläufige Mittheilung des akademischen Anzeigers Nr. 17 vom 5. Juli 1888.

Der zweite Theil der Abhandlung untersucht jene Veränderung, welche in der Anziehung eintritt, die eine leitende, zur Erde abgeleitete Kugel von einem influenzirenden elektrischen Punkte erfährt, sobald man hinter die Kugel eine unendliche leitende, zur Erde abgeleitete Ebene aufstellt. Thomson's Methode der elektrischen Bilder auf diese Anordnung angewendet, ergäbe die eintretende Veränderung durch eine doppelt unendliche Reihe und würde so auf allzugrosse rechnerische Schwierigkeiten führen.

Die Rechnung wird daher nach einer anderen Methode geführt, welche ich in einer früheren Abhandlung [1]) aus einander gesetzt habe, und die im Wesentlichen auf den Arbeitswerth der Ladung eines Conductors sich gründet; die so geführte Untersuchung ergibt das überraschende Resultat, dass die hinter die Kugel gebrachte leitende Wand in allen Fällen eine Schwächnng in jener Anziehung bewirkt, welche die Kugel vom influenzirenden elektrischen Punkte allein erfahren hätte. Diese Schwächung kann, wie die durchgeführte Rechnung weiterhin ergibt, bis auf 35 % der ursprünglichen Anziehung steigen, sie ist also mit der bekannten Thomson'schen Schirmwirkung, welche eine zwischen den elektrischen Punkt und die Kugel gebrachte, zur Erde abgeleitete leitende Ebene verursacht, an Grösse vergleichbar.

Es liess sich somit diese Schwächung mit Leichtigkeit experimentell nachweisen, aber nicht bloss an einer zur Erde abgeleiteten Kugel, sondern sie trat in gleicher Weise bei beliebig gestalteten, zur Erde abgeleiteten, elektrischen Pendeln ein, sobald während ihrer Anziehung durch einen elektrischen Körper hinter sie die zur Erde abgeleitete leitende Wand gebracht wurde [2]).

§ 1.

Die Veränderung, welche die Anwesenheit einer leitenden, zur Erde abgeleiteten Wand in der gegenseitigen mechanischen Kraftwirkung elektrisch geladener Punkte hervorbringt, wird, wie unmittelbar ersichtlich, dadurch bewirkt, dass die erstere unter dem Einflusse der elektrischen Massen mit influenzirter Ladung sich bedeckt.

---

1) Siehe Wiener Sitz.-Ber., Bd. 96, 1887.

2) Bekanntlich wird die Thomson'sche Schirmwirkung dazu verwendet, elektrostatische Systeme durch eine leitende, zur Erde abgeleitete Umhüllung störenden elektrischen Einflüssen, die von aussen kommen, zu entziehen. Die hier geführte Untersuchung zeigt jedoch, dass diese Umhüllung unter Umständen (ausgenommen sind vor allem Fälle, wo die leitende Hülle, wie beispielsweise in Thomson's Quadrantenelektrometer, selbst integrirender Bestandtheil des elektrischen Systems ist) erhebliche Störungen der ursprünglichen mechanischen Kraftwirkung zur Folge haben kann.

Nun ist bekanntlich die Ladung, welche in einer unendlichen, leitenden, zur Erde abgeleiteten Ebene durch die Influenzwirkung eines elektrischen Punktes auftritt, in ihrem Betrage der Ladung dieses letzteren gleich, dem Zeichen nach entgegengesetzt, und ihre Vertheilung so beschaffen, dass sie für alle Punkte des Raumes, die mit dem influenzirenden elektrischen Punkte auf derselben Seite der Ebene liegen, — es ist dies das in Hinkunft allein zu betrachtende elektrische Feld — genau so wirkt, als wäre die gesammte Ladung in einem einzigen Punkte vereinigt, der ebenso weit hinter der Ebene liegt, als der influenzirende Punkt vor derselben.

Jener elektrische Punkt, der vermöge seiner eben angegebenen Lage und Ladung die Wirkung der in der leitenden Wand influenzirten Ladung für das ganze in Betracht kommende elektrische Feld vollständig zu ersetzen vermag, wird von Thomson als das elektrische Bild des influenzirenden Punktes bezüglich der Ebene bezeichnet.

Hieraus ergibt sich, dass die Veränderung, die eine leitende, zur Erde abgeleitete Wand in der mechanischen Kraftwirkung zweier elektrischer Punkte auf einander bewirkt, einfach dadurch sich berechnen lässt, dass die mechanische Kraftwirkung der elektrischen Bilder beider bezüglich der Ebene in Anschlag gebracht wird.

So einfach dies der Rechnung zu Grunde gelegte Princip ist, und wiewohl bloss jene Fälle untersucht werden, wo beide elektrische Punkte auf derselben Normalen zur leitenden Ebene gelegen sind, ist gleichwohl die durch die letztere bewirkte Veränderung der ursprünglichen mechanischen Kraftwirkung, wie sie sich durch die geführte Rechnung ergibt, in der Mehrzahl der Fälle wohl kaum von vornherein vorherzusehen.

§ 1a.

Am leichtesten von vornherein zu übersehen ist jene Veränderung, welche die leitende, zur Erde abgeleitete Ebene in der mechanischen Kraftwirkung zweier gleichnamig geladener elektrischer Punkte hervorbringt.

Es bezeichne e die Ladung des die mechanische Kraftwirkung erfahrenden, me die Ladung des dieselbe ausübenden elektrischen Punktes, d den Abstand des letzteren von der leitenden Ebene. Es mag dann zunächst jene Configuration in Rechnung gezogen werden, wo der abgestossene elektrische Punkt sich zwischen dem abstossenden und der leitenden Ebene befindet, in der Distanz r vom ersteren, mithin im Abstande $d-r$ vom letzteren.

Die Veränderung der ursprünglichen Abstossung wird durch das Hinzutreten zweier elektrischer Bilder verursacht; erstens des elektrischen

Bildes des abstossenden Punktes von der Ladung $-me$ und der Distanz d hinter der Ebene, zweitens des elektrischen Bildes des abgestossenen Punktes von der Ladung $-e$ und dem Abstande $(d r)$ hinter der Ebene. Beide Bilder verstärken, wie unmittelbar ersichtlich, die ursprüngliche Abstossung auf den zwischenliegenden elektrischen Punkt um den Betrag

$$V = \frac{e^2}{4(d-r)^2} + \frac{m e^2}{(2d-r)^2}. \tag{1a}$$

Der Betrag dieser Verstärkung der ursprünglichen Kraftwirkung nimmt mit wachsender Annäherung der abgestossenen Masse an die Ebene stetig zu und erreicht unendlich nahe der letzteren einen unendlich hohen Werth.

Was die resultirende Abstossung

$$K' = \frac{me^2}{r^2} + \frac{e^2}{4(d-r)^2} + \frac{me^2}{(2d-r)^2} \tag{2a}$$

anlangt, so besteht für dieselbe eine Minimumstelle. Setzt man $\frac{dK'}{dr} = 0$, so ergibt sich jene Distanz r_m, in welcher der elektrische Punkt e ein Minimum der Abstossung erfährt, in ihrer Abhängigkeit vom Ladungsverhältnisse m gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1}{4m} = \left(\frac{d}{r_m} - 1\right)^3 \left[1 - \frac{1}{\left(2\frac{d}{r_m} - 1\right)^3}\right].$$

Es ergibt sich so

für das Ladungsverhältnis $m = 0{,}01;\quad r_m = \frac{1}{4}d$

$m = 0{,}031;\quad r_m = \frac{1}{3}d$

$m = 0{,}25;\quad r_m = \frac{1}{2}d$

$m = 2{,}3;\quad r_m = \frac{2}{3}d$

$m = 21{,}6;\quad r_m = \frac{4}{5}d$

$m = 43;\quad r_m = \frac{5}{6}d$

$m = 250;\quad r_m = \frac{8}{9}d$

$m = 600;\quad r_m = \frac{10}{11}d.$

Je stärker also der abstossende elektrische Punkt im Verhältnisse zum abgestossenen geladen ist, desto näher rückt die Minimumstelle der Kraftwirkung an die leitende Ebene.

§ 1b.

Es mag nun die Berechnung jener Veränderung geführt werden, welche die leitende Ebene in der Abstossung auf den ihr ferneren elektrischen Punkt bewirkt. Bezeichnet wieder d die Distanz der abstossenden elektrischen Masse me von der leitenden Ebene, r ihren Abstand von der abgestossenen elektrischen Masse e, dann ist für die in Frage stehende Configuration $(d+r)$ der Abstand der letzteren von der Ebene. Die Veränderung der ursprünglichen Kraftwirkung wird durch das Hinzutreten der zwei elektrischen Bilder, eines von der Ladung $-me$ in der Distanz d hinter der Ebene und eines zweiten von der Ladung $-e$ in der Distanz $d+r$ hinter der Ebene hervorgebracht.

Beide elektrische Bilder schwächen, wie unmittelbar ersichtlich, die ursprüngliche Abstossung

$$K = \frac{me^2}{r^2},$$

und zwar zusammen um den Betrag

$$S = \frac{e^2}{4(d+r)^2} + \frac{me^2}{(2d+r)^2}. \tag{1b}$$

Aus dem Ausdrucke für die solchergestalt resultirende Kraftwirkung

$$K' = \frac{me^2}{r^2} - \frac{e^2}{4(d+r)^2} - \frac{me^2}{(2d+r)^2} \tag{2b}$$

ergibt sich, dass es für die Lagen des elektrischen Punktes e eine kritische Stelle gibt, jenseits welcher die Abstossung in eine Anziehung übergeht.

Diese kritische Distanz r_0, in welcher die resultirende mechanische Kraftwirkung $K' = 0$ ist, ergibt sich aus Gl. 2b in ihrer Abhängigkeit vom Ladungsverhältnisse m, gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1}{4m} = \left(\frac{d}{r_0} + 1\right)^2 \left[1 - \frac{1}{\left(2\frac{d}{r_0} + 1\right)^2}\right].$$

Beispielsweise ist

für das Ladungsverhältnis $m = 0{,}03;\ r_0 = \frac{d}{2}$

$m = 0{,}07;\ r_0 = d$

$m = 0{,}15;\ r_0 = 2d$

$m = 0{,}6;\ \ r_0 = 9d$

für das Ladungsverhältnis $m = 1{,}42$; $r_0 = 20\,d$
$m = 3{,}03$; $r_0 = 50\,d$
$m = 6$; $r_0 = 100\,d$.

Es zeigt sich somit, dass dieser kritische Punkt, der die Zone der Abstossung von der bis in unendliche Distanz sich erstreckenden Zone der Anziehung scheidet, um so weiter hinausrückt, je stärker der abstossende elektrische Punkt im Vergleiche zum abgestossenen geladen ist.

In der Zone der Anziehung existirt eine Stelle r_m, in welcher der Betrag derselben ein Maximum erreicht. Sie ergibt sich aus $\frac{dK'}{dr} = 0$ in ihrer Abhängigkeit vom Ladungsverhältnisse m, gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1}{4m} = \left(\frac{d}{r_m} + 1\right)^3 \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{2d}{r_m} + 1\right)^3}\right].$$

Beispielsweise ist

für das Ladungsverhältnis $m = 0{,}009$; $r_m = \frac{d}{2}$
$m = 0{,}31$; $r_m = d$
$m = 0{,}093$; $r_m = 2\,d$
$m = 0{,}5$; $r_m = 10\,d$.

Es rückt somit dieser Punkt, in dem der elektrische Punkt e vom gleichnamig geladenen me das Maximum der Anziehung erfährt, um so weiter von der leitenden Ebene fort, je stärker der letztere Punkt im Verhältnisse zum ersteren geladen ist.

§ 1c.

Ungleich interessanter, weil von vornherein schwerer zu übersehen als die Ergebnisse des vorigen Paragraphen, gestalten sich die Verhältnisse bei jener Aenderung, die eine leitende, zur Erde abgeleitete Ebene in der Anziehung zweier entgegengesetzt geladener elektrischer Punkte hervorbringt.

Betrachten wir zunächst jene Configuration, wo der angezogene elektrische Punkt von der Ladung $-e$ zwischen der anziehenden Masse me und der leitenden Ebene liegt; bezeichnet d die Distanz der letzteren Masse von der leitenden Ebene und r ihren Abstand von der angezogenen Masse e, so ist der Abstand der letzteren von der Ebene $d - r$. Von den beiden elektrischen Bildern, welche die Veränderung der ursprünglichen Anziehung $K = -\frac{me^2}{r^2}$ bewirken, hat das Bild der anziehenden Masse die Ladung $-me$ und die Distanz d hinter der Ebene, und verstärkt, wie unmittelbar zu sehen, die ursprüngliche Anziehung um den Betrag $\frac{me^2}{(2d - r)^2}$; das elektrische Bild der

angezogenen Masse hingegen besitzt die Ladung e und liegt in der Distanz $d - r$ hinter der Ebene, schwächt somit die ursprüngliche Anziehung um den Betrag $\frac{e^2}{4(d-r)^2}$.

Es ergibt sich somit die unter dem Einflusse der leitenden, zur Erde abgeleiteten Ebene resultirende mechanische Kraftwirkung

$$K' = -\frac{me^2}{r^2} - \frac{me^2}{(2d-r)^2} + \frac{e^2}{4(d+r)^2}. \tag{2c}$$

Zunächst ist aus dieser Formel ersichtlich, dass die resultirende mechanische Kraftwirkung unendlich nahe der anziehenden Masse unendlich grosse negative (Anziehungs-) Werthe annimmt, in unendlicher Nähe der Wand hingegen positiv unendlich wird.

Es muss somit eine Nullstelle der resultirenden mechanischen Kraftwirkung geben. Aus $K' = 0$ ergibt sich die Distanz r_0, in welcher die resultirende Totalkraft verschwindet, in ihrer Abhängigkeit vom Ladungsverhältnisse m der beiden sich anziehenden elektrischen Punkte, gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{1}{4m} = \left(\frac{d}{r_0} - 1\right)^2 \left[1 - \frac{1}{\left(2\frac{d}{r_0} - 1\right)^2}\right].$$

Beispielsweise ist

für das Ladungsverhältnis $m = 0{,}016;\ r_0 = \frac{d}{3}$

$$m = 0{,}28;\quad r_0 = \frac{d}{2}$$

$$m = 0{,}69;\quad r_0 = \frac{3}{5}d$$

$$m = 1{,}3;\quad r_0 = \frac{2}{3}d$$

$$m = 3{,}5;\quad r_0 = \frac{3}{4}d$$

$$m = 7{,}2;\quad r_0 = \frac{4}{5}d$$

$$m = 12{,}5;\quad r_0 = \frac{5}{6}d$$

$$m = 44{,}4;\quad r_0 = \frac{8}{9}d$$

$$m = 81{,}8;\quad r_0 = \frac{10}{11}d$$

$$m = 576;\quad r_0 = \frac{20}{21}d.$$

Es rückt somit der Nullpunkt der resultirenden mechanischen Kraftwirkung um so näher an die leitende Ebene, je stärker die entferntere Masse im Verhältnis zur näheren geladen ist.

Aus Formel 2c ist ersichtlich, dass die leitende, zur Erde abgeleitete Ebene für die zwischengelegene elektrische Masse eine Verstärkung der ursprünglichen Anziehung zur Folge hat, vom Betrage

$$V = e^2 \left[\frac{m}{(2d - r)^2} - \frac{1}{4(d - r)^2}\right]. \qquad (1c$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Verstärkung nur dann positive Werthe haben kann, wenn $m > 1$, die entferntere Masse also die stärker geladene ist. Ist $m \leqq 1$, dann bewirkt die Anwesenheit der Wand für alle Lagen eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung, welche mit wachsender Annäherung an die Ebene stetig zunimmt, bis zu unendlich grossen Werthen an dieser selbst.

Für den ersteren Fall, in dem $m > 1$ ist, mag weiterhin untersucht werden, für welche Lagen der angezogenen elektrischen Masse eine effective Verstärkung, für welche eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung eintritt. Aus (Gl. 1c) $V = 0$ ergibt sich die Lage jenes durch den Abstand r_k charakterisirten Punktes, welcher die Zone effectiver Verstärkung von jener effectiver Schwächung scheidet:

$$r_k = 2d\,\frac{2m - 1 - \sqrt{m}}{4m - 1}. \qquad (3c$$

Eine zweite Frage, die unmittelbar sich aufwirft, ist die: Gibt es in der Zone der Verstärkung der ursprünglichen Anziehung eine Lage für die angezogene Masse, in welcher diese Verstärkung im Verhältnisse zur ursprünglichen Anziehung ein Maximum erreicht, einen Punkt also, der gewissermaassen ein Brennpunkt für die verstärkende Wirkung der leitenden Ebene darstellt, und weiters, wie gross ist in diesem Punkte das Verhältnis der Verstärkung zur ursprünglichen Anziehung?

Das Verhältnis der Verstärkung V zur ursprünglichen Anziehung $K = \frac{m e^2}{r^2}$ ist

$$v = \frac{1}{\left(2\frac{d}{r} - 1\right)^2} - \frac{1}{4m\left(\frac{d}{r} - 1\right)^2}; \qquad (4c$$

Aus $\frac{dv}{dr} = 0$ ergibt sich jene Lage, charakterisirt durch den Werth r_M, in welcher die procentuelle Verstärkung der ursprünglichen Anziehung ein Maximum erreicht, gegeben durch die Gleichung

$$r_M = 2\,d\,\frac{\sqrt[3]{m} - 1}{2\sqrt[3]{m} - 1} \tag{5c}$$

In der nachstehenden Tabelle enthält die erste Columne das Ladungsverhältnis der anziehenden zur angezogenen elektrischen Masse. Die zweite Columne enthält den zugehörigen Werth jener kritischen Distanz r_k, welche die Zone effectiver Verstärkung vor jener effectiver Schwächung trennt. Die vierte Columne gibt den Maximalwerth der Verstärkung in Procenten der ursprünglichen Anziehung, v_M, die dritte Columne definirt durch r_M jenen Punkt, in welchem dieses Maximum der procentuellen Verstärkung erreicht wird.

$m = 4$	$r_k = 0{,}6\,d$	$r_M = 0{,}54\,d$	$v_M = 5{,}5\%$
$m = 8$	$r_k = 0{,}79\,d$	$r_M = 0{,}6\,d$	$v_M = 12{,}5$
$m = 10$	$r_k = 0{,}81\,d$	$r_M = 0{,}69\,d$	$v_M = 15$
$m = 16$	$r_k = 0{,}857\,d$	$r_M = 0{,}75\,d$	$v_M = 21$
$m = 27$	$r_k = 0{,}89\,d$	$r_M = 0{,}8\,d$	$v_M = 29$
$m = 64$	$r_k = 0{,}93\,d$	$r_M = 0{,}857\,d$	$v_M = 42$
$m = 100$	$r_k = 0{,}97\,d$	$r_M = 0{,}88\,d$	$v_M = 48$
$m = 1000$	$r_k = 0{,}984\,d$	$r_M = 0{,}94\,d$	$v_M = 66$

Die Ergebnisse der vorstehend geführten Rechnung lassen sich somit in folgende Sätze zusammenfassen:

Für die Lagen des angezogenen elektrischen Punktes zwischen der anziehenden elektrischen Masse und der leitenden Ebene gibt es einen kritischen Punkt, diesseits welches — von der Ebene aus gesehen — eine Schwächung, jenseits welches eine Verstärkung der ursprünglichen Anziehung stattfindet. In der letzteren Zone der Verstärkung gibt es eine Stelle, an welcher diese Verstärkung, in Procenten der ursprünglichen Anziehung ausgedrückt, einen Maximalwerth erreicht.

Die Lage des kritischen Punktes sowohl, wie die des Maximalpunktes der Verstärkungswirkung der leitenden Ebene ist wesentlich abhängig vom Grössenverhältnisse der Ladung der anziehenden Masse zu der der angezogenen, und zwar rücken beide Punkte um so näher an die leitende Ebene, je grösser dieses Ladungsverhältnis ist. Ebenso ist der Maximalbetrag der Verstärkung, in Procenten der ursprünglichen Kraftwirkung ausgedrückt, von eben diesem Ladungsverhältnisse abhängig und steigt mit steigenden Werthen dieses letzteren. Für unendlich grosse Werthe des Ladungsverhältnisses convergirt die procentuelle Verstärkung gegen 100% der ursprünglichen Anziehung; es würden dann aber sowohl der kritische Punkt, als der Maximalpunkt der Verstärkungswirkung in unendliche Nähe der Wand rücken.

Ein ursprünglich homogenes elektrisches Feld, in das der entgegengesetzt geladene Punkt gebracht wird, stellt die Realisirung dieses letzteren Falles dar.

§ 1d.

Es mag schliesslich der Vollständigkeit halber die Veränderung der elektrischen Kraftwirkung für jene Configuration untersucht werden, wo die angezogene elektrische Masse die der leitenden Ebene fernere ist.

Es bezeichne wieder $-e$ die Ladung der angezogenen elektrischen Masse, me die der anziehenden, d die Distanz der letzteren von der leitenden Ebene, r den Abstand von der angezogenen Masse, dann ist die Distanz der letzteren von der leitenden Ebene in der angenommenen Anordnung $d + r$.

Zur Anziehung, welche die entferntere Masse ursprünglich erfährt

$$K = -\frac{m e^2}{r^2},$$

tritt durch die Anwesenheit der leitenden Ebene verändernd die Wirkung zweier elektrischer Bilder hinzu; von ihnen hat das Bild der anziehenden Masse die Ladung $-me$ und die Distanz d hinter der Ebene und schwächt die ursprüngliche Anziehung; das Bild der angezogenen Masse hingegen, von der Ladung e und der Distanz $d + r$ hinter der Ebene, verstärkt die ursprüngliche Anziehung.

Somit resultirt aus der Anwesenheit der leitenden, zur Erde abgeleiteten Ebene eine Totalverstärkung der ursprünglichen Anziehung vom Betrage

$$V = \frac{e^2}{4(d+r)^2} - \frac{m e^2}{(2d+r)^2}. \tag{1d}$$

Das Verhältnis derselben zur ursprünglichen Anziehung

$$v = \frac{e^2}{4m\left(\frac{d}{r}+1\right)^2} - \frac{e^2}{\left(2\frac{d}{r}+1\right)^2}. \tag{4d}$$

Zunächst ist unmittelbar ersichtlich, dass, wenn $m \geqq 1$ ist, für alle Lagen der angezogenen elektrischen Masse stets eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung resultiren muss. Diese ist im Verhältnisse zu letzterer um so grösser, je grösser m ist, je stärker also die nähere Masse im Vergleich zu der ferneren geladen ist, und sie nimmt mit wachsender Distanz r des angezogenen Punktes stetig zu, sich dem Grenzwerthe $1 - \frac{1}{4m}$ nähernd.

Soll also aus der Anwesenheit der leitenden Ebene eine effective Verstärkung der ursprünglichen Anziehung resultiren, so muss $m < 1$, der angezogene elektrische Punkt der stärker geladene sein.

Für diesen letzteren Fall mag dann zunächst, analog wie im vorigen Paragraphen, untersucht werden, ob und wann ein kritischer Punkt existirt, der einen Bereich der Verstärkung von einem solchen der Schwächung der ursprünglichen Anziehung scheidet.

Aus $v = 0$ ergibt sich der Durchgangspunkt von effectiver Verstärkung zu effectiver Schwächung der ursprünglichen Anziehung, gegeben durch die kritische Distanz

$$r_k = 2\,d\,\frac{\sqrt{m} - (2\,m + 1)}{4\,m - 1}; \tag{3d}$$

Für alle Lagen des angezogenen elektrischen Punktes, die der leitenden Ebene näher sind, als der kritische Punkt, besteht eine effective Verstärkung, für alle Lagen jenseits des kritischen Punktes effective Schwächung der ursprünglichen Anziehung.

Aber nicht in allen Fällen, wo die Ladung des angezogenen elektrischen Punktes stärker ist, als die des anziehenden, existirt ein kritischer Punkt. Vielmehr ist, soll ein solcher auftreten, das Ladungsverhältnis m innerhalb sehr enger Grenzen eingeschlossen. Aus Formel 3d ist unmittelbar ersichtlich, dass, wenn $m = \frac{1}{4}$ ist, der kritische Punkt in die Unendlichkeit rückt, und sinkt m unter diesen Werth, so wird r_k negativ, d. h. die kritische Stelle hat dann keine reale Existenz mehr. Erreicht also das Verhältnis der Ladung der anziehenden elektrischen Masse zu der der angezogenen den Werth 1:4, oder sinkt es unter diesen herab, dann findet für alle Lagen der angezogenen elektrischen Masse stets eine effective Verstärkung der ursprünglichen Anziehung infolge des Einflusses der leitenden Ebene statt.

Stellt man sich weiterhin die Frage, wie sich, wenn das Ladungsverhältnis $m < 1$ ist, der Maximalpunkt der Verstärkung befindet, so ergibt sich aus $\frac{d\,v}{d\,r} = 0$ die Lage jenes Punktes, in welchem die Verstärkung in Procenten der ursprünglichen Anziehung ein Maximum erreicht, gegeben durch die Gleichung

$$r_m = 2\,d\,\frac{1 - \sqrt[3]{m}}{2\,\sqrt[3]{m} - 1}. \tag{5d}$$

In der nachstehenden Tabelle enthält die erste Columne das Verhältnis m der Ladung der anziehenden elektrischen Masse zu der der angezogenen, die zweite Columne die kritische Distanz r_k, welche

die Zone effectiver Verstärkung von jener effectiver Schwächung scheidet, die dritte Columne gibt r_m, die Lage jenes Punktes, in welchem die Verstärkung in Procenten der ursprünglichen Anziehung ausgedrückt, ein Maximum erreicht, die vierte Columne gibt eben diesen Maximalbetrag an.

$m = 9:16$	$r_k = d$	$r_m = 0{,}54\,d$	$v_m = 0{,}9\%$
$m = 4:9$	$r_k = 2\,d$	$r_m = 0{,}92\,d$	$v_m = 3$
$m = 9:25$	$r_k = 4\,d$	$r_m = 1{,}35\,d$	$v_m = 6{,}25$
$m = 3:10$	$r_k = 4{,}63\,d$	$r_m = 1{,}94\,d$	$v_m = 13{,}5$
$m = 1:4$	$r_k = \infty$	$r_m = 2{,}8\,d$	$v_m = 21{,}12$
$m = 1:6$	—	$r_m = 9\,d$	$v_m = 55$
$m = 1:8$	—	$r_m = \infty$	$v_m = 100$

Sinkt das Ladungsverhältnis m unter den Betrag $1:8$ herab, dann nimmt der Procentualbetrag der Verstärkung mit wachsender Distanz stetig zu, sich für unendlich grosse Entfernung dem $\left(\frac{1}{4m} - 1\right)$ fachen der ursprünglichen Anziehung nähernd.

Die Ergebnisse der vorstehend geführten Rechnung lassen sich somit in folgenden Sätzen zusammenfassen:

Ist das Verhältnis m der Ladung der anziehenden elektrischen Masse zu der der angezogenen $\leqq 1:4$, so findet für alle Lagen der anzogenen Masse Verstärkung der ursprünglichen Anziehungen statt.

Ist dieses Ladungsverhältnis zwischen den Grenzen eingeschlossen $\frac{1}{4} < m < 1$, dann gibt es einen kritischen Punkt, diesseits welches, von der Ebene aus gesehen, effective Verstärkung, jenseits welches effective Schwächung der ursprünglichen Anziehung eintritt.

Innerhalb der Zone der Verstärkung gibt es wieder einen Punkt, in welchem diese, in Procenten der ursprünglichen Kraftwirkung ausgedrückt, einen Maximalwerth erreicht. Sowohl der kritische Punkt, als der Maximalpunkt der Verstärkungswirkung der leitenden Ebene rücken mit sinkendem Werthe des Ladungsverhältnisses immer weiter hinaus, während der Maximalbetrag der procentuellen Verstärkung gleichzeitig ansteigt.

Auf diese Zone der Verstärkung folgt jenseits des kritischen Punktes eine Zone effectiver Schwächung der ursprünglichen Anziehung. Innerhalb dieser Zone existirt ein Maximalpunkt der Schwächung nicht, sondern der Betrag derselben, zur ursprünglichen Anziehung ins Verhältnis gesetzt, nimmt mit wachsender Entfernung von der leitenden Ebene stetig zu und convergirt für unendlich grossen

Abstand von der leitenden Ebene gegen den Grenzwerth, nämlich das $\left(1-\frac{1}{4m}\right)$fache der ursprünglichen Kraftwirkung.

Erreicht das Ladungsverhältnis m den Wert Eins oder übersteigt es diesen, d. h. ist der anziehende elektrische Punkt der stärker geladene, dann tritt für alle Lagen der angezogenen elektrischen Masse effective Schwächung der ursprünglichen Anziehung statt. Diese Schwächung nimmt, in Procenten der ursprünglichen Kraftwirkung ausgedrückt, ohne im Endlichen ein Maximum zu erreichen, mit wachsender Entfernung der angezogenen Masse stetig zu und nähert sich in unendlich grosser Distanz dem Grenzwerthe, dem $\left(1-\frac{1}{4m}\right)$fachen der ursprünglichen Anziehung.

§ 2.

Im nachstehenden zweiten Theile der vorliegenden Abhandlung mag folgende Anordnung rechnend untersucht werden.

Eine zur Erde abgeleitete leitende Kugel befinde sich zwischen einem elektrischen Massenpunkte und einer leitenden, gleichfalls zur Erde abgeleiteten Wand; es soll untersucht werden, welche Aenderung die letztere auf jene mechanische Kraftwirkung hervorbringt, wie sie ohne ihre Anwesenheit zwischen elektrischem Massenpunkt und zur Erde abgeleiteter Kugel allein statt hätte.

Zur Durchführung der Rechnung muss vor Allem die elektrische Vertheilung, wie sie auf der leitenden, zur Erde abgeleiteten Kugel aus dem Einflusse des elektrischen Punktes und der leitenden Wand resultirt, hergeleitet werden.

Ich bediene mich dazu Thomson's Methode der elektrischen Bilder.

Es bezeichne e die in dem influenzirenden elektrischen Punkte concentrirte Ladung, f seine Distanz von der leitenden, zur Erde abgeleiteten unendlichen Ebene; auf der vom influenzirenden elektrischen Massenpunkte zu letzterer gezogenen Senkrechten befinde sich der Mittelpunkt einer leitenden, zur Erde abgeleiteten Kugel vom Radius a in der Distanz $c < f$ von der leitenden Ebene.

Unter der Einwirkung des elektrischen Massenpunktes e bedeckt sich die zur Erde abgeleitete Kugel mit influenzirter elektrischer Ladung, deren Betrag $p_1 = -\frac{ea}{c}$ und deren Vertheilung über ihre Oberfläche derart ist, dass sie für alle Punkte ausserhalb der Kugel so wirkt, als wäre sie zur Gänze in einem einzigen Punkte, dem elektrischen Bilde der influenzirenden Masse rücksichtlich der Kugel vereinigt, dessen

Distanz vom Mittelpunkte $f_1 = \frac{a^2}{c}$ beträgt, gegen den influenzirenden Punkt hin, oder wie in der Folge praktischer sein wird anzunehmen, $f_1 = -\frac{a^2}{c}$ gegen die leitende Ebene hin.

Andrerseits wirkt die elektrische Masse e auch influenzirend auf die leitende Ebene und gibt Veranlassung zu einer die letztere überdeckenden Ladung vom Betrage $-e$, die nach aussen hin so wirkt, als wäre sie in einem einzigen Punkte, dem elektrischen Bilde von e bezüglich der Ebene $(-e)$, vereinigt, welcher in der gleichen Distanz f hinter der Ebene liegt, wie die influenzirende Masse vor derselben.

Diese auf der leitenden Ebene influenzirte Ladung wirkt nun ihrerseits wieder influenzirend auf die leitende Kugel und diese bedeckt sich unter dieser Einwirkung oder der äquivalenten des elektrischen Bildes $(-e)$ mit einer Ladung vom Betrage

$$p_2 = \frac{ea}{2f-c},$$

die nach aussen hin so wirkt, als wäre sie in einem einzigen Punkte, dem elektrischen Bilde p_2 von $(-e)$ rücksichtlich der Kugel, vereinigt, dessen Distanz vom Mittelpunkte der Kugel gegen die Ebene hin

$$f_2 = \frac{a^2}{2f-c}$$

beträgt.

Dieses elektrische Bild gibt durch Influenz auf die leitende Ebene Veranlassung zur Entstehung eines elektrischen Bildes $q_2 = -p_2$, dessen Distanz hinter der leitenden Ebene $f-c-f_2$ beträgt; dieses elektrische Bild gibt wieder durch seinerseitige Influenz auf die leitende Kugel Veranlassung zur Entstehung eines innerhalb dieser befindlichen elektrischen Bildes vom Betrage

$$p_4 = -q_2\frac{a}{2f-2c-f_2} = p_2\frac{a}{2f-2c-f_2},$$

dessen Distanz vom Mittelpunkte gegen die leitende Ebene hin

$$f_4 = \frac{a^2}{2f-2c-f_2}$$

beträgt.

Setzt man diese Betrachtungen in gleicher Weise fort, so gelangt man zu einer unendlichen Reihe im Innern der Kugel entstehender elektrischer Bilder, deren Entstehung in letzter Linie auf das elektrische Bild $(-e)$ des influenzirenden elektrischen Massenpunkes bezüglich der Ebene zurückzuführen ist; die Reihe dieser Bilder erscheint mit geraden Indices bezeichnet.

Ebenso gibt aber auch das erste elektrische Bild des influenzirenden elektrischen Punktes e rücksichtlich der leitenden Kugel, p_1, Veranlassung zu einer unendlichen Reihe von elektrischen Bildern. Zunächst influenzirt p_1 auf der leitenden Ebene eine elektrische Ladung vom Betrage $q_1 = p$, deren Wirkung nach aussen ersetzbar ist, durch die einer q_1 gleich grossen Masse, die in einem einzigen Punkte vereinigt ist, der in der gleichen Distanz $f - c + f_1$ hinter der leitenden Ebene liegt, wie p_1 vor derselben. Durch Influenzirung von q_1 auf die leitende Kugel gibt dieses elektrische Bild Veranlassung zu einem neuen, innerhalb der Kugel gelegenen elektrischen Punkte, dessen Ladung

$$p_3 = - q_1 \frac{a}{2f - 2c + f_1} = p_1 \frac{a}{2f - 2c + f_1}$$

und dessen Distanz vom Mittelpunkte der Kugel gegen die Ebene hin

$$f_3 = \frac{a^2}{2f - 2c + f_1}$$

beträgt. Durch successive Influenzirung der so in der Kugel entstehenden Bilder auf die leitende Ebene und durch Rückinfluenzirung der durch erstere Wirkung in der Ebene auftretenden Bilder auf die leitende Kugel entsteht somit im Innern der letzteren auf der Centrallinie eine zweite unendliche Reihe elektrischer Bilder, charakterisirt durch ungerade Indices.

Das Bildungsgesetz dieser elektrischen Bilder ist sowohl für die mit geraden, als für jene mit ungeraden Indices durch die überaus einfachen Recursionsformeln gegeben:

$$\left.\begin{aligned} p_n &= \frac{a p_{n-2}}{2f - 2c - f_{n-2}}; \\ f_n &= \frac{a^2}{2f - 2c - f_{n-2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (1$$

$$p_n = p_{n-2} \frac{f_n}{a}. \qquad (2$$

Nach Thomson's Theorie der elektrischen Bilder lässt sich die mechanische Kraftwirkung, welche eine leitende, zur Erde abgeleitete Kugel, die der Influenz beliebig vertheilter, ausser ihr gelegener elektrischer Massen unterliegt, nach aussen hin ausübt, und somit auch jene, welche sie von aussen her erfährt, vollständig ersetzen durch jene Wirkung, die von, bezw. auf sämmtliche in ihrem Inneren befindlichen elektrischen Bilder geübt wird.

Sollte aber nach dieser Methode die mechanische Kraftwirkung, welche die zur Erde abgeleitete Kugel für die vorliegende Anordnung erfährt, berechnet werden, so müsste die Wirkung des influenzirenden

elektrischen Massenpunktes e und die der sämmtlichen hinter der leitenden Ebene gelegenen elektrischen Bilder auf die sämmtlichen im Inneren der leitenden Kugel gelegenen elektrischen Bilder in Rechnung gezogen werden, es würde sich mithin die mechanische Kraftwirkung auf die leitende Kugel durch eine doppelt unendliche Reihe darstellen, deren Summirung mit ungewöhnlichen Schwierigkeiten verbunden wäre.

Eine Methode, welche ich in einer früheren [1]) Abhandlung auseinandergesetzt habe, gestattet hingegen, die mechanische Kraftwirkung, welche die leitende Kugel in der vorliegenden Anordnung erfährt, sofort durch eine einfach unendliche Reihe darzustellen.

Diese Methode beruht darauf, den Arbeitswerth der Ladung eines Conductors in einem elektrischen Felde zur Grundlage der Berechnung zu wählen; nach dem Satze der Erhaltung der Energie gibt dann der negative Differentialquotient dieses Arbeitswerthes, nach irgend einer Richtung genommen, die mechanische Kraft an, welche den Conductor nach eben dieser Richtung im elektrischen Felde angreift. Dieser Arbeitswerth besitzt aber hier einen höchst einfachen Ausdruck. Bezeichnet Φ das Potential, wie es herrschen würde, wenn der zur Erde abgeleitete Conductor $\mathfrak{C}$, für den eben die mechanische Kraftwirkung berechnet werden soll, gar nicht im elektrischen Felde vorhanden wäre, so ist der Arbeitswerth seiner schliesslichen elektrischen Ladung

$$W_{\mathfrak{C}} = \int_{\mathfrak{C}} \Phi \sigma \, d\omega, \tag{3}$$

wo σ die schliesslich in den einzelnen Punkten $d\omega$ des Conductors $\mathfrak{C}$ herrschende Flächendichte bezeichnet und das Integral über die ganze Oberfläche des in Frage stehenden Conductors sich erstreckt.

Für die vorliegende Anordnung ist aber der Ausdruck für Φ ein sehr einfacher; das Potential Φ, wie es herrschen würde, wenn die leitende Kugel fehlte, wird sich lediglich zusammensetzen aus den Potentialen, herrührend vom influenzirenden elektrischen Massenpunkte e und seinem elektrischen Bilde $(-e)$ bezüglich der leitenden Ebene; es ist somit

$$\Phi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r_1},$$

wo r die Distanz eines beliebigen Punktes des elektrischen Feldes vom influenzirenden elektrischen Punkte e, r_1 seine Distanz vom elektrischen Bildpunkte $(-e)$ bezeichnet.

1) Ueber eine neue Berechnungsmethode der Anziehung, die ein Conductor in einem elektrischen Felde erfährt. Wiener Sitz.-Ber., Bd. 96, 1887.

Somit ergibt sich der Arbeitswerth der unter Einwirkung des influenzirenden elektrischen Punktes und der leitenden Ebene auf der zur Erde abgeleiteten Kugel auftretenden influenzirten Ladung

$$W_k = \frac{1}{2}\int_K \frac{e\sigma\, d\omega}{r} - \frac{1}{2}\int_K \frac{e\sigma\, d\omega}{r_1} = \frac{e}{2}\left[\int_K \frac{\sigma\, d\omega}{r_1} - \int_K \frac{\sigma\, d\omega}{r_1}\right]$$

$$= \frac{e}{2}(V_e - V_{e_1})\,(4_a),$$

wo V_e den Werth des Potentials, herrührend von der schliesslichen Elektricitätsvertheilung auf der leitenden Kugel für den influenzirenden Punkt e, und ebenso V_{e_1} den Werth derselben Function für den elektrischen Bildpunkt $(-e)$ bezeichnet.

Nun ist aber nach Thomson's Theorie der elektrischen Bilder das Potential der schliesslich auf der zur Erde abgeleiteten Kugel durch Influenz auftretenden Ladung für alle äusseren Punkte gegeben durch das Potential der sämmtlichen in ihrem Inneren gelegenen elektrischen Bildpunkte p.

Somit ergibt sich für die angegebene Anordnung der Arbeitswerth ihrer Ladung, wenn man die zu je einem Bildpunkte p gehörigen Werthe von V_e und $V_{e'}$ zusammenfasst durch die nachstehende einfach unendliche Reihe

$$W_K = \frac{e}{2}\left(\frac{p_1}{c+f_1} - \frac{p_1}{2f-c-f_1}\right) + \frac{e}{2}\left(\frac{p_2}{c+f_2} - \frac{p_2}{2f-c-f_2}\right) +$$

$$+ \cdots \frac{e}{2}\left(\frac{p_n}{c+f_n} - \frac{p_n}{2f-c-f_n}\right) + \cdots \qquad (4$$

Der negative Differentialquotient nach der Variabeln der Symmetrielinie des Systems, der Centrallinie, c wird dann die mechanische Kraft angeben, von welcher die zur Erde abgeleitete Kugel nach eben dieser Richtung angegriffen wird.

Wir haben uns zunächst von der Convergenz der Reihe für W zu überzeugen.

Jedes der in der Kugel liegenden elektrischen Bilder gibt Veranlassung zur Entstehung zweier Posten im Ausdrucke für W, einen positiven und einen negativen. Ich bezeichne die positiven, deren Bauart unter einander gleichartig ist, mit ungeraden Indices, die negativen Posten mit geraden Indices und weise die Convergenz der Folge der ersteren, wie der letzteren Posten nach.

Es ist

$$W_{2n+1} = \frac{p_n}{c+f_n} = \frac{\dfrac{p_n}{f_n}}{\dfrac{c}{f_n}+1}.$$

Nun ist aber

$$f_n = \frac{a^2}{2f - 2c - f_{n-2}}; \quad \frac{1}{f_n} = \frac{2f - 2c - f_{n-1}}{a^2}$$

nach der obigen Recursionsformel (2), aber weiters

$$\frac{p_n}{f_n} = \frac{p_{n-2}}{a},$$

mithin

$$W_{2n+1} = p_{n-2} \frac{a}{(2fc - 2c^2 + a^2) - cf_{n-2}}, \tag{5}$$

andrerseits ist aber

$$W_{2n-1} = \frac{p_{n-2}}{c + f_{n-2}}.$$

Der Quotient je zweier auf einander folgenden Glieder des Ausdruckes für W mit ungeraden Indices ist somit

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n-1}} = \frac{c + f_{n-2}}{c(2f - 2c - f_{n-2}) + a^2}.$$

Dieser Quotient muss aber in allen Fallen < 1 sein, weil f_{n-2} kleiner als a sein muss, weil weiters die Distanz des Kugelmittelpunktes von der leitenden Ebene $f - c > a$ sein muss, mithin im äussersten Falle noch $2f - 2c - f_{n-2} > a$ sein muss [1]).

So nahe wird in den folgenden numerischen Berechnungen der Kugelmittelpunkt an die leitende Ebene nicht heranrücken; seine kleinste Distanz von dieser wird in den folgenden Rechnungen nicht unter $f - c = 2a$ herabgehen. Schon für diesen Werth ist aber die Convergenz der ungeraden Posten, wie unmittelbar zu sehen, eine sehr bedeutende und, wie auf ähnliche Weise sich nachweisen lässt, auch für die geraden Posten im Ausdrucke für W.

Noch eine Eigenthümlichkeit der einzelnen Posten im Ausdrucke für W will ich herleiten, und zwar wieder für die ungeraden Posten, da sie für die geraden in gleicher Weise sich ergibt. Setzt man das Verfahren, welches zu Formel (5) für W_{2n+1} geführt hat, fort, indem man Zähler und Nenner dieses Ausdruckes, durch f_{n-2} dividirt, nach Recursionsformel (2).

$$\frac{p_{n-2}}{f_{n-2}} = \frac{p_{n-4}}{a}$$

setzt, so ergibt sich durch gleiches Verfahren, wie es oben vorgeschlagen worden,

$$W_{2n+1} = p_{n-2} \frac{a^2}{(2fc - 2c^2 + a^2)(2f - 2c) - a^2c - f_{n-4}(2fc - 2c^2 + a^2)}.$$

1) Hier wie im Folgenden sind f und c durch den Kugelradius als jeweilige Einheit der Länge ausgedrückt gedacht.

Setzt man das Recursionsverfahren fort, bis man auf p_1, bezw. p_2 gelangt, so ergeben sich die einzelnen Glieder der Reihe von W als Brüche, deren Zähler das Product von e^2 in eine mit wachsendem Index steigende Potenz von a ist, und deren Nenner eine ganze Function von c ist, deren Grad den Potenzexponenten von a um eine Einheit übersteigt.

Ausserdem ergibt sich $W_{4n+2} = W_{4n+3}$.

Aus der eben nachgewiesenen Convergenz der Reihe für W lässt sich nicht mit Sicherheit auf die Convergenz der Reihe ihrer Differentialquotienten nach c, welche die mechanische Kraftwirkung auf die Kugel darstellt, schliessen; die soeben dargelegte Bauart der Glieder W, in welchen lediglich der Nenner die Variable c in einer mit wachsendem Index in ihrem Grade zunehmenden, ganzen Function enthält, macht diese Convergenz plausibel. Indes wird die nachstehend folgende Zusammenstellung der den verschiedenen Werthen von f und c zugehörigen numerischen Werthe dieser Differentialquotienten schon an den ersten zwölf derselben eine praktisch völlig ausreichende Convergenz erkennen lassen.

Ich stelle nachstehend die expliciten Ausdrücke auf für die Differentialquotienten der ersten zwölf Glieder jener Reihe W, welche den Arbeitswerth der Ladung der Kugel in ihrer Lage zwischen influenzirendem elektrischen Punkte und leitender Wand darstellt, genommen nach der Variabeln der Symmetrieaxe des Systems, nach c.

$$A_1 = -e^2 a \frac{c}{(c^2 - a^2)^2}$$

$$A_2 = e^2 a \frac{f - c}{(2fc - c^2 + a^2)^2} = A_3$$

$$A_4 = e^2 a \frac{2f - c}{[(2f - c)^2 - a^2]^2}$$

$$A_5 = -\frac{e^2 a^2}{4} \frac{2fc - 3c^2 + a^2}{[c(fc - c^2 + a^2)]^2}$$

$$A_6 = \frac{e^2 a^2}{4} \frac{2f^2 - 6fc + 3c^2 - a^2}{[2f^2 c - 3fc^2 + c^3 - a^2 c + a^2 f]^2} = A_7$$

$$A_8 = \frac{e^2 a^2}{4} \frac{8f^2 - 10fc + 3c^2 - a^2}{[4f^3 - 8f^2 c + 5fc^2 - 2a^2 f - c^3 + a^2 c^2]^2}$$

$$A_9 = -e^2 a^3 \frac{4f^2 c - 12fc^2 + 8c^3 + 2a^2 f - 3a^2 c}{(4f^2 c^2 - 8fc^3 + 4c^4 + 4a^2 fc - 3a^2 c^2 + a^4)^2}$$

$$A_{10} = e^2 a^3 \frac{4f^3 - 20f^2c + 24fc^2 - 5a^2f - 8c^3 + 5a^2c}{(8f^3c - 20f^2c^2 + 16fc^3 - 10a^2fc - 4c^4 + 5a^2c^2 + 4a^2f^2 - a^4)^2} = A_{11}$$

$$A_{12}\ ^{1)} = e^3 a^3 \cdot$$

$$\cdot \frac{24f^3 - 52f^2c + 36fc^2 - 8a^2f - 8c^3 + 5a^2c}{(16f^4 - 48fc^3 + 52f^2c^2 - 24fc^3 + 16a^2fc - 12a^2f^2 + 4c^4 - 5a^2c^2 + a^4)^2}$$

Der erste Posten dieser Reihe, A_1, stellt die Wirkung dar, welche der elektrische Punkt e auf das erste elektrische Bild ausübt, das durch seine Influenzwirkung in der zur Erde abgeleiteten Kugel entsteht. Es ist somit A_1 jene Kraftwirkung, wie sie die zur Erde abgeleitete leitende Kugel von dem elektrischen ohne Anwesenheit der leitenden Wand erfahren würde.

Wir wollen diese Kraftwirkung als die ursprüngliche oder Hauptwirkung bezeichnen. Die Summe der übrigen A stellt dann die Veränderung dar, welche eine hinter die Kugel gebrachte, zur Erde abgeleitete Ebene in dieser ursprünglichen Kraftwirkung hervorbringt.

Auf Grundlage der vorstehenden expliciten Formeln für A stelle ich nachstehend die für verschiedene numerische Werthe von f und c berechneten zugehörigen numerischen Werthe, erstens der ursprünglichen Kraftwirkung, diese als Anziehung negativ bezeichnet, zweitens der durch die Anwesenheit der leitenden Ebene hinzutretenden, diese verändernden Glieder, zusammen. Die letzteren sind je in drei Zahlenwerthe zusammengefasst, von denen der erste die Summe der ersten drei Posten $A_2 - A_4$, der zweite die Summe der folgenden vier $A_4 - A_8$ und die dritte die Summe der letzten vier $A_8 - A_{12}$ in sich zusammenfasst.

Es ergibt sich so:

Für $f = 5a$; $c = 2a$ die Hauptwirkung $-\frac{2}{9}\frac{e^2}{a^2} = -0{,}2\frac{c^2}{a^2}$, die Veränderung derselben $(0{,}02277 - 0{,}01047 - 0{,}00101) \cdot \frac{e^2}{a^2}$, somit als eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung im Gesammtbetrage von $0{,}01129\frac{e^2}{a^2}$ oder von 5,8% dieser letzteren.

Für $f = 4a$, $c = 2a$ ergibt sich die Hauptwirkung

$$-\frac{2}{9}\frac{e^2}{a^2} = -0{,}2\frac{e^2}{a^2},$$

1) In dieser Schreibweise lassen die einzelnen A die ihnen entsprechenden Glieder der Reihe für W mit Leichtigkeit erkennen, aus denen sie durch Differentiation nach c hervorgegangen sind. Den Zähler der letzteren bildet der constante, von c unabhängige Factor im zugehörigen A-Posten, den Nenner die Quadratwurzel aus dem entsprechenden Nenner des A-Gliedes.

die Veränderung derselben $(0{,}02857 - 0{,}01273 - 0{,}00098) \cdot \frac{e^2}{a^2}$, somit als eine Schwächung der ursprünglichen Kraftwirkung um $0{,}01486 \frac{e^2}{a^2}$ oder um 6,7%.

Für $f = 5a$; $c = 3a$ ergibt sich die Hauptwirkung $-0{,}04688 \frac{e^2}{a^2}$, die Veränderung derselben $(0{,}01132 - 0{,}00359 - 0{,}00095) \frac{e^2}{a^2}$, somit als eine Schwächung vom Gesammtbetrage $0{,}00678 \frac{e^2}{a^2}$, oder von 14,4% der ursprünglichen Anziehung.

Für $f = 6a$; $c = 4a$ beträgt die ursprüngliche Kraftwirkung $-0{,}01777 \frac{e^2}{a^2}$, die Veränderung derselben $(0{,}00568 - 0{,}00141 - - 0{,}00060) \frac{e^2}{a^2}$, somit resultirt eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung um $0{,}00367 \frac{e^2}{a^2}$ oder 20,6% dieser letzteren.

Bei einer zweiten Reihe von Berechnungen befinde sich der influenzirende elektrische Punkt e immer in derselben Distanz $f = 10a$ von der leitenden Ebene, während der Kugelmittelpunkt immer mehr und mehr dieser letzteren sich nähere.

Es ergibt sich so für

$f = 10a$; $c = 2a$; die ursprüngliche Kraftwirkung

$$-\frac{2}{9}\frac{e^2}{a^2} = -0{,}2\frac{e^2}{a^2},$$

die Veränderung derselben $(0{,}011864 - 0{,}00574 - 0{,}000309) \cdot \frac{e^2}{a^2}$, es ergibt sich somit eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung um $0{,}005815 \frac{e^2}{a^2}$ oder um 2,6% dieser letzteren.

Für $f = 10a$; $c = 3a$ ergibt sich die Hauptwirkung $-0{,}04688 \frac{e^2}{a^2}$, die Veränderung derselben $(0{,}005384 - 0{,}001726 - 0{,}000057) \frac{e^2}{a^2}$, somit ergibt sich eine Schwächung der ursprünglichen Kraftwirkung um 0,003601 oder um 7,7%.

Für $f = 10a$; $c = 4a$ ergibt sich die Hauptwirkung als $-0{,}177 \frac{e^2}{a^2}$, die Veränderung derselben $(0{,}003088 - 0{,}000766 - 0{,}000028) \frac{e^2}{a^2}$ als

eine Schwächung im Betrage von $0{,}002294 \frac{e^2}{a^2}$ oder von 12,9% der ursprünglichen Anziehung.

Für $f = 10a$; $c = 5a$ ergibt sich die Hauptwirkung $- 0{,}00868 \frac{e^2}{a^2}$, die Veränderung derselben $(0{,}002031 - 0{,}000407 - 0{,}000020) \frac{e^2}{a^2}$ als eine Schwächung um $0{,}001604 \frac{e^2}{a^2}$ oder um 18,4% der ursprünglichen Anziehung.

Für $f = 10a$; $c = 6a$ ergibt sich die Hauptwirkung $- 0{,}004894 \frac{e^2}{a^2}$, die Veränderung derselben $(0{,}001475 - 0{,}000244 - 0{,}000045) \frac{e^2}{a^2}$, somit als eine Schwächung um $0{,}001186 \frac{e^2}{a^2}$ oder um 24,2% der ursprünglichen Anziehung.

Für $f = 10a$; $c = 7a$ ergibt sich die Hauptwirkung gleich $- 0{,}003039 \frac{e^2}{a^2}$, die Veränderung derselben $(0{,}001168 - 0{,}000170 - - 0{,}000024) \frac{e^2}{a^2}$, somit als eine Schwächung um $0{,}000974 \frac{e^2}{a^2}$ oder um 32,04% der ursprünglichen Anziehung.

Endlich ergibt sich für $f = 10$; $c = 8$ die Hauptwirkung $- 0{,}002015 \frac{e^2}{a^2}$, die Veränderung derselben $(0{,}001020 - 0{,}000136 - 0{,}000155) \frac{e^2}{a^2}$, somit als eine Schwächung im Betrage von $0{,}000729 \frac{e^2}{a^2}$ oder von 36% der ursprünglichen Kraftwirkung [1]).

Ein Ueberblick über die vorstehend zusammengestellten Ergebnisse der Rechnung ergibt vor allem das überraschende Resultat, dass für alle Lagen der zur Erde abgeleiteten Kugel zwischen dem influenzirenden elektrischen Punkte und der zur Erde abgeleiteten Ebene stets eine Schwächung jener Anziehung eintritt, welche sie ohne Anwesenheit der leitenden Ebene vom influenzirenden elektrischen Punkte allein erfahren haben würde.

---

1) Aus den hier zusammengestellten numerischen Werthen für die einzelnen Gruppen der Glieder A der Reihe für die mechanische Kraftwirkung auf die leitende Kugel ergibt sich, dass sie in allen Fällen, ausgenommen den letzten, wo die Kugel im Verhältnisse zu ihrem Abstande vom influenzirenden Punkte sehr nahe an die Ebene heranrückt, sehr rasch abnehmen und die Convergenz der Reihe eine praktisch völlig ausreichende ist.

Die Schwächung dieser letzteren, ursprünglichen, Kraftwirkung ist, in Procenten derselben ausgedrückt, um so bedeutender, je näher die Kugel an die leitende Ebene heranrückt. Bei einer und derselben Distanz $f - c$ des Kugelmittelpunktes von der leitenden Ebene und ebenso bei einem und demselben Verhältnisse dieser Distanz zur Distanz c des Kugelmittelpunktes vom influenzirenden Punkte ist aber der Procentsatz der Schwächung um so grösser, je grösser die letztere Distanz ist, je schwächer also die ursprüngliche Kraftwirkung ist.

Das Resultat, dass die Anwesenheit der zur Erde abgeleiteten leitenden Ebene für alle Lagen der zur Erde abgeleiteten Kugel eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung auf dieselbe zur Folge hat, ist nach den Ergebnissen des § 1c insofern überraschend, als ein elektrischer Massenpunkt, an der Stelle des elektrischen Bildes der influenzirenden Masse bezüglich der Kugel gelegen, und ebenso stark, aber unveränderlich geladen wie dieses, für die Mehrzahl der vorstehend untersuchten Lagen eine Verstärkung der ursprünglichen Anziehung erfahren müsste.

Von vornherein ist dieses Ergebnis der vorstehend durchgeführten Rechnung wohl kaum vorherzusehen. Bei der festgesetzten Anordnung wirken nämlich zwei, die ursprüngliche Kraftwirkung verändernde Ursachen gegen einander. Durch die Anwesenheit der zur Erde abgeleiteten Ebene hinter der gleichfalls zur Erde abgeleiteten Kugel befindet sich diese zwischen einem mit unveränderlicher Stärke positiv geladenen Massenpunkt und der durch letzteren in der leitenden Ebene influenzirten negativen Ladung. Eine oberflächliche Betrachtung würde, da diese letztere die durch Influenz des elektrischen Massenpunktes gleichfalls negativ geladene Kugel nach der gleichen Richtung treibt, wie die elektrische Masse selbst, die Vermuthung nahelegen, die Anwesenheit der leitenden Ebene hinter der Kugel müsse eine Verstärkung der ursprünglich auf diese wirksame Anziehung zur Folge haben, es müsste ihr das vorstehende Rechnungsergebnis paradox erscheinen.

Nun ist aber eine zweite Wirkung der in der Ebene influenzirten Ladung zu berücksichtigen, die nämlich, dass sie den Betrag der gleichnamigen, in der Kugel durch den elektrischen Punkt influenzirten Ladung zu schwächen sucht, und es stehen somit zwei Wirkungen der hinter die Kugel gebrachten leitenden Ebene gegen einander, so dass ohne durchgeführte Rechnung unmöglich ist, zu entscheiden, in welchem Sinne die resultirende Veränderung der ursprünglichen Kraftwirkung erfolgen werde.

Dieses überraschende Rechnungsergebnis, dass die hinter eine leitende, zur Erde abgeleitete und der Influenz eines elektrischen Punktes ausgesetzte Kugel gebrachte Ebene stets in gleicher Weise eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung bewirkt, wie eine zwischen die influenzirende Masse und die Kugel eingeschobene abgeleitete Ebene, dass weiterhin die erstere Schwächung 37% der ursprünglichen Kraftwirkung erreichen kann und somit mit der Thomson-schen Schirmwirkung an Grösse vergleichbar ist, konnte mit Leichtigkeit experimentell bestätigt werden, und zwar nicht nur an einer abgeleiteten Kugel, sondern auch an beliebig gestalteten, zur Erde abgeleiteten elektrischen Pendeln.

Ueber die Anwendung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf moleculare und im Besonderen auf elektrolytische Vorgänge.

Von

Theodor Gross.

Viele Physiker nehmen gegenwärtig an, dass der II. Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, der ursprünglich für die äussere mechanische Arbeit abgeleitet wurde, auch auf die molecularen Vorgänge anzuwenden ist, und im Besonderen wird dieser Satz als eine geeignete Grundlage für die Theorie der Elektrolyse betrachtet. Denn die Vorgänge, welche in einem constanten Elemente bei verschwindend kleiner Stromstärke stattfinden, werden für vollkommen umkehrbar gehalten und sollen demnach „den thermodynamischen Gesetzen der reversiblen Processe" unterliegen, und bei stärkeren, polarisirbaren Strömen soll der II. Hauptsatz näherungsweise gelten; ähnlich wie er auch auf andere Vorgänge angewendet wird, für welche die vollständige Umkehrbarkeit nur eine nicht zu erreichende Grenze bildet.

Im Folgenden wird nun aber gezeigt werden, dass die Uebertragung des zweiten Hauptsatzes auf das moleculare Gebiet aus theoretischen und erfahrungsmässigen Gründen nicht zulässig ist.

I. In der mechanischen Wärmetheorie werden innere und äussere Kräfte unterschieden, und die Arbeit der ersteren wird als innere, die der letzteren als äussere bezeichnet.

Als innere Kräfte definirt Clausius[1]) „diejenigen, welche die Atome des Körpers unter einander ausüben, und welche daher in der Natur des Körpers selbst begründet sind"; als äussere „die, welche von fremden Einflüssen, unter denen der Körper steht, herrühren". Die innere Arbeit ist nach ihm durch den Anfangs- und Endzustand des Körpers vollkommen bestimmt; weil sie immer Null ist, wenn der Körper einen Kreisprocess durchmacht.

1) Mech. W. Th. 2. Aufl. S. 29 u. ff.

„Denkt man sich nämlich, dass der Körper in verschiedenen Weisen aus dem einen in den andern Zustand gebracht und immer in einer und derselben Weise wieder in den ersten Zustand zurückgebracht werde, so müssen bei den in verschiedenen Weisen vor sich gehenden ersten Aenderungen innere Arbeiten geleistet werden, welche sich alle mit einer und derselben bei der Rückänderung geleisteten inneren Arbeit aufheben, was nur möglich ist, wenn sie unter einander gleich sind."

Anders verhält sich die äussere Arbeit, sie kann, wenn der Anfangs- und Endzustand des Körpers gegeben sind, doch noch sehr verschieden ausfallen.

Indem Clausius die innere Arbeit als die zwischen den Atomen eines Körpers geleistete bestimmt, entsteht die Frage, ob die moleculare Arbeit zwischen den Atomen verschiedener Körper als innere oder als äussere zu betrachten ist, d. h. ob sie durch deren Anfangs- und Endzustand stets vollständig bestimmt ist oder nicht.

Ist der Vorgang ein rein physikalischer, so kann allerdings die Summe der auf einander wirkenden Atome der verschiedenen Körper als ein Körper aufgefasst werden, auf dessen moleculare Arbeit die Sätze von Clausius unmittelbar anzuwenden sind; aber in Bezug auf die chemischen Aenderungen geben sie keine Entscheidung.

Verläuft nämlich ein chemischer Kreisprocess für eine Masse M unter chemischer Einwirkung anderer zusammengesetzter Massen M_1, $M_2, \ldots$, so werden letztere an seinem Ende in vielen Fällen nicht in denselben Zuständen wie an seinem Anfange sein, und die gesammte moleculare Energieänderung ist dann nicht Null. Das Verhalten der nicht zurückverwandelten molecularen Energie bleibt daher nach Clausius zweifelhaft.

Aber aus den Thatsachen der Thermochemie folgt, dass auch die chemische Arbeit stets vom Wege unabhängig ist. Findet nämlich die chemische Aenderung einer Masse so statt, dass letztere keine andere als chemische Arbeit leistet, so wird das Aequivalent der gesammten Energieänderung als positive oder negative Wärme erhalten, die erfahrungsmässig durch den Anfangs- und den Endzustand der Masse vollständig bestimmt ist. Demnach muss sich auch die chemische Arbeit, da sie dieser Wärme äquivalent ist, ebenso verhalten.

Also die moleculare Arbeit mit Einschluss der chemischen ist stets vom Wege unabhängig. Eine unendlich kleine rein moleculare Energieänderung ist folglich stets durch ein vollständiges Differential darzustellen.

Nun lässt sich sofort untersuchen, ob auf moleculare Vorgänge der II. Hauptsatz angewendet werden kann.

Ist dQ das einem Körper zugeführte Wärmeäquivalent einer unendlich kleinen molecularen Energieänderung, $\frac{1}{A}$ das mechanische Wärmeäquivalent, so ist nach dem Vorigen immer

$$\frac{dQ}{A} = d f(x, y, z \ldots), \tag{1}$$

wenn $d f(x, y, z \ldots)$ das vollständige Differential der unabhängig Veränderlichen $x, y, z \ldots$ bedeutet, über deren Zahl nichts vorausgesetzt wird.

Nach dem II. Hauptsatze müsste aber auch, wenn ϑ die absolute Temperatur bezeichnet, $\frac{dQ}{\vartheta}$ ein vollständiges Differential derselben Veränderlichen sein. Also ist

$$\frac{dQ}{A\vartheta} = d\varphi(x, y, z \ldots) \tag{2}$$

zu setzen, oder

$$\vartheta\, d\varphi = df \tag{3}$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn ϑ eine Function von φ ist; und zwar besteht sie dann unabhängig von der Umkehrbarkeit des Vorganges, weil die Gleichung (1) ein vollständiges Differential ist.

Wird, was immer möglich ist, die vom gewöhnlichen Nullpunkte gerechnete Temperatur als unabhängig Veränderliche gewählt, so wird der Gleichung (3) genügt, wenn dies die einzige unabhängig Veränderliche ist, weil ϑ nur von der Temperatur abhängt. Der Vorgang muss also dann durch eine Function der Temperatur allein bestimmt sein. Nimmt man dazu noch die Bedingungen $dQ = df = d\varphi = 0$ für eine adiabatische, und $\vartheta =$ Const. für eine isotherme Aenderung, so hat man sämmtliche drei Fälle, in denen die wie angegeben näher bestimmte Gleichung (3) gilt.

Der Ausdruck $\frac{dQ}{\vartheta}$ hat also für rein moleculare Aenderungen durchaus nicht eine ähnliche Bedeutung wie für die mit äusserer mechanischer Arbeit verbundenen. Bei den letzteren ist $\frac{dQ}{\vartheta}$ ein vollständiges Differential, wenn der Vorgang umkehrbar ist, während er im übrigen keinen Beschränkungen unterliegt. Bei den ersteren dagegen ist dieser Ausdruck ein vollständiges Differential, wenn der Vorgang gewissen analytischen Bedingungen genügt, während seine Umkehrbarkeit nicht in Betracht kommt.

Also folgt:

Der II. Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie gilt nicht für rein moleculare Vorgänge.

II. Das Vorstehende kann sofort auf die Elektrolyse angewendet werden. Bei dieser findet eine moleculare Aenderung statt, indem sich die Ionen trennen, und eine äussere, wenn sie sich in festem oder gasförmigen Zustande abscheiden. Die letztere, die bei sehr schwachen Strömen vernachlässigt werden kann, ist nicht umkehrbar, und die erstere unterliegt ihrer Natur nach nicht dem II. Hauptsatze. Als „vollkommen reversibel“ und dem II. Hauptsatze unterworfen werden die Vorgänge in einem constanten Elemente ausgegeben, „welche bei verschwindend kleiner Stromintensität vor sich gehen, wobei man die dem Widerstande und dem Quadrat dieser Intensität proportionale Wärmeentwicklung im Schliessungsdrahte als verschwindende Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen kann“ [1]).

Wenn also (A) ein constantes Element C von der elektromotorischen Kraft p in entgegengesetzter Richtung gegen letztere in einen Stromkreis eingeschaltet wird, dessen elektromorische Kraft e nur unendlich wenig grösser als p ist, und wenn dann (B) das Element durch einen unendlich grossen Drahtwiderstand für sich geschlossen wird, bis die im Strome (A) getrennten Ionen wieder vereinigt sind, so sollen die Vorgänge (A) und (B) strenge Umkehrungen von einander sein.

Dies ist aber, wie sich auf verschiedenen Wegen zeigen lässt, durchaus nicht der Fall.

Wird die Auffassung der chemischen Vorgänge vorausgesetzt, welche der Verfasser in einem früheren Aufsatze [2]) entwickelt hat, so sind diese überhaupt nicht umkehrbar, weil sie in jedem Momente stürmisch verlaufen. Folgen die einzelnen chemischen Aenderungen in einer endlichen Masse sehr langsam auf einander, so wird das Gleichgewicht der letzteren in jedem Momente allerdings nur unendlich wenig gestört werden. Eine äussere mechanische Arbeit, welche sie leistet, wird daher umkehrbar sein können, wenn dafür nur der Gesammtzustand der Masse in Betracht kommt; aber die chemische Arbeit wird ebenso wenig umkehrbar sein wie z. B. die Hebung eines Gewichtes, wenn sie aus unendlich kleinen und unendlich schnellen Hebungen bestände, die unendlich langsam nach einander erfolgen.

Aber wenn dies auch unberücksichtigt bleibt, ist doch leicht ersichtlich, dass (A) und (B) nicht Umkehrungen von einander sind.

Die Stromwärme ist nämlich nur im Vorgange (A) eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung, während sie in (B), wo der Strom durch einen unendlich grossen Widerstand unendlich klein wird, von der ersten Ordnung unendlich klein ist.

---

1) Helmholtz, die Thermodynamik chemischer Vorgänge. Ber. d. Berl. Akad. 1882, 2. Februar, S. 24.

2) Sitzb. d. Wiener Akad. Bd. 98 Abth. IIa 1889 Juni, S. 852 u. ff.

Wollte man aber, um wiederum eine von der zweiten Ordnung unendlich kleine Stromwärme zu erhalten, auch den Strom (B) dadurch unendlich klein machen, dass in ihn ein Element C' mit einer elektromotorischen Kraft p' eingeschaltet würde, die unendlich wenig kleiner als p ist, so würde der so erhaltene Strom (B') ebenfalls keine Umkehrung von (A) sein. Denn auch die Vorgänge in den Uebergangsschichten, welche an dem positiven Pole des Elementes C liegen, sind in den Strömen (A) einerseits und (B) oder (B') andrerseits keineswegs Umkehrungen von einander.

Wird nämlich als constantes Element z. B. ein D gewählt, dessen Zinkpol in Zinksulfatlösung taucht, so fliesst der Strom (A) von letzterer zu ersterem. Der dem Strome entgegenwirkende Potentialsprung zwischen dem Zink und der Zinksulfatlösung ist also ausgeglichen, und die Differenz der Potentiale, welche zu beiden Seiten der Uebergangsschicht thatsächlich bestehen, hängt von dem daselbst vorhandenen Widerstande ab; sie ist also, da nach der Voraussetzung $e - p$ unendlich klein ist, eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung.

Ferner wird durch Abscheidung von Zink an der Zinkelektrode die chemische Energie vermehrt und Wärme verbraucht.

Sollten diese Vorgänge durch (B) oder (B') umgekehrt werden, so müsste in diesen Strömen die Differenz der Potentiale, die zu beiden Seiten der Uebergangsschicht an der Zinkelektrode bestehen, wiederum von der zweiten Ordnung unendlich klein und entgegengesetzt wie in (A) sein; so dass die Elektricität vom Zink zum Elektrolyten fliessen würde, und ausserdem müsste die Wärme, welche bei Abscheidung des Zinks in der Uebergangsschicht verbraucht wurde, ebendaselbst wiedergewonnen werden.

In den Strömen (B) und (B') ist aber zwischen der Zinkelektrode und dem Elektrolyten ein Potentialsprung vorhanden, d. h. die Potentialdifferenz ist daselbst von dem Gesammtwiderstande des Stromes unabhängig; und zwar ist sie in (B) endlich, in (B') unendlich klein von der ersten Ordnung in beiden Fällen also unendlich gross gegen die in (A) daselbst vorhandene Potentialdifferenz.

Ferner findet innerhalb eines Potentialsprunges im Stromkreise kein Fliessen der Elektricität statt, sondern sie wird dort vom niedrigeren auf das höhere Potential gehoben. Ueberdies entspricht ein Potentialsprung im Stromkreise einem Wärmeverbrauch und nicht einem Wärmegewinn.

Die Vorgänge am positiven Pole eines constanten Elementes sind also nicht umkehrbar.

Fliesst der Strom nicht durch ein constantes Element, sondern durch eine Zersetzungszelle mit der Polarisation p, so gelten die

vorstehenden Gründe gegen die Umkehrbarkeit dieses Vorganges ebenfalls, und ausserdem kommen noch andere auf dem Verhalten der Polarisation beruhende hinzu. Von diesen seien nur angeführt die Diffusion, von der man nicht absehen darf, weil sie durch die Natur der Gase und Flüssigkeiten bedingt ist, und ferner das allmähliche Ansteigen der Polarisation, das ebenfalls nothwendig ist [1]).

Wie durch letzteres die Umkehrung der elektrolytischen Vorgänge verhindert wird, zeigt folgende Betrachtung.

Sollte ein polarisirender Strom umkehrbar sein, so müsste er jedenfalls unendlich klein sein. Da aber die Polarisation stetig von Null an zunimmt, wird er während einer gewissen Zeit t nach seinem Schlusse endlich bleiben. Ist i die mittlere Stärke des Stromes in ihr, und r sein Widerstand, so ist die als Wärme erhaltene Stromarbeit in der Zeit t gleich Ai^2rt. Die in dieser Zeit von den Ionen aufgenommene Energie ist gleich qit, wo q die Energie bezeichnet, welche die Ionen aufnehmen, wenn die Stromeinheit während der Zeiteinheit durch einen gegebenen Elektrolyten fliesst. Die Vorgänge während der Zeit t sind also nicht umkehrbar, weil die nicht umkehrbare Stromwärme von derselben Grössenordnung ist, wie die Energie, welche die Ionen aufnehmen.

Während einer gegen t grossen Zeit T sei ferner die elektromotorische Kraft $e - p$ infolge des Ansteigens der Polarisation unendlich klein. Die Stromenergie $Trdi^2$ ist dann von der zweiten Ordnung, dagegen die Energie $qTdi$, welche die Zonen aufnehmen, von der ersten Ordnung unendlich klein. Wenn also nur das Verhältnis dieser beiden Grössen zu einander zu berücksichtigen wäre, so wären die in der Zeit T stattfindenden Vorgänge umkehrbar.

Wird nun aber die polarisirte Zelle für sich geschlossen, bis die Energie $q(it + Tdi)$ zurückerhalten ist, so lässt sich offenbar der Theil qit, der von dem jedenfalls nicht umkehrbaren Vorgange herrührt, nicht von dem Theile $qTdi$ trennen, und da Tdi gegen it unendlich klein oder höchstens endlich ist, wenn man nämlich T gegen t unendlich gross annimmt, so ist der gesammte Strom der Polarisation nicht als Umkehrung des polarisirenden Stromes aufzufassen.

Nun ist keine Elektrolyse unbedingt frei von Polarisation, und wenn auch letztere in einem annähernd constanten Elemente bei grösserer Stromstärke zu vernachlässigen ist, so wäre dies doch nicht berechtigt, wenn ein Strom mit unendlich kleiner elektromotorischer Kraft durch das Element fliesst. Die vorstehende Erörterung ist also auch auf die annähernd constanten Elemente anzuwenden. Werden

1) M. vergl. in dem S. 476 angeführten Aufsatze des Verf. S. 10 Z. 10 v. o.

die durch sie fliessenden Ströme immer mehr verringert, so nähern sie sich infolge der Polarisation nicht der Grenze vollständiger Umkehrbarkeit, sondern entfernen sich vielmehr immer weiter von ihr; während für die Geltung des II. Hauptsatzes das entgegengesetzte Verhalten nothwendig wäre.

Aus der Natur der chemischen Vorgänge, aus den Potentialverhältnissen und aus der Polarisation ergibt sich also, dass elektrolytische Vorgänge nicht umzukehren sind. Wenn daher die Energie, welche die Ionen im Strome (A) aufnehmen, im Strome (B) vollständig wiedergewonnen wird, so ist dies nach dem unter I Entwickelten dadurch zu erklären, dass moleculare Energieänderungen stets vom Wege unabhängig sind.

III. Es ist nun noch einiges über die analytischen Ausdrücke und Versuche zu bemerken, durch welche Herr von Helmholtz die Anwendbarkeit des II. Hauptsatzes auf moleculare Vorgänge zu beweisen sucht [1]).

Nachdem Herr von Helmholtz, wie schon erwähnt, die Vorgänge, welche in einem constanten Elemente bei verschwindend kleiner Stromstärke stattfinden, für vollkommen umkehrbar erklärt hat, stellt derselbe für einen derartigen Vorgang die folgenden Gleichungen auf [2]). Die Energie U des Elementes wird als Function der absoluten Temperatur ϑ und der Elektricitätsmenge ε betrachtet, welche in einer bestimmten als positiv angenommenen Richtung durch dasselbe gegangen ist. Fliesst dann weiter die Elektricitätsmenge $d\varepsilon$ durch das Element, und ist p dessen Potentialdifferenz, dQ eine Wärmemenge, so soll

$$\frac{dQ}{A} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} d\vartheta + \left[\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + p\right] d\varepsilon \qquad (\alpha$$

sein. Ferner soll auch, wenn S die Entropie bedeutet, die ebenfalls als Function von ϑ und ε betrachtet wird,

$$dS = \frac{dQ}{A\vartheta} = \frac{1}{\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{1}{\vartheta}\left[\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + p\right] d\varepsilon \qquad (\beta$$

sein, wobei

$$\frac{\partial S}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \vartheta}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{\vartheta}\left[\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + p\right] d\varepsilon$$

1) Auch von Herrn Gibbs ist (Silliman 16, 1878, S. 457) eine Formel für elektrolytische Vorgänge aus dem II. Hauptsatze abgeleitet. Da ihre Prüfung jedoch in keiner Weise versucht wird, kann sie nicht als Einwand gegen die Ergebnisse des I. und II. Abschnittes dieses Aufsatzes angesehen werden.

2) Die Thermodynamik chem. Vorg. Ber. d. Berl. Akad. 1882 Febr. S. 25.

ist. Wird die erste der letzten beiden Gleichungen nach ε, die zweite nach ϑ differenzirt, so folgt durch Gleichsetzung der beiden so erhaltenen Differenzialquotienten

$$\vartheta \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + p. \qquad (\gamma$$

Die Gleichung (α) kann also nun geschrieben werden:

$$\frac{d\,Q}{A} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} d\vartheta + \vartheta \frac{\partial p}{\partial \vartheta} d\varepsilon. \qquad (\delta$$

Wird in (δ) $d\vartheta = 0$ gesetzt, so ergibt sich, dass

$$\frac{d\,Q}{A} = \vartheta \frac{d\,p}{d\vartheta} d\varepsilon \qquad (\varepsilon$$

die secundäre Wärme ist.

In der Gleichung (α) sind ε und ϑ von einander unabhängig angenommen; diese Annahme ist jedoch nicht streng richtig. Denn wird von dem Falle abgesehen, dass p von ϑ unabhängig ist, wofür sich übrigens kein Beispiel anführen lässt, so hängt ε ebenso wie p von ϑ ab. Nimmt man die Gleichung (α) aber als eine empirische an, so besteht sie sowohl für starke wie für schwache Ströme, wenn vorausgesetzt wird, dass die Ionen zuerst in Lösung auftreten, und demnach die bei ihrem Freiwerden geleistete äussere Arbeit als secundär unberücksichtigt bleibt. Denn bezeichnet alsdann U die Energie in den Uebergangsschichten an den Elektroden des Elementes, für welche die Stromwärme zu vernachlässigen ist, so haben der Ausdruck $p\,d\varepsilon$ und ihre übrigen Glieder für starke wie für schwache Ströme dieselbe Form. Ferner ist über die vorliegende Gleichung zu bemerken, dass sie nach dem Schema der allgemeinen Gleichung der mechanischen Wärmetheorie gebildet ist, dass aber die Uebereinstimmung beider nur äusserlich ist. Denn werden in der letzteren der specifische Druck $\mathfrak{p}$ und das specifische Volumen v als unabhängige Veränderliche gewählt, so hat sie bekanntlich die Form:

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{A} = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \mathfrak{p}} d\mathfrak{p} + \left[\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial v} + \mathfrak{p}\right] d\,v.$$

Hierin ist $\mathfrak{p}\,d\,v$ der Ausdruck der äusseren Arbeit, wenn angenommen werden kann, dass der äussere Druck auf den sich ändernden Körper gleich dessen Gegendruck ist, wenn also die äussere Arbeit umkehrbar ist. Wird ϑ für $d\mathfrak{Q}$ als integrirender Divisor bestimmt, so gilt folglich auch die Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{A\,\vartheta} = d\mathfrak{S}$$

nur dann, wenn der Ausdruck $\mathfrak{p}\,d\,v$ gilt, also die äussere Arbeit umkehrbar ist.

Anders dagegen verhält sich die Gleichung (α). Wie erwähnt besteht diese, wenn überhaupt, ebensowohl für starke wie für schwache Ströme. Wenn man also auch die letzteren als umkehrbar von den ersteren unterscheiden wollte, so wird sie doch dadurch gar nicht beeinflusst. Wird daher ϑ für sie als integrirender Divisor bestimmt, so gelten auch die Gleichung

$$\frac{d\,Q}{A\vartheta} = d\,S$$

und der Ausdruck der secundären Wärme, der rein analytisch daraus abgeleitet ist, unabhängig von der Umkehrbarkeit des Vorganges. Also ist für die Entwicklung dieser Gleichungen der II. Hauptsatz willkürlich vorausgesetzt.

Nach Versuchen von Herrn H. Jahn[1]) sind für drei galvanische Combinationen die beobachteten und die nach Gleichung (ε) berechneten Werthe der secundären Wärme in guter Uebereinstimmung, während für fünf andere Combinationen die Differenzen zwischen beiden 10 bis 21 % des beobachteten Werthes betragen. Dabei ist noch zu berücksichtigen, dass unter den ersteren drei Combinationen das D enthalten ist dessen secundäre Wärme den Werth — 0,416 Cal. hat, der nach Herrn Jahn selbst „wohl zu klein ist, um ihn mit Sicherheit zu verbürgen“.

Bei diesen Versuchen wird die Stromenergie in Rechnung gezogen, also gegen die andern Grössen endlich angenommen, während nach der Theorie des Herrn von Helmholtz die Gleichung (β) und die daraus abgeleiteten nur gelten, wenn erstere zu vernachlässigen ist. Die Bedingungen der Versuche widersprechen daher der theoretischen Voraussetzung. Zur Prüfung der letzteren musste untersucht werden, wie sich die beobachteten und die nach (ε) berechneten Werthe der secundären Wärme bei sehr verschiedenen Stromstärken zu einander verhalten.

Dagegen entsprechen die experimentellen Bedingungen der Gleichung (α), wenn sie, wie oben erwähnt, als empirische Gleichung für stärkere Ströme angenommen wird, und U die Energie in den Uebergangsschichten bezeichnet.

Jedenfalls können die vorliegenden Versuche nach dem oben Erörterten nur beweisen, dass der in Gleichung (ε) gegebene Ausdruck der secundären Wärme als empirische Formel brauchbar ist, nicht aber, dass der II. Hauptsatz für das Gebiet der Elektrolyse theoretische Geltung hat.

1) Wied. Ann. 28 S. 21 ff., S. 491 ff.

In einem folgenden Aufsatze wird Gelegenheit gegeben sein, auf die secundäre Wärme zurückzukommen.

Ferner verallgemeinert Herr von Helmholtz [1]) die Gleichung (α), so dass dieselbe folgende Form erhält:

$$\frac{dQ}{A} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} d\vartheta + \sum_{\alpha} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial p_\alpha} + P_\alpha \right) \right\} dp_\alpha, \tag{ζ}$$

worin p_α eine Anzahl unabhängiger Parameter bezeichnet. Von dem durch diese Gleichung dargestellten Vorgange wird wiederum vorausgesetzt, dass er umkehrbar ist, und

$$\frac{1}{\vartheta} \cdot dQ = dS \tag{η}$$

gesetzt, wo dS das vollständige Differential einer eindeutigen Function von ϑ und den Parametern p_α ist.

Aus (Gl. ζ und η) ergibt sich:

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial S}{\partial p_\alpha} = \frac{1}{\vartheta} \left[\frac{\partial U}{\partial p_\alpha} + P_\alpha \right].$$

Daraus folgt:

$$P_\alpha = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left[\frac{1}{A} \vartheta S - U \right]. \tag{ϑ}$$

Wird

$$\mathfrak{F} = U - \frac{1}{A} \cdot \vartheta S \tag{ι}$$

gesetzt, so ist $\mathfrak{F}$ wie U und S eine eindeutige Function der Grössen p_α und ϑ, die bis auf eine additive Constante durch (ι) bestimmt ist. Dieselbe wird die freie Energie genannt.

Chemische Aenderungen, die von selbst stattfinden, sollen nur in solcher Richtung vor sich gehen, dass die freie Energie abnimmt.

Die Gleichungen (ϑ) gehen dadurch in die Form über:

$$P_\alpha = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p_\alpha} \tag{$\varkappa$}$$

d. h. bei allen isothermen Vorgängen ist $\mathfrak{F}$ die potentielle Energie.

Die weiteren thermodynamischen Formeln, die mittels der Function $\mathfrak{F}$ erhalten werden, brauchen hier nicht angeführt zu werden.

Die vorstehenden analytischen Entwicklungen wurden, um sie zu prüfen, zur Berechnung der elektromotorischen Kraft von Concentrationsströmen verwendet [2]). Letztere wurden durch Entgegenschaltung von

1) a. a. O. S. 14.

2) Helmholtz, Zur Thermodynamik chem. Vorgänge. Zweiter Beitrag. Ber. d. Berl. Akad. 1882, Juli, S. 489 ff.

zwei Elementen erhalten, die aus Zink, Chlorzink-Lösung, Kalomelpulver, Quecksilber bestanden, und deren Chlorzink-Lösungen verschieden concentrirt waren.

Ist nun in einer Salzlösung w die Wasser-, s die Salzmenge, und wird $\frac{w}{s}$ durch h und durch $\mathfrak{F}_h$ eine Function von h bezeichnet, so wird die freie Energie der Salzlösung

$$\mathfrak{F} = (w + s)\,\mathfrak{F}_h = s\,(1 + h)\,\mathfrak{F}_h \tag*{(λ}$$

gesetzt.

Aendert sich w durch Verdampfen oder Niederschlag von Wasser, während s constant bleibt, so wird

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial w} = s\,\frac{\partial}{\partial h}\left[(1 + h)\,\mathfrak{F}_h\right]\frac{\partial h}{\partial w}$$

oder

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial h}\left[(1 + h)\,\mathfrak{F}_h\right]. \tag*{(μ}$$

„Diese Grösse, multiplicirt mit dw, gibt die Arbeit an, welche für jede reversible Ueberführung der Wassermenge dw bei constant gehaltener Temperatur aus reinem Wasser an die Lösung zu verwenden ist."

Hiergegen ist Folgendes einzuwenden. Ist ϑ veränderlich, so ist die Gleichung (ζ) ein unvollständiges Differential, und die Gleichung (η) gilt dann nach dem II. Hauptsatze nur, wenn die Arbeit $\Sigma P_\alpha\,dp_\alpha$ umkehrbar ist. Ist dagegen ϑ = Const., so werden die Gleichung (ζ) und die Arbeit $\Sigma P_\alpha\,dp_\alpha$ vollständige Differentiale; die Bedingung der Umkehrbarkeit fällt demnach fort und die Entwicklung der Gleichungen (η bis $\varkappa$) wird vom II. Hauptsatze ganz unabhängig.

Für ϑ = Const. gibt also der Ausdruck $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial w}\,dw$ für jede beliebige Ueberführung der Wassermenge dw die zu leistende Arbeit an, wenn letztere als Differential einer Function $\mathfrak{F}$ der Grössen w und s darstellbar ist.

Weiter wird mit p der Druck des Dampfes, mit v das Volumen seiner Masseneinheit bezeichnet, indem beide Grössen als Functionen von h betrachtet werden, und

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial w} = -\int\limits_{h=\infty}^{h=h} p\,dv \tag*{(ν}$$

gesetzt. Der Ausdruck $p\,d\,v$ für die Arbeit, welche bei der Volumenänderung eines Gases geleistet wird, ist nun bekanntlich unter der Voraussetzung entwickelt, dass der Vorgang umkehrbar ist. Dieser Ausdruck beruht aber nicht auf dem II. Hauptsatze, sondern bei der Entwicklung des letzteren wird er vielmehr vorausgesetzt. Die rechte Seite dieser Gleichung enthält also einen besonderen Fall des allgemeineren Ausdruckes auf der linken Seite, und sie bedingt ebenfalls nicht den II. Hauptsatz.

Das vorstehende Integral wird dann entsprechend den verschiedenen Vorgängen, welche es darstellt, in drei Theile zerlegt, und nach analytischen Umformungen folgt

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial w} = -\int_h^\infty v \frac{\partial p}{\partial h}\, dh, \qquad (\xi$$

und durch Differenziren nach h

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left[(1+h)\,\mathfrak{F}_h\right] = v_h \frac{\partial p}{\partial h}. \qquad (o$$

Durch Differenziren der Gleichung (λ) nach s folgt ferner

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial s} = (1+h)\,\mathfrak{F}_h - h\frac{\partial}{\partial h}\left[(1+h)\,\mathfrak{F}_h\right]. \qquad (\pi$$

Bezeichnet nun i die Stromstärke, m die Salzmenge, welche die Stromeinheit in der Zeiteinheit auflöst, t die Zeit, E eine elektromotorische Kraft, so wird

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial s}\, i m t = i m t\left\{(1+h)\,\mathfrak{F}_h - h\frac{\partial}{\partial h}\left[(1+h)\,\mathfrak{F}_h\right]\right\} = -\,E i t \qquad (\varrho$$

gesetzt. Diese Gleichung enthält offenbar eine Hypothese, da es nicht nothwendig ist, dass $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial s}\, m = -\,E$ ist.

Bei Berücksichtigung der früheren Gleichungen folgt dann:

$$\frac{\partial E}{\partial h} = m \cdot h \cdot v \frac{\partial p}{\partial h}. \qquad (\sigma$$

Sind ferner zwei Zellen der Art vorhanden, dass in der einen Ausscheidung des Salzes mit dem Verdünnungswerthe h_0, in der andern Auflösung mit dem Werthe h_1 stattfindet, so wird

$$E_1 - E_0 = m\int_0^1 h\, v \frac{\partial p}{\partial h}\, d\,h \qquad (\tau$$

Diese Gleichung ist wie die vorstehende ausführliche Betrachtung ihrer Ableitung zeigt, jedenfalls ganz unabhängig vom II. Hauptsatze.

Genauen Messungen der vorliegenden Ströme stehen Hindernisse entgegen, die Herr von Helmholtz angibt; aber auch die vollständige Uebereinstimmung der nach der Theorie berechneten und der in Concentrationsströmen beobachteten elektromotorischen Kräfte könnte nach der obigen Erörterung über die Ableitung der Gleichung (τ) nicht zum Beweise dafür dienen, dass der II. Hauptsatz auf das vorliegende Gebiet anzuwenden ist.

Die „freie Energie" verwendet Herr von Helmholtz weiter auch zur Berechnung der Arbeit, welche bei der Verbrennung von Knallgas und bei der Elektrolyse der verdünnten Schwefelsäure geleistet wird [1]). Bezeichnet $\mathfrak{F}_g$ die freie Energie von 1 g Knallgas, $\mathfrak{F}_w$ die von 1 g Wasser, beide bei derselben Temperatur bestimmt, so soll die bei der Verbrennung geleistete Arbeit gleich $\mathfrak{F}_g - \mathfrak{F}_w$ sein, und es wird dafür folgende Gleichung angesetzt:

$$\mathfrak{F}_g - \mathfrak{F}_w = C + \frac{1}{A} \cdot k\vartheta \log\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right) - \vartheta \cdot \left[\frac{R_h \cdot 2\alpha_h}{2\alpha_h + \alpha_0} \log(v_h) + R_0 \frac{\alpha_0}{2\alpha_h + \alpha_0} \log(v_0) + H\right] \quad (v$$

Hierin sind:

α_h und α_0 die Atomgewichte des Wasserstoffs bezw. Sauerstoffs, γ_h und γ_0 ihre specifischen Wärmen bei constantem Volumen,

$$k = 1 - \frac{2\alpha_h \cdot \gamma_h + \alpha_0 \gamma_0}{2\alpha_h + \alpha_0},$$

v das Volumen von je 1 g Gas unter dem Drucke p und bei der Temperatur ϑ,

$$R = \frac{p \cdot v}{\vartheta},$$

C und H Constanten, ϑ_0 eine Normaltemperatur.

Die Gleichung (v) zeigt an, „dass die durch Vereinigung der Gase zu leistende Arbeit allerdings und in sehr wesentlicher Weise von ihrer Dichtigkeit von ihrer Vereinigung abhängt".

Bei der elektrolytischen Arbeit wird der primäre Theil, der zu leisten ist, um die Ionen in Lösung zu erhalten, von dem secundären

1) Von Helmholtz, Zur Thermodynamik chem. Vorg. Dritter Beitr. Ber. d. Berl. Akad. 1883, Mai, S. 647 ff.

unterschieden, der zu ihrem Freiwerden verwendet wird. Für die erstere auf 1 g bezogene Arbeit wird die Gleichung abgeleitet:

$$\mathfrak{F}_g - \mathfrak{F}_w = C + \frac{1}{A} \cdot k\vartheta \log\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right) + \qquad (\varphi$$

$$+ \vartheta \left\{ R_h \frac{2\alpha_h}{2\alpha_h + \alpha_0} \left[1 - \log(v_h)\right] + R_0 \frac{\alpha_0}{2\alpha_h + \alpha_0} \left[1 - \log(v_0) - H\right] \right\}$$

worin v_h und v_0 die specifischen Volumina bedeuten, „welche über der Flüssigkeit stehendes Gas haben müsste, um denselben Grad der Sättigung hervorzubringen, den das in den Grenzschichten an der Elektrode gelöste Gas hat". Wenn noch sehr wenig Gas gelöst, die betreffenden v also sehr gross sind, kann $\mathfrak{F}_g - \mathfrak{F}_w$ gleich Null oder selbst negativ werden. „Stabiles Gleichgewicht der chemischen Kräfte ist hiernach im Wasser überhaupt nur bei einem gewissen minimalen Grade der Dissociation seiner Elemente möglich, und andrerseits wird um so geringerer Arbeitsaufwand durch eine dazu angewendete elektromotorische Kraft nöthig sein, um neue Zersetzungen hervorzubringen, je weniger von den betreffenden Gasen im Wasser schon aufgelöst ist."

Gegen die vorstehenden Entwicklungen ist nun Folgendes einzuwenden. Der Ausdruck der „freien Energie" wurde für umkehrbare, dem II. Hauptsatze unterliegende Vorgänge abgeleitet; für chemische rein moleculare Vorgänge gilt letzterer aber nicht, und wenn man auch hiervon absehen wollte, so kommt doch jedenfalls der Verbrennung des Knallgases auch nicht ein Schein vom Umkehrbarkeit zu.

Dass ferner, wie sich aus Gleichung (v) ergeben würde, die durch die Vereinigung der Gase zu leistende Arbeit von ihrer Dichtigkeit abhängt, während dies von der Verbindungswärme bei Ausschluss äusserer Arbeit nicht gilt, ist ein Satz, der durch keine Erfahrung begründet wird.

Was die Arbeit bei der elektrolytischen Wasserzersetzung betrifft, so ist erstens wiederum hervorzuheben, dass diese, da der Vorgang mit starker Polarisation verbunden, jedenfalls nicht umkehrbar ist, und dass sie folglich nicht durch die freie Energie gemessen werden kann.

Zweitens würde sich aus der Gleichung (φ) gar nicht allgemein ergeben, dass die chemischen Kräfte im Wasser in labilem Gleichgewicht sind, wenn von ihm keine Spur zersetzt ist. Dies zeigt sich deutlich in folgender Weise. Herr von Helmholtz stellt für die Gasmenge m, welche in dem Wasservolumen V unter dem Drucke p zur Sättigung gelöst ist, die Gleichung auf

$$\frac{bp}{\vartheta} = \frac{Rm}{V},$$

worin b den Bunsen'schen Absorptionscoefficienten bezeichnet [1]). Daraus folgt, wenn man berücksichtigt, dass

$$R = \frac{pv}{\vartheta}$$

ist:

$$v = \frac{bV}{m}.$$

Wird dieser Werth in Gleichung (φ) eingesetzt, so zeigt sich, dass $\mathfrak{F}_g - \mathfrak{F}_w$ für sehr grosse Werthe von $\frac{V}{m}$ unendlich klein oder negativ wird.

Aus der Gleichung (φ) würde also nur folgen, dass ein sehr kleiner Theil einer Wassermenge sich in labilem Gleichgewichtszustande befindet.

Diese Folgerung würde mit einer bekannten Hypothese über die Natur der Elektrolyte übereinstimmen [2]), die jedoch, wie in einer früheren Veröffentlichung dargelegt wurde [3]) nicht ausreicht, die Wasserzersetzung durch 1 D zu erklären. Daselbst [4]) wurde auch entwickelt, wie aus der Natur der bei der Elektrolyse wirkenden Kräfte folgt, dass die Zersetzung eines jeden Elektrolyten nur von der Stromstärke abhängt.

Aus Gleichung (φ) leitet Herr von Helmholtz eine Formel für die elektromotorische Kraft ab, die zur Wasserzersetzung unter verschiedenem Drucke nothwendig sein soll. Zu ihrer Prüfung benutzte derselbe zwei Voltameter [5]), von denen jedes an das obere Ende einer U-förmigen Barometerröhre angeschmolzen war, die mit Quecksilber gefüllt wurde. In dem einen (a) war die Luft stark verdünnt, in dem andern (b) war ungefähr Atmosphärendruck. Das Voltameter (a) war so geblasen, dass die elektrolytisch entwickelten Gase sich in seiner Wölbung zu einer Gasblase vereinigten. Ihr Durchmesser wurde mit einem von oben angelegten Millimetermaassstabe gemessen, und seine Zunahme sollte anzeigen, dass Elektrolyse stattfindet. In dem Voltameter (b) sollte diese dadurch erkannt werden, dass der Stand der beiden Quecksilberkuppen in der U-förmigen Barometerröhre an jedem

1) S. 657 Z. 6 v. u.

2) Man vergl. Wied. Elektr. Bd. 2 S. 917.

3) Wiener Sitzber. Bd. 98 IIa 1889, Juni, S. 864.

4) a. a. O. S. 853 ff.

5) von Helmholtz, Weitere Untersuchungen d. Elektrolyse d. Wassers betr. Ber. d. Berl. Akad. 1887, Juli, S. 749 ff.

Tage abgelesen, und daraus der Gasdruck im Voltameter mit Correction wegen des Dampfdruckes berechnet wurde.

So wurde gefunden, dass bei einem Drucke von 10 mm Wasser im Voltameter (*a*) 1,64 Volts und bei einem corrigirten Drucke von 742 mm Quecksilber im Voltameter (*b*) 1,82 Volts nothwendig waren, um eine wahrnehmbare Vermehrung der vorhandenen Gasmengen zu bewirken. Die letztere Zahl wurde jedoch verworfen und dafür 1,78 bis 1,75 gewählt. Alsdann standen Theorie und Beobachtung in guter Uebereinstimmung: denn die Differenz 1,78—1,64 beträgt 0,14, während die nach der Theorie berechnete Differenz 0,1305 war.

Dass im Voltameter (*a*), worin die Gasvolumina fast 1000 mal grösser waren [1]), eine weit geringere Gasentwicklung wahrnehmbar sein musste als im Voltameter (*b*), ist ohne weiteres klar; aber die Messungen bei den vorliegenden Versuchen hängen von vielen Fehlerquellen ab. Erstens war im Voltameter (*b*) der elektrolytisch entwickelte Sauerstoff mit feuchtem Quecksilber in Berührung: es war also Gelegenheit zu Oxydation gegeben; namentlich, wenn das Quecksilber Spuren fremder Metalle enthielt, die aus grösseren Quecksilbermengen auch nicht durch Destillation zu entfernen sein dürften [2]).

Wurde aber z. B. nur 1 Milligramm Blei zu PbO oxydirt, so wurde dadurch mehr als $\frac{1}{20}$ ccm Sauerstoff von 0° und 760 mm Druck verbraucht, wodurch die vermeintliche untere Grenze der zur Elektrolyse nothwendigen elektromotorischen Kraft im Voltameter (*b*) zu hoch bestimmt werden musste. Zweitens wurde bei der Messung des Gasdruckes in demselben Voltameter eine Correction wegen der Dampfspannung angebracht. Wurde nun letztere für Wasser berechnet, so wurde sie zu hoch angesetzt, weil der Elektrolyt aus Wasser bestand, das 1 % Schwefelsäure enthielt. Dadurch entstand wiederum ein Fehler in derselben Richtung wie der vorige.

Drittens war die Temperatur im Beobachtungsraume nicht constant [3]), wodurch die Bestimmungen der Dampfspannung, des Gasdruckes und des Durchmessers der Gasblase sehr unsicher werden mussten.

Weit grösser aber als diese Fehlerquellen, neben denen sich noch andere anführen liessen, ist die folgende.

Unter den Bedingungen der Versuche nahm mit der elektromotorischen Kraft auch die Polarisation zu.

Wurde also erstere z. B. um 0,01 Volt vermehrt, so entstand dadurch nur eine verschwindend kleine Zunahme des Stromes, und

1) a. a. O. S. 756 Z. 12 v. o.

2) Man vergl. Bunsen, Gasometr. Methoden S. 163 ff.

3) a. a. O. S. 754 Z. 1 v. u.



demnach auch nur eine verschwindend geringe Gasentwicklung, die wohl im Voltameter (*a*) aber nicht in (*b*) wahrnehmbar sein konnte.

Ein messbarer Ueberschuss der elektromotorischen Kraft über die Polarisation blieb erst dann, wenn letztere eine gewisse Grösse erreicht hatte. Alsdann wurde die Gasentwicklung beträchtlicher und konnte auch unter dem stärkeren Drucke im Voltameter (*b*) beobachtet werden.

Die Untersuchungen über die Elektrolyse des Wassers geben demnach ebenso wie die vorher erörterten keinen Anlass, den II. Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie auf moleculare Vorgänge zu übertragen.

Ueber das Dalton'sche Gesetz[1]).

Von

B. Galitzine.

Das Dalton'sche Gesetz sagt bekanntlich aus: erstens, der Gesammtdruck eines Gemisches zweier Gase setzt sich einfach aus den Partialdrucken jedes einzelnen Bestandtheiles zusammen; zweitens, die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gase ist derjenigen im Vacuum gleich.

Dieses Gesetz ist von verschiedenen Experimentatoren geprüft worden, unter anderen von Dalton[2]), Henry[3]), Gay-Lussac[4]), Magnus[5]), Regnault[6]), Andrews[7]), Guglielmo und Musina[8]), F. Braun[9]). Doch gehen ihre Ansichten sehr aus einander, insbesondere hinsichtlich der Spannkraft eines gesättigten Dampfes in einem Gas. Die einen, ausser den ersten Beobachtern auch Regnault, erkannten das Dalton'sche Gesetz als ein theoretisches an; die grossen Unterschiede, welche Regnault zwischen der Spannkraft des Aetherdampfes in Luft und im Vacuum fand, führte er auf eine störende Einwirkung der Gefässwände zurück. Andere schrieben dem Dalton'schen Gesetz bloss eine beschränkte Giltigkeit zu.

So zum Beispiel erhoben sich bei Wüllner[10]) nach besonderen Versuchen Zweifel an der Richtigkeit der Regnault'schen Erklärung,

---

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Göttinger Ber. (1890).

2) Manch. philol. soc. 5, S. 535, 1802; Gilbert's Ann. 12 S. 385, 1803 und 15 S. 21.

3) Nicholson's Journ. 8 S. 297. 1804; Gilb. Ann. 21 S. 393. 1805.

4) Ann. de Chimie. 95 S. 314. 1815. Auch Biot. Traité de Physique 1 S. 298.

5) Pogg. Ann. Bd. 38, S. 488. 1836.

6) Mém. de l'Ac. des Sc. 26, pp. 256, 679 und folg.

7) Phil. Mag. (5), 1, p. 84. 1876; Phil. Trans. 178 A. p. 45. 1887.

8) Riv. Sc.-Ind. di Firenze. Anno XIX. N. 16—17, p. 185. 1887. Auch Beibl. XII S. 464. 1888.

9) Wied. Ann. Bd. 34 S. 943. 1888.

10) Wied. Ann. Bd. 11 S. 545. 1880. Auch Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. III S. 704, IV. Aufl.

da er, wie später auch Guglielmo und Musina, nachweisen zu können glaubte, dass die Adhäsion des Dampfes an den Gefässwänden auf die Spannkraft eines gesättigten Dampfes in einem Gas von minimalem Einflusse sei. In dem Verhalten reiner Dämpfe fand er dagegen ganz sonderbare Anomalien, welche auf einen Verflüssigungsverzug hindeuten und zu der Vermuthung führen, dass die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit nicht, wie es bisher angenommen wurde, eine genau bestimmte Grösse ist, sondern zwischen gewissen Grenzen schwanken kann. Dieses anomale Verhalten gesättigter Dämpfe wurde auch von anderen beobachtet und besprochen[1], und noch in neuester Zeit hat Blümcke[2]) interessante Mittheilungen darüber gemacht. Bei Gemischen sollen diese Anomalien in viel stärkerem Maass und viel leichter hervortreten.

Auch bei Guglielmo und Musina, und ebenso bei F. Braun stellten sich Abweichungen vom Dalton'schen Gesetz heraus, doch waren dieselben immer sehr gering. Andrews dagegen constatirte zuweilen ganz beträchtliche Abweichungen. So fand er z. B., dass ein Gemisch von 3 Vol. CO_2 mit 4 Vol. N_2 unter keinem Drucke flüssig gemacht werden könne, so lange nicht die Temperatur des Gemisches auf —20° C. gebracht wird. Bei höherer Temperatur kann also eine Verflüssigung der im Gemische vorhandenen CO_2 überhaupt nicht stattfinden, obgleich die kritische Temperatur der CO_2 erst bei 31° C. liegt.

Ein Zusatz eines indifferenten Gases hat also eine Erniedrigung der kritischen Temperatur der betreffenden Flüssigkeit zur Folge. Diese Erscheinung, welche mit dem Verhalten von Gemischen zum Dalton'schen Gesetz in unmittelbarem Zusammenhang steht, ist auch von anderen Experimentatoren, wie Cailletet[3]), Hannay[4]), Ansdell[5]), Strauss[6]), Pawlewski[7]) und anderen beobachtet worden. Pawlewski fand bei Versuchen mit Flüssigkeitsgemischen, dass wenn man α Gewichtstheilchen einer Flüssigkeit mit β Gewichtstheilchen einer anderen mischt, die kritische Temperatur T_m des Gemisches sich nach der folgenden einfachen Formel berechnen lässt:

$$T_m = \frac{\alpha T_1 + \beta T_2}{\alpha + \beta},$$

1) Man sehe z. B. Van der Waals, Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes, S. 90. Leipzig 1881.

2) Wied. Ann. Bd. 36 S. 911. 1889.

3) C. R. 90, p. 210. 1880; Journ. de Ph. 9, p. 192. 1880.

4) Proc. Roy. Soc. 31, p. 520. 1881.

5) Proc. Roy. Soc. 34, p. 113. 1882.

6) J. d. russ. phys.-chem. Gesellschaft, Bd. 12 S. 207. 1880; Bd. 14 S. 510. 1882. Auch Beibl. VI S. 282. 1882 und VII S. 676. 1883.

7) Chem. Ber., 15. Jahrg. S. 460. 1882.

worin T_1 und T_2 die kritischen Temperaturen der Bestandtheile bedeuten. Die flüchtigere Flüssigkeit kann man offenbar bei der Temperatur T_m als ein Gas (Definition Andrews') betrachten und somit von einer Erniedrigung der kritischen Temperatur der anderen Flüssigkeit sprechen. Die Richtigkeit des Pawlewski'schen Gesetzes wird jedoch nicht allgemein anerkannt.

Da sich also verschiedene Ansichten bezüglich des Dalton'schen Gesetzes, sowie auch der kritischen Temperatur von Gemischen gegenüberstehen, habe auch ich versucht, durch einige experimentelle und theoretische Untersuchungen diese Frage ihrer Lösung näher zu bringen.

Der erste Theil der experimentellen Untersuchungen ist im wesentlichen nur eine Erweiterung der Versuche Regnault's auf höhere Temperaturen (bis zu 100° C.). So wurde die Spannkraft in Luft der gesättigten Dämpfe von Wasser, Aethyl-Aether und Chloräthyl bestimmt. Die Versuche mit Wasser wurden ausserdem mit Gefässen von verschiedener Form ausgeführt, wodurch man sich zugleich ein Urtheil über den Einfluss der Gefässwände auf die Spannkraft des gesättigten Dampfes in Luft bilden konnte.

In dem zweiten Theile dieser experimentellen Untersuchungen beschäftigte ich mich mit der Bestimmung der kritischen Temperatur verschiedener Mischungen von Aceton und Schwefelkohlenstoff mit Aethyl-Aether, ferner mit der Untersuchung des Einflusses eines kleinen Zusatzes von Luft auf die Erniedrigung der kritischen Temperatur einer Flüssigkeit.

Durch Zusammenstellung der früheren, theilweise von mir verarbeiteten Untersuchungen, mit meinen eigenen, bin ich zu Resultaten gelangt, welche ich hier in aller Kürze vorläufig mittheile.

Das Dalton'sche Gesetz für Gasgemische ist kein allgemein giltiges Naturgesetz.

Die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gase ist im allgemeinen mit derjenigen im Vacuum nicht identisch, folglich ist auch für Dämpfe das Dalton'sche Gesetz nicht genau richtig und nicht einmal ein theoretisches, wie es von Regnault behauptet worden ist.

Die Summe der Partialdrucke zweier Gase ist im allgemeinen grösser als der gesammte von der Mischung ausgeübte Druck; der Unterschied, welchen ich mit Δ bezeichne, kann bei starken Drucken ganz beträchtlich sein[1]). Bei weiterer Verkleinerung des von der Mischung eingenommenen Volumens nimmt Δ ab. Bei einem gewissen verhältnismässig sehr kleinen Volumen wird $\Delta = 0$, also das Dalton'sche

1) Δ ist zugleich Maass für die Abweichung vom Dalton'schen Gesetz.

Gesetz in aller Strenge anwendbar; bei weiter fortschreitender Verminderung des Volumens wird Δ negativ, und zwar erreicht es bald sehr hohe negative Werthe. Dieses eigenthümliche Verhalten von Δ lässt sich sowohl auf die wechselseitige Cohäsion, als auch auf die räumliche Ausdehnung der Moleküle der beiden Gase zurückführen.

Auch bei kleineren Drucken ist ein Unterschied zwischen der Summe der Partialdrucke und dem Gesammtdrucke der Mischung vorhanden, obgleich hier die absoluten Werthe von Δ sehr klein sind. Das Vorzeichen von Δ hängt von der Natur der gemischten Gase wesentlich ab. Für Mischungen mit Wasserstoff, welcher bekanntlich eine sehr kleine Cohäsion besitzt, werden die Abweichungen Δ gewöhnlich negativ, also die Summe der Partialdrucke kleiner als der Gesammtdruck der Mischung.

Ueberhaupt sind bei höheren Temperaturen, insbesondere, wenn dieselben die kritische übersteigen, die Abweichungen vom Dalton-schen Gesetz auch bei starken Compressionen im allgemeinen immer sehr gering.

Die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gase ist im allgemeinen kleiner als die entsprechende Spannkraft im Vacuum; doch für sehr grosse Compressionen kann der Fall eintreten, dass der weniger flüchtige Körper sich bei dem normalen Drucke seines gesättigten Dampfes nicht mehr verflüssigt, da seine kritische Temperatur durch das Vorhandensein des anderen indifferenten Gases zuweilen ganz beträchtlich erniedrigt werden kann.

Die sehr grossen und unregelmässig verlaufenden Werthe von Δ, welche Regnault für die Spannkraft des Aetherdampfes in Luft gefunden hat, erklären sich in der That theilweise durch die störende Einwirkung der Gefässwände, respective die Verzögerung in der Diffusion des Aetherdampfes durch die Luft, was sich besonders bei sehr grossen Gefässen, mit welchen Regnault ja auch gearbeitet hat, geltend macht.

Die Behauptung Wüllner's, Guglielmo's und Musina's, dass der Einfluss der Adhäsion minimal sei, scheint mir unzulässig zu sein. Die Beobachtungen Regnault's, sowie meine eigenen mit verschiedenen Gefässen ausgeführten Versuche lassen eine störende Einwirkung der Wände bei grossen und langen Gefässen ganz gut erkennen. Für kleine Volumina allerdings, wo sich die Diffusion des Dampfes rasch vollziehen kann, scheint der Einfluss der Adhäsion sehr klein zu sein.

Obgleich die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gase kleiner ist als im Vacuum, ist doch dieser Unterschied bis zu 100° hinauf verhältnismässig immer noch gering und jedenfalls viel kleiner, als man nach Regnault's Beobachtungen erwarten könnte.

Hier mögen einige Zahlen folgen.

t bedeutet die Temperatur,

p den Druck der Luft,

$\frac{\Delta}{e} 100$ die procentische Abweichung vom Dalton'schen Gesetz (e ist die Spannkraft im Vacuum).

Für Aethyl-Aether

t	p	$\frac{\Delta}{e} 100$
63°,6 C.	628 mm	0,1 % [1]
78,0	647	0,6
99,8	684	1,4.

Für Chloräthyl

t	p		$\frac{\Delta}{e} 100$
63°,6 C.	316 mm	kleiner als	1,4 %
77,5	324		1,6
100,5	340		2,6.

Für Wasserdampf in Luft von etwa ½ Atmosphäre Druck ist bei 100° der wahrscheinlichste absolute Werth von Δ nicht grösser als 4—5 mm.

Man kann also bis zu 100° hinauf das Dalton'sche Gesetz für gesättigte Dämpfe bis auf 1 oder 2 % als richtig ansehen, vorausgesetzt, dass der Druck der Luft nicht zu gross ist.

Die Bestimmung der Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gase wird durch die Erscheinungen des Verflüssigungsverzuges, respective Siedeverzuges, welche sehr leicht auftreten können, ganz besonders erschwert. Ein Verflüssigungs- und Siedeverzug kann auch bei reinen Substanzen eintreten.

Die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gase ist eine ziemlich unbestimmte Grösse, die zwischen gewissen Grenzen schwankt.

Die Lehre von der Spannkraft gesättigter Dämpfe bedarf einer Erweiterung und Vervollständigung. Untersuchungen über die wirkliche Gestalt der Isotherme in der Nähe des Verflüssigungspunktes und eine Vergleichung derselben mit der theoretischen Isotherme sind sehr erwünscht[2]).

Wenn ein indifferentes Gas die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit verkleinert, so erniedrigt es auch die kritische Tem-

1) Der erste Werth ist wahrscheinlich zu klein.

2) Vergl. Margules Wien. Ber. Sitzung vom 6. Juni 1889.

peratur derselben. Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich auch aus thermodynamischen Betrachtungen.

Ein ganz geringer Zusatz von Luft kann eine Erniedrigung der kritischen Temperatur einer Flüssigkeit hervorrufen.

Das oben erwähnte Gesetz von Pawlewski ist nicht allgemein giltig, obgleich es zuweilen Resultate liefert, welche mit den Beobachtungen gut übereinstimmen.

Die Erscheinungen, welche das Eintreten des kritischen Zustandes charakterisiren, haben bei Gemischen denselben Verlauf wie bei homogenen Körpern. Man scheint also berechtigt zu sein, ein Gemisch im gewissen Sinne als ein Individuum zu betrachten[1]).

An diese Erfahrungsthatsachen knüpfe ich einige theoretische Betrachtungen an; obgleich dieselben eine Vervollständigung und Erweiterung, insbesondere was die Ausarbeitung der Zustandsgleichung der Gase betrifft, bedürfen werden, führen sie schon jetzt zu Resultaten, welche in ihren Hauptzügen mit den Erfahrungsthatsachen in Uebereinstimmung stehen.

Die Theorie geht aus von Betrachtungen über die Verzögerung, welche die Bewegungen der Moleküle eines Gases durch andere Gasmoleküle erleiden, und führt zu einem Ausdruck für die innere Cohäsion der Gase, welcher mit demjenigen in der bekannten ersten Clausius'schen Zustandsgleichung[2])

$$\left\{p + \frac{a}{T(v+\beta)^2}\right\}\left\{v - b\right\} = RT$$

vollständig identisch ist. Die einzige zulässige Annahme über die Art und Weise der gegenseitigen Einwirkung verschiedener Moleküle, wenn sie sich umgekehrt proportional der n^{ten} Potenz ihrer Entfernung anziehen, ist, dass auch die kleinsten Theilchen der Materie, die Moleküle, dem Newton'schen Gesetz folgen[3]). Andere Annahmen über n führen zu Ausdrücken, welche mit den synthetischen Eigenschaften der inneren Cohäsion, wie sie durch experimentelle Thatsachen festgestellt sind, im Widerspruch stehen. Auch die Nothwendigkeit des Covolumens β im Ausdrucke für die innere Cohäsion ergibt sich aus theoretischen Gründen.

1) Vergl. Van der Waals Continuität etc. S. 142.

2) Wied. Ann. Bd. 9, S. 337. 1880. Diese Zustandsgleichung scheint nach den neueren Untersuchungen Nadeschdin's (Exner's Rep. Bd. 23, S. 617, 685 und 759) eine sehr allgemeine Giltigkeit zu besitzen und auch auf den flüssigen Zustand in gewissen Grenzen angewendet werden zu dürfen.

3) Vergl. auch P. Bohl Wied. Ann. 36. S. 334. 1889. B. Galitzine, Zeitschr. für phys. Chemie IV. 4. S. 417. 1889.



Durch Verallgemeinerung lassen sich diese theoretischen Betrachtungen auf ein Gemisch zweier Gase übertragen. Die so erhaltene Gleichung enthält Glieder, welche von der einfachen und wechselseitigen Cohäsion, sowie auch von der räumlichen Ausdehnung der Moleküle beider Gase abhängen. Die Cohäsion und räumliche Ausdehnung der Moleküle sind eben die beiden Hauptfactoren, welche die Abweichungen vom Dalton'schen Gesetz hervorrufen. Die so erhaltene verallgemeinerte Zustandsgleichung gestattet die wirklichen Partialdrucke beider Gase zu berechnen.

Bei Anwendung dieser Theorie auf die Beobachtungen Andrews' über die Zusammendrückbarkeit eines Gemisches von 3 Vol. CO_2 mit 4 Vol. N_2 hat sich herausgestellt, dass bei den hohen von Andrews angewendeten Drucken, wenn also der Abstand der Moleküle durchschnittlich ein sehr kleiner ist, neue Kräfte ins Spiel kommen, welche bedingen, dass die ungleichartigen Moleküle in diesem Falle sich etwas schwächer anziehen, als es das Newton'sche Gesetz fordern würde. Man gewinnt also auf diesem Wege einen Einblick in gewisse Eigenschaften der Moleküle selber.

Unter Einsetzung der Werthe der Constanten, soweit sie bekannt sind, in der charakteristischen Zustandsgleichung einiger Körper, ergab sich nach dieser Theorie im allgemeinen eine gute Uebereinstimmung zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen von Δ. Auch die negativen Werthe von Δ, welche auf den ersten Blick auffallen könnten, ergeben sich aus theoretischen Gründen als in der Natur der Sache liegend.

Ein Ausdruck für die Erniedrigung der kritischen Temperatur einer Flüssigkeit bei Anwesenheit eines indifferenten Gases lässt sich aus der verallgemeinerten Zustandsgleichung unmittelbar ableiten.

Die so ausgebildete Theorie sieht auch die Möglichkeit solcher Fälle voraus, wo die kritische Temperatur eines Gemisches ausserhalb derjenigen seiner Bestandtheile liegt[1]).

Physikalisches Institut Strassburg i. E.

1) Man ist in der That gewissermaassen berechtigt zu vermuthen, dass solche Ausnahmefälle in Wirklichkeit vorkommen können. Vergleiche z. B. Van der Waals Continuität etc. S. 142 und 143.

Ueber Verflüssigung bei der kritischen Temperatur.

Von

K. Fuchs.

Wenn man ein Gas bei der kritischen Temperatur oder besser gesagt sehr nahe bei der kritischen Temperatur verflüssigt, dann zeigt sich die auffallende Erscheinung, dass die erscheinende Flüssigkeit sofort einen bestimmten Theil des Gesammtvolumens ausmacht, dass also ihr Volumen nicht vom Werthe $v = 0$ an allmählich zunimmt.

Diese Erscheinung lässt sich als eine einfache Consequenz der Van der Waals'schen Formel darstellen.

Für ein eingeschlossenes Gas, mag dasselbe als Flüssigkeit, als Dampf oder als Gemenge von beiden erscheinen, gilt die Bedingung

$$\frac{at}{v-b} - \frac{c}{v^2} - p = 0$$

Hierbei ist t die absolute Temperatur, v das Volumen der Masseneinheit des Gases, c diejenige Capillaritätsconstante des Gases, in deren Integral r in der dritten Potenz vorkommt, p der äussere Druck, a entspricht der Proportionalitätsconstante des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes, und b ist eine nicht näher bekannte Function von v, welche im wesentlichen vom Volumen der Moleküle abhängt.

In meinem Aufsatze „Ueber Verdampfung" (Exner's Rep. 1888. S. 153) ist diese Formel graphisch versinnlicht. Das erste Glied liefert, wenn man v als Abscisse ansieht und b per nefas constant nimmt, nach der Formel

$$y_1 = \frac{at}{v-b}$$

eine Hyperbel mit den Asymptoten $y = 0$ und $v = b$, welche durch weg Gefälle (nie Steigerung) zeigt. Je grösser t ist, um so grösser wird y für jedes v, und um so grösser wird gleichzeitig für jedes v auch das Gefälle (der erste Differentialquotient).

Das zweite Glied der Hauptgleichung liefert nach der Formel

$$y_2 = \frac{c}{v^2}$$

ebenfalls eine Art Hyperbel, und zwar mit den Asymptoten $y = 0$ und $v = 0$; sie ist aber von t unabhängig.

Die Hauptgleichung hat bei sehr grossem t keine reelle Wurzel, bei sehr kleinem t drei reelle Wurzeln, und bei einem mittleren t nur eine reelle Wurzel, wenn v als Variable angesehen wird. Man findet die Wurzeln graphisch, wenn man (wie in der citirten Abbildung dargestellt ist) die calorische Curve der y_1 um den Betrag p nach unten verschiebt. Man erhält dann bei kleinen t drei Schnittpunkte der verschobenen calorischen Curve mit der Cohäsionscurve der y_2, und diese drei Punkte liefern drei Volumina v_1, v_2 und v_3, bei denen das Gas im Gleichgewicht sein kann. Beim Volumen v_1 erscheint das Gas als Flüssigkeit, beim Volumen v_3 erscheint es als Gas, während das Volumen v_2 in einer unendlich dünnen Oberflächenschicht sich vorfindet.

An dieser Stelle möge es gestattet sein, einen kleinen Irrthum in meiner citirten Arbeit zu berichtigen. Es ist dort (S. 152) bei Erörterung des Volumens v_2 darauf hingewiesen, dass der Van der Waals'sche Capillaritätsausdruck c/v^2 nur für homogene Flüssigkeiten, also für das Innere der Flüssigkeit oder für das Innere des Dampfes giltig ist, dass aber in der Oberfläche die Homogenität nicht vorhanden ist, und dass man dort den Werth $\frac{c}{v^2}$, der sich bei homogener Flüssigkeit als

$$\frac{c}{v^2} = \tfrac{2}{3}\pi\varrho^2 \int_{r_1}^{r_2} r^3 f(r)\,dr \ldots \varrho = \frac{1}{v}$$

darstellt (cit. Auf. S. 150), ersetzen muss durch

$$\tfrac{2}{3}\pi\varrho^2 \int_{r_1}^{r_2} r^3 f(r)\,dr + \tfrac{1}{15}\pi\varrho\varrho'' \int_{r_1}^{r_2} r^5 f(r)\,dr$$

oder kürzer

$$c\varrho^2 + \gamma\varrho\varrho''$$

wobei ϱ'' der zweite Differentialquotient nach der orthagonalen Trajectorie der Schichten gleicher Dichte ist, d. h. nach der zur Flüssigkeitsoberfläche Normalen. Nun ist aber in der Arbeit „Directe Ableitung einiger Capillaritätsfunctionen", Sitz-Ber. d. A. d. W. in Wien Bd. 48 Nov. 1889 S. 19 obige Molecularfunction $c\varrho^2 + \gamma\varrho\varrho''$ um das Glied $-0{,}5\,\gamma\varrho'^2$ ergänzt, so dass sie lautet

$$c\varrho^2 + \gamma(\varrho\varrho'' - \tfrac{1}{2}\varrho'^2)$$

während sie bei Van der Waals bloss lautet

$$c\varrho^2 \ldots \varrho = \frac{1}{v}.$$

An den Resultaten der citirten Abhandlung „Ueber Verdampfung" wird aber durch diese Ergänzung nichts geändert.

Wir kehren nun zum Gegenstande zurück. In einem Gefässe vom Volumen v befinde sich die Masseneinheit eines Gases bei einer so niederen Temperatur, dass ein Theil als Flüssigkeit erscheint (deren Volumen per Masseneinheit v_1 wäre), während die übrige Masse als Dampf vorhanden ist (dessen Volumen per Masseneinheit v_3 wäre). Wenn die Flüssigkeit die Masse x besitzt, dann ist ihr Volumen $x v_1$, und der Dampf hat dann die Masse $1 - x$ und das Volumen $(1 - x)\, v_3$. Flüssigkeit und Dampf füllen zusammen das Volumen v, so dass wir haben

$$x v_1 + (1 - x)\, v_3 = v$$

oder

$$x = \frac{v_3 - v}{v_3 - v_1}.$$

Dies ist derjenige Theil x der Masseneinheit, der im Dampf-Flüssigkeitsgemenge als Flüssigkeit erscheint. Daraus ersehen wir, dass wir nur dann ein D-F-Gemenge haben, wenn v zwischen v_1 und v_3 liegt, und dass x sich dem Werthe $= 1$ um so mehr nähert (die Dampfmenge um so kleiner wird) je näher v an v_1 rückt, während x sich dem Werthe Null nähert (die Flüssigkeit verdampft) wenn v sich v_3 nähert.

Unsere Hauptformel, so weit wir sie bis jetzt discutirt haben, enthält keinen Anhaltepunkt dafür, wie gross bei gesättigtem Dampfe der Dampfdruck, d. h. der äussere Druck p sein muss, d. h. wie tief die calorische Curve nach unten verschoben erscheint, wenn der Dampf gesättigt ist. Die eine Formel enthält drei Variable t, v und p. Nun ist in der citirten Arbeit gezeigt, dass in einem Dampf-Flüssigkeitsgemisch, d. h. bei gesättigtem Dampfe die Zweiecke I und II (schraffirt) in der Figur S. 153 gleich sein müssen, woraus sich die Bedingungsgleichung ergibt (b abermals per nefas constant genommen, da wir doch nur qualitativ rechnen können, nachdem wir das Gesetz des b nicht kennen)

$$\log_n \left(\frac{v_3 - b}{v_1 - b}\right)^{at} - c\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_3}\right) - p\,(v_3 - v_1) = 0.$$

Jetzt haben wir für drei Variable zwei Gleichungen, d. h. wir können zu jeder Temperatur sowohl die Dampfdichte $1 : v_3$, als auch den Dampfdruck p berechnen. Wenn wir also in einem gegebenen Falle die Temperatur t um dt erniedrigen, so wird die calorische Curve um eine beschriebene Strecke dp nach unten verschoben, v_1 rückt um $-dv_1$ nach links und v_3 rückt um $+dv_3$ nach rechts, d. h. die Flüssigkeit wird dichter, der Dampf aber weniger dicht.

Wir wollen nun die höchste Temperatur bestimmen, bei der die Hauptgleichung drei Wurzeln hat, d. h. bei der das Gas condensirbar ist.

Wenn drei Wurzeln vorhanden sind, dann befindet sich zwischen v_1 und v_2 nothwendig ein Volumen w_1, wo die calorische Curve der y_1 und die Molecularcurve der y_2 gleiches Gefälle haben, wie ein Blick auf die citirte Abbildung lehrt. Ebenso muss sich zwischen v_2 und v_3 ein Volumen w_2 finden, wo wieder beide Curven gleiches Gefälle haben. Nun gilt

$$y_1 = \frac{at}{v - b} \quad \text{also} \quad \frac{dy_1}{dv} = -\frac{at}{(v - b)^2}$$

und

$$y_2 = \frac{c}{v^2} \quad \text{also} \quad \frac{dy_2}{dv} = -\frac{2c}{v^3}$$

Durch Gleichsetzung der beiden Differentialquotienten finden wir

$$\frac{at}{(v - b)^2} = \frac{2c}{v^3}.$$

Unter dieser Bedingung gibt es ein $v = w$, wo beide Curven gleiches Gefälle haben; wenn es aber ein solches Volumen gibt, dann gibt es natürlich auch ein zweites. Unsere Formel lässt sich auch schreiben

$$t = \frac{2c}{a} \frac{(v-b)^2}{v^3}.$$

So können wir für jedes v die Temperatur berechnen, die für eben dieses v Gleichheit der Gefälle gibt. Der höchste Werth, den t erreichen kann ergibt sich aus

$$\frac{dt}{dv} = \frac{2c}{a} \cdot \frac{v - b}{v^4} (3b - v) = o.$$

Hieraus ergibt sich für die höchste Temperatur, die bei der Verflüssigung stattfinden kann, also für das Volumen der Masseneinheit bei der kritischen Temperatur die Bedingung $v = 3b$, wie sie auch Van der Waals angibt. Dies in die Gleichung für t eingesetzt, finden wir als kritische Temperatur

$$t = \frac{8}{27} \cdot \frac{c}{ab}.$$

Für den kritischen Druck aber finden wir aus der Hauptgleichung

$$p = \frac{1}{27} \frac{c}{b^2}.$$

Bei der kritischen Temperatur fallen die drei Volumina v_1, v_2 und v_3 in ein einziges zusammen, das wir mit v_0 bezeichnen können. Die Berührung der beiden Curven ist aber dabei eine ähnliche, wie die Berührung eines Kreises mit einer Ellipse: die Curven schneiden sich

unter einem Winkel gleich Null; wenn t noch höher wird, schneiden sie sich unter einem Winkel grösser als Null.

Nun kommen wir an den Angelpunkt. Wenn ein Gas bei der kritischen Temperatur sich unter dem kritischen Drucke befindet, dann fallen v_1, v_2 und v_3 zusammen, und das Gas ist gleichzeitig Flüssigkeit und Gas. Wenn wir nun die Temperatur um ein Differential dt erniedrigen, dann fahren sofort die drei Punkte aus einander: v_1 rückt nach links, v_3 rückt nach rechts, und zwar liegt es in der Natur der Berührungscurven, dass diese Verschiebungen $-\varDelta v_1$ und $+\varDelta v_3$ unendlich gross sind im Vergleich zur Verschiebung dp, welche die calorische Curve infolge der Abkühlung um dt erlitten hat.

Wenn die Abkühlung von der kritischen Temperatur eine grosse, endliche ist, dann haben wir für die Masse der Flüssigkeit den Ausdruck

$$x = \frac{v_3 - v_0}{v_3 - v_1}$$

gefunden, wenn in dem unverändert gebliebenen Volumen v_0 die Masseneinheit enthalten ist. Wir können hieraus das Verhältnis der Flüssigkeitsmasse m_1 zur Dampfmasse m_3 bestimmen zu

$$\frac{m_1}{m_3} = \frac{x}{1-x} = \frac{v_3 - v_0}{v_0 - v_1} \ldots m_1 + m_3 = 1.$$

Für sehr kleine Abkühlungen, wie wir sie früher angenommen haben, nimmt die Formel die Gestalt an

$$\frac{m_1}{m_3} = \frac{\varDelta v_3}{\varDelta v_1}.$$

Wenn die Abkühlung dt immer kleiner wird und sich dem Werthe o nähert, dann muss auch das Verhältnis $m_1 : m_3$ sich einem bestimmten Werthe nähern, welcher von o und ∞ verschieden ist, etwa wie ein minimaler Sinus versus relativ unendlich grosse Sinus und Tangens gibt, diese sich aber bei verschwindendem sin. vers. dem Grenzverhältnis $= 1$ nähern.

Der Grenzwerth von $m_1 : m_3$ gibt an, in welchem Verhältnis die Flüssigkeitsmasse und die Dampfmasse sofort stehen muss, wenn die kritische Temperatur beim kritischen Druck um ein Differential erniedrigt wird.

Leider ist die Berechnung dieses Grenzwerthes eine unmögliche Sache, da es sich um Gleichungen des dritten Grades handelt, aus denen die drei Wurzeln v_1, v_2 und v_3 berechnet werden sollen, und wir das Gesetz des b in Wirklichkeit nicht kennen.



Die zweite Elasticitätsconstante.

Eine didaktische Mittheilung.

Von

A. Kurz.

Die Zeit kann bereits als theilweise angebrochen erachtet werden, dass im allgemeinen Physikunterrichte auch auf diese zweite Constante der isotropen Körper eingegangen werden muss (oder will), und nicht bloss auf die erste, den Elastizitätsmodul E. Man bedarf ja derselben beim Torsionspendel [1]), wo der Torsions-Elastizitätsmodul F auftritt, welcher nahe $\frac{2}{5}$ vom ersteren Modul ausmacht[2]).

Indessen ist eigentlich nicht F jene zweite Constante, sondern vielmehr m gleich 3 bis 4 etwa, oder deren Reciproke μ gleich $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4}$, welche besagt, dass z. B. ein Draht, wenn dessen Länge l durch Zug um λ vermehrt wird, seinen Durchmesser d um δ vermindert aufweist, so dass

$$\frac{\delta}{d} = \mu \cdot \frac{\lambda}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1$$

d. h., dass die Quercontraction ungefähr den 3. bis 4. Theil der Längsdilatation ausmacht, wenn diese Veränderungen innerhalb der Elastizitätsgrenze gelegen sind.

Dient die Gleichung 1 zur Definition von μ, so lässt sich ferner beweisen, dass

$$F = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2$$

und dass die Festigkeit des Körpers gegen Schub oder Scherung[3]) kleiner ist als diejenige gegen Zug im Verhältnisse 1 zu $(1+\mu)$ . . . (3

---

1) S. u. a. meine Notiz im Jahrgange 1884.

2) Henrici hat in der kürzlich erschienenen 10. Aufl. des Leitfadens der Physik noch die falsche Angabe $\frac{1}{3}$. Kohlrausch' Physikalisches Praktikum verweist wegen $\frac{2}{5}$ auf Clebsch' Theorie der Elastizität. Ueber Messungen von μ in obiger Gleichung 1 s. Götz und Kurz im Repert. v. d. J. 1886 u. 1887.

3) Ich möchte dafür auch das kurze Wort „Schur" versuchen.

Wenn das betreffende Material (Metall) gegen Zug und Druck nicht gleiche Festigkeit besitzt, wie z. B. das Gusseisen halb so fest ist gegen Zug als gegen Druck, so muss bei diesem Verhältnisse statt des Druckes der Zug mit dem Schub zur Vergleichung kommen.

In meinem „Taschenbuch der Festigkeitslehre" (Berlin, Ernst & Korn 1877) habe ich diese Relationen (Gl. 2 und 3) bewiesen mit Zugrundelegung eines Würfels, welcher von einer Zugspannung ergriffen ist und dadurch in eine quadratische Säule verwandelt wird. Setzt man den Längsdehnungscoefficienten $\lambda : l$ in Gl. 1 gleich α, so ist bekanntlich

$$\text{die Zugspannung} = E \cdot \alpha \frac{\text{Kilogramm}}{\text{Millimeter}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4$$

und in möglichster Analogie hiermit wird

$$\text{eine Schubspannung} = F \cdot \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5$$

gesetzt, wobei man sich vorstellen kann, dass das quadratische Profil

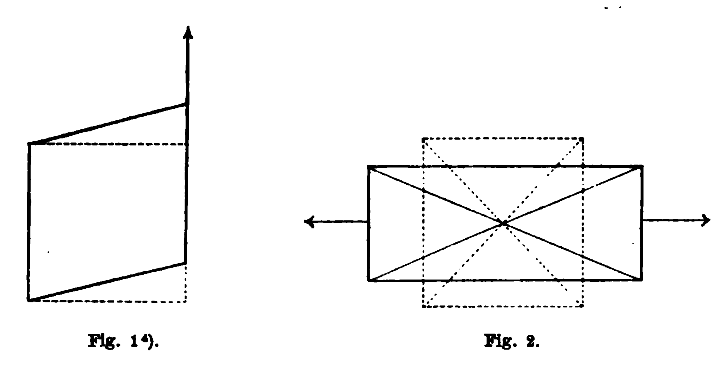


Fig. 1[4]). Fig. 2.

des Würfels in eine Raute verwandelt wird, so dass die vier rechten Winkel $\frac{\pi}{2}$ des Quadrates in die spitzen und stumpfen $\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right)$ verwandelt erscheinen, wie die Figur 1 zeigt.

Gehen wir nun wieder zur genannten Quadratsäule zurück, so erscheint diese im Profil aus dem Quadrate (Würfel) entstanden wie in Figur 2, und die Diagonalen des Rechteckes bilden nunmehr die Winkel $\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right)$ gegenüber den Winkeln $\frac{\pi}{2}$ der Diagonalen des Quadrates. Indem ich nun am angegebenen Orte φ durch α ausdrückte, fand ich

$$\varphi = (1 + \mu)\,\alpha \, ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6$$

4) Streng genommen müsste die verticale Seite der Raute rechts ein wenig gegen die ursprüngliche Quadratseite (nach links) parallel verschoben gezeichnet werden, da sonst nur ein Rhomboid und kein Rhombus entsteht. Die betreffenden Figuren hatte ich in meinem Taschenbuche aus Sparsamkeitsrücksichten weggelassen, würde sie aber bei einer event. 2. Auflage einsetzen.

dies führt sogleich zu der oben unter Gl. 3 genannten Beziehung; denn wenn die Veränderung durch Schub grösser ist als durch gleich gross angenommenen Zug, so heisst dies doch, dass der betreffende Körper im genannten Verhältnisse weniger fest ist bei der ersteren als der letzteren Anstrengungsweise [5]).

Endlich war noch zum Beweise von Gl. 2 zwischen der Zug- und der Schubspannung in Gl. 4 und 5 eine Brücke zu bauen, wie Gl. 6 eine solche Brücke für α und φ in Gl. 4 und 5 ist. Dies geschieht, indem man in Fig. 2 statt der Zugspannung die Schubspannung der Fig. 1 anwendet auf die Diagonalfläche des Würfels (Diagonale des Quadrats), was durch Zerlegung der ersteren in die Componenten bewerkstelligt wird mit den Factoren $\cos\frac{\pi}{4}$ und $\sin\frac{\pi}{4}$. Die erstere derselben ist allein zu berücksichtigen und dabei noch zu erwägen, dass sie, um Schubspannung (für die Flächeneinheit) zu werden, noch mit $\sqrt{2}$ (der Diagonalfläche des Würfels 1^3) zu dividiren ist. Also entsteht aus Gl. 4 und 5 in der besagten Anwendung auf die Figuren 1 und 2

$$\text{jene Zugspannung} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\text{jene Schubspannung} \quad . \quad . \quad (7$$

und man erhält aus den Gl. 4, 5, 6, 7 die Gl. 2.

All dies ist als Einleitung zu meiner heutigen Mittheilung zu betrachten, wenn es nicht wegen der Ausführlichkeit, mit welcher ich den Gegenstand einem weiteren Leserkreise näher zu bringen bestrebt war (statt eines Hinweises auf Clebsch, wie in der Anm. 2, oder etwa auf Kirchhoff's „Mechanik“ und ähnliche Werke), auch schon an und für sich ein Anrecht hat zur Einnahme dieser Stelle.

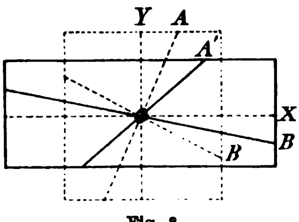


Fig. 3.

In neuerer Zeit, vor etwa zwei Jahren, suchte und fand ich noch grössere Befriedigung darin, dass ich die Fig. 2 allgemeiner hielt, indem statt des Diagonalenkreuzes im Quadrat ein beliebig gelegenes rechtwinkliges Transversalenkreuz zu Grunde gelegt wurde, wie in Fig. 3.

Der rechte Winkel AOB wird durch die Zugspannung der Fig. 2 in den spitzen $A'OB'$ verwandelt, d. i. um $AOA' = \chi$ und $BOB' = \psi$ vermindert; $AOY = BOX = \beta$ ist beliebig $\left(\text{war in Fig. 2} = \frac{\pi}{4}\right)$.

5) Man gewinnt dieses Resultat nebenher auch aus der Formel für die combinirte Festigkeit, die aber umständlicher in der Ableitung ist. Siehe das genannte Taschenbuch; auch im vorjährigen Bande des Repertoriums habe ich diese Formel zur Anwendung gebracht, zur Combination der Biegung und Torsion.

Es hat

der Punkt	A	A'	B	B'
die Abscisse	x	x'	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(1+\alpha)$
die Ordinate	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}(1-\mu\alpha)$	y gleich x	y'
wobei	$x:\frac{1}{2}=x':\frac{1}{2}(1+\alpha)$		$y:\frac{1}{2}=y':\frac{1}{2}(1-\mu\alpha)$	
also	$\tan\beta=2x$		$\tan\beta=2y$	

$$\tan(\beta+\chi)=\frac{2x'}{1-\mu\alpha}=2x\cdot\frac{1+\alpha}{1-\mu\alpha} \quad\Big|\quad \tan(\beta-\psi)=\frac{2y'}{1+\alpha}=2y\cdot\frac{1-\mu\alpha}{1+\alpha}$$

Weil χ und ψ klein sind, kann man schreiben

$$\frac{\tan\beta+\chi}{1-\tan\beta\cdot\chi}=\tan\beta\cdot\frac{1+\alpha}{1-\mu\alpha} \quad\Big|\quad \frac{\tan\beta-\psi}{1+\tan\beta\cdot\psi}=\tan\beta\cdot\frac{1-\mu\alpha}{1+\alpha}$$

und mit Vernachlässigung der Quadrate von $\chi\,\psi\,\alpha$ wird analog zu Gl. 6

$$\chi=\sin\beta\cos\beta\cdot(1+\mu)\,\alpha \quad\Big|\quad \psi \text{ gerade so gross wie } \chi$$

also

$$\chi+\psi=2\sin\beta\cos\beta\,(1+\mu)\,\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6'$$

Als Analogie zu Gl. 7 wird die Componente der Zugkraft in Fig. 2, welche längs OA schert, mit dem Factor $\sin\beta$, und da sie längs der Fläche $(1:\cos\beta)$ schert, als Scherspannung (für die Flächeneinheit) mit dem Factor $\cos\beta$ behaftet; demnach

$\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot$ Zugspannung in Gl. 4 = Scherspannung in Gl. 5 . . (7'

und man erhält aus den Gl. 4, 5, 6' und 7', wobei statt Gl. 5 jetzt zu setzen ist

$$\text{Scherspannung}=F\cdot(\chi+\psi), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5'$$

wiederum die Gl. 2.

Aber wenn man die Scherung längs OB in der Fig. 3 vor sich gehen lässt, statt längs OA, so findet man

$\cos^2\beta\cdot$ Zugspannung in Gl. 4 = Scherspannung in Gl. 5 . . (7''

und das Resultat der vorhergehenden Elimination ist

$$F=\frac{E}{2(1+\mu)}\,\operatorname{cotan}\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2'$$

Für $\beta=0$ wäre hiernach $F=\infty$, was mit der Betrachtung der Fig. 3 leicht verständlich erscheint; auch ist auf diese Art einzusehen, dass man β nur bis zu $\frac{\pi}{4}$ wachsen zu lassen braucht, und dass für letzteren Werth das kleinste F, also das wirklich gemäss Gl. 2 anzunehmende F übrig bleibt.

Kürzerer Beweis der Gleichung 2.

Statt des Kräfteparallelogramms, welches in Fig. 2 und 3 benutzt wurde, wird der Hebel in Fig. 1 angewendet, wozu ich noch die Fig. 4 zeichnen will.

Es ist dann, weil z durch $\frac{z}{2}$ links und rechts ersetzt werden kann und nur $\frac{z}{2}$ rechts in Betracht kommt,

$$z = E \cdot \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4'$$

$$\tfrac{1}{2} z = F \cdot \varphi ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5'$$

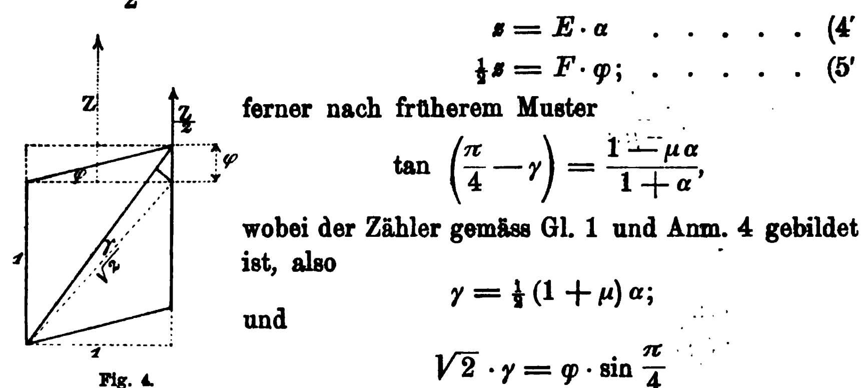


Fig. 4.

ferner nach früherem Muster

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \gamma\right) = \frac{1 - \mu\alpha}{1 + \alpha},$$

wobei der Zähler gemäss Gl. 1 und Anm. 4 gebildet ist, also

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(1 + \mu)\,\alpha ;$$

und

$$\sqrt{2} \cdot \gamma = \varphi \cdot \sin\frac{\pi}{4}$$

(der kleine Kreisbogen mit dem Radius $\sqrt{2}$) oder $2\gamma = \varphi$, so dass wiederum

$$\varphi = (1 + \mu)\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6$$

und aus den drei letzten numerirten Gleichungen die Gl. 2 hervorgeht.

Vergleichung beider Verfahren.

Ein Theil der bedeutend grösseren Kürze des zweiten Verfahrens beruht auf dem Umstande, dass ich mich wegen des Vorhergegangenen hierbei kürzer fassen durfte. Dagegen scheint mir gerade die Discussion der Gl. 2′ für den Anfänger einen tieferen Einblick in das Wesen des Vorzutragenden zu ermöglichen.

Ueber den Einfluss der Schwere auf eine Mischung zweier Flüssigkeiten.

Von

K. Fuchs.

An anderer Stelle (Rep. d. Phys. 1888, Ueber die Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten, S. 619) ist die Formel abgeleitet

$$B = \varsigma_1^2 a + \varsigma_2^2 b + 2 \varsigma_1 \varsigma_2 c.$$

Hier bedeutet B die Bildungsarbeit der Volumeinheit der Mischung der beiden Flüssigkeiten A und B, d. h. die Arbeit, welche die Molecularkräfte leisten, wenn unendlich zerstreute Moleküle von A und B zu einer Volumeinheit der Mischung zusammengefügt wurden. Es bedeuten ς_1 und ς_2 die Concentrationen von A und B, d. h. die Volumina von A, resp. B, die in der Volumeinheit der Mischung enthalten sind, so dass $\varsigma_1 + \varsigma_2 = 1$ ist. Endlich ist a eine Cohäsionsconstante von A, b eine Cohäsionsconstante von B und c eine Adhäsionsconstante der beiden Flüssigkeiten.

Die Bildungsarbeit der Volumeinheit von reinem A ist (wenn man $\varsigma_1 = 1$, $\varsigma_2 = 0$ setzt) $B_a = a$, während analog die Bildungsarbeit der Volumeinheit von reinem B (für $\varsigma_1 = 0$, $\varsigma_2 = 1$) gleich $B_b = b$ ist. Dies ist also die Bedeutung von a und b.

Wenn während des Mischungsactes eine Contraction vom Volumen $= 1$ auf das Volumen $v < 1$ stattfindet, dann rectificirt man die Formel dadurch, dass man die für uncontrahirte Flüssigkeiten geltenden Constanten a, b und c je durch v^2 dividirt. Man erkennt dies etwa aus folgender Ueberlegung: Wenn die Mischung sich auf das Volumen $= \frac{1}{3}$ contrahirt, dann könnte man die neue Sachlage aus der alten auch so ableiten, dass man jedes Molekül der uncontrahirten Flüssigkeit verdreifacht. Dann ist die Anziehung je zweier Massentheilchen $3^2 = 9$ mal grösser. Beim Zusammentritt der Massentheilchen aus unendlicher Zerstreuung ist also auch die neunfache Bildungsarbeit geleistet worden, und diese finden wir, indem wir übereinstimmend mit obiger Angabe die Grössen a, b und c mit 9 multipliciren oder

aber mit v^2 dividiren. Die Grössen ς_1 und ς_2 beziehen sich aber dann immer noch auf die Volumeinheit uncontrahirter Flüssigkeit (was übrigens gleichgiltig ist).

Wie in demselben Aufsatze gezeigt worden ist, ist der Werth der Bildungsarbeit B für einen bestimmten Punkt, auf den sich ς_1 und ς_2 bezieht, durch denselben Ausdruck auch dann gegeben, wenn die Flüssigkeit nicht homogen ist, d. h. das Mischungsverhältnis sich von Stelle zu Stelle stetig ändert, wenn diese Aenderung nur nicht allzu jäh erfolgt.

Wenn wir von reinem A das Volumen u, von reinem B das Volumen v nehmen und dieselben mischen, dann erhalten wir ohne Contraction das Gesammtvolumen $u + v$, und hieraus ergibt sich

$$\varsigma_1 = \frac{u}{u+v} \qquad \varsigma_2 = \frac{v}{u+v}$$

und unsere Formel lautet

$$B = \frac{u^2 a + v^2 b + 2\,uvc}{(u+v)^2}$$

wobei wir im Falle von Contraction die Constanten a, b und c durch Division mit dem verminderten Volumen in obiger Weise zu rectificiren hätten. Hierbei ist aber noch zu merken, dass wir die Flüssigkeiten A und B erst auf ein unendliches Volumen bis zu völliger Zerstreuung der Moleküle expandiren müssten (wobei die Molecularkräfte die Arbeiten $-ua$ und $-vb$ leisten) und dass obige Arbeit B erst durch den Zusammentritt dieser zerstreuten Moleküle zustande käme, also die Arbeiten $-ua$ und $-vb$ nicht involvirt.

Wenn wir in die Volumeinheit uncontrahirter Mischung das A-Volumen $d\varsigma_1$ einführen, also gleichzeitig das B-Volumen $d\varsigma_2$ ausführen wollen, dann wird durch diesen Austausch eine Arbeit gewonnen, welche wir durch Differentiation von B nach ς_1 senden, wobei wegen $\varsigma_1 + \varsigma_2 = 1$ auch gilt $d\varsigma_2 = - d\varsigma_1$. Wir finden dann leicht den Quotienten

$$\frac{dB}{d\varsigma_1} = 2\varsigma_1(a-c) - 2\varsigma_2(b-c).$$

Dieser Quotient bedeutet offenbar den Arbeitsgewinn für den fingirten Austausch der Volumeinheit von A gegen die Volumeinheit von B.

In einer nicht homogenen Mischung ist in einem benachbarten Punkte in der Entfernung dx der Werth von ς_1 und ς_2 ein anderer. Wenn wir obigen Quotienten nun nach x differenziren, dann finden wir die Differenz zweier gleichsinnigen, oder aber die Summe zweier entgegengesetzter Concentrationsschwankungen von A an zwei um dx von einander entfernten Punkte. Das kommt aber darauf heraus, dass wir die Volumeinheit von A aus o um dx verschieben und mit

einem gleichen Volumen von B den Platz tauschen lassen. Durch thatsächliche Differentiation finden wir

$$\frac{d^2 B\,dx}{dx\,d\varsigma_1} = 2\,(a + b - 2\,c)\,\frac{d\varsigma_1}{dx}\,dx.$$

Dies ist also die Arbeit der Molecularkräfte, wenn in einer Mischung der Flüssigkeiten A und B die Volumeinheiten von A und B über die Strecke dx den Platz tauschen. (Derselbe Ausdruck für dieselbe Arbeit ist in der eben citirten Arbeit S. 639 in weitschweifigerer Weise abgeleitet.) Wenn aber dieser Platzwechsel obige Arbeit liefert, dann folgt hieraus, dass auf die Moleküle Kräfte wirken, welche diesen Platzwechsel herbeizuführen trachten, und welche durch den Ausdruck

$$2\,(a + b - 2\,c)\,\frac{d\varsigma_1}{dx}$$

gemessen sind.

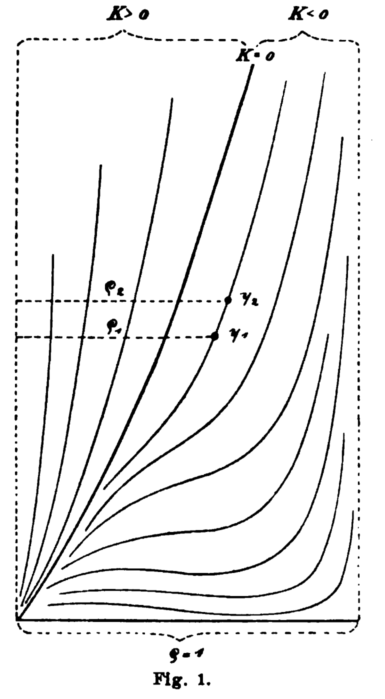


Fig. 1.

Lassen wir unsere Mischung in einem hohen Cylinderglase stehen. Wenn die Volumeinheit von A im Gewichte σ_1 sich um dx nach unten senkt und mit der Volumeinheit von B im Gewichte σ_2 den Platz tauscht, dann wird hierbei eine Arbeit $k_1\,dx = (\sigma_1 - \sigma_2)\,dx$ durch die Anziehungskraft der Erde geleistet. Also ist $k_1 = \sigma_1 - \sigma_2$ das Maass der Kraft, welche den Platzwechsel zu veranlassen strebt.

Wenn von einem Niveau o aus, wo die Concentrationen von A und B gleich ς_1 und ς_2 sind, die Volumeinheit von A durch irgend welche Kräfte nach unten um dx gezogen wird, dann verdrängt sie eigentlich die Volumeinheit Mischung und tauscht mit ihr den Platz. Diese letztere Volumeinheit enthält aber von A das Volumen ς_1 und von B das Volumen ς_2. Effectiv gelangt also von A nach unten nur das Volumen $1 - \varsigma_1 = \varsigma_2$, und ein gleiches Volumen von B wird nach oben gedrängt. Ein niedergezogenes A-Volumen w liefert also nur einen effectiven Wechsel der Volumina $w_1\,\varsigma_2$.

Nach diesen Einleitungen können wir in unserer der Schwere unterworfenen Mischung drei Strömungen unterscheiden:

Die Schwere führt durch die Flächeneinheit des Niveau o in der Zeiteinheit ein um so grösseres Volumen von A, je grösser obige Kraft $k_1 = \sigma_1 - \sigma_2$ ist, und offenbar auch um so mehr A, je reichlicher A im Niveau o enthalten ist, d. h. der Gravitationsstrom von A ist sowohl der Kraft k_1 als auch der Concentration ς_1 proportional. Wir können also diesen durch die Gravitation ursprünglich erzeugten Strom des A setzen $= q\varsigma_1(\sigma_1 - \sigma_2)$, und der gleiche Strom von B geht durch o nach oben. Im Sinne des letzten Punktes haben wir aber diesen Strom noch durch Multiplication mit ς_2 zu rectificiren. Der nach unten gerichtete Gravitationsstrom von A ist also

$$q\varsigma_1\varsigma_2(\sigma_1 - \sigma_2) \text{ oder kurz } q\varsigma_1\varsigma_2 k_1.$$

Auf ganz analoge Weise finden wir, dass die Molecularkräfte, wenn wir x von der Oberfläche der Flüssigkeit nach unten rechnen und ς_1 von oben nach unten zunehmen lassen, einen Molecularstrom des A nach unten erzeugen, der gegeben ist (wie in der Abhandlung „Ueber die Mischungsschicht" weitschweifiger entwickelt ist) durch

$$2q\varsigma_1\varsigma_2(a+b-2c)\frac{d\varsigma_1}{dx}.$$

Wenn wir mit k_2 den Excess der Adhäsionsconstante c über dem Mittel der Cohäsionsconstanten bezeichnen, so dass gilt

$$k_2 = \left(c - \frac{a+b}{2}\right)$$

dann können wir den Molecularstrom auch schreiben

$$-4q\varsigma_1\varsigma_2 k_2\frac{d\varsigma_1}{dx}.$$

Endlich ist noch klar, dass die Diffusion A nach oben zu führen trachtet, und zwar ist der Diffusionsstrom, d. h. das per Zeiteinheit durch die Flächeneinheit bewegte Volumen von A gleich

$$-p\frac{d\varsigma_1}{dx}$$

wobei p die Diffusionsconstante ist. Die Flüssigkeit in der verticalen Glasröhre ist im Gleichgewicht, wenn in jedem Niveau die Summe dieser drei Ströme: des Gravitationsstromes, des Molecularstromes und des Diffusionsstromes gleich Null ist, d. h. wenn gilt

$$q\varsigma_1\varsigma_2(\sigma_1-\sigma_2) - 4q\varsigma_1\varsigma_2\left(c-\frac{a+b}{2}\right)\frac{d\varsigma_1}{dx} - p\frac{d\varsigma_1}{dx} = o.$$

Wenn wir der Einfachheit wegen $q:p = n$ setzen und ϱ statt ς_1 schreiben, dann lautet die Formel (indem wir die Constanten zu k_1 und k_2 zusammenfassen)

$$n k_1 - \left(4 n k_2 + \frac{1}{\varrho(1-\varrho)}\right) \frac{d\varrho}{dx} = o.$$

Hier lassen sich die Variabeln unmittelbar sondern und wir finden durch Integration

$$n k_1 x - 4 n k_2 \varrho - \log \frac{\varrho}{1-\varrho} = \text{Const.}$$

Wenn in der Tiefe x_1 unter der Oberfläche $\varrho = \varrho_1$ ist, und in der Tiefe x_2 entsprechend $\varrho = \varrho_2$, dann finden wir unter Elimination der Constanten

$$n k_1 (x_2 - x_1) - 4 n k_2 (\varrho_2 - \varrho_1) - \log \frac{\varrho_2}{1-\varrho_2} : \frac{\varrho_1}{1-\varrho_1} = o.$$

Dies ist gleichwertig mit

$$\frac{\varrho_2}{1-\varrho_2} e^{4 n k_2 \varrho_2} = \frac{\varrho_1}{1-\varrho_1} e^{4 n k_2 \varrho_1} e^{n k_1 (x_2 - x_1)}.$$

Hier erfordert die Function

$$y = \frac{\varrho}{1-\varrho} e^{4 n k_2 \varrho},$$

welche auf beiden Seiten vorkommt, eine genaue Untersuchung.

Vor allem sieht man, dass y unbedingt für $\varrho = o$ zu $y = o$, und für $\varrho = 1$ zu $y = \infty$ wird. Für $k_2 = o$, d. h. wenn die Adhäsion gleich dem Mittel der Cohäsionen ist, wird

$$y = \frac{\varrho}{1-\varrho},$$

welche Curve stetig und beschleunigt aufsteigt. Wenn k positiv wird, die Adhäsion also steigt, dann wird bei jedem ϱ das entsprechende y grösser, die Curve rückt also nach oben und wird steiler. Wenn jedoch k negativ wird, die Adhäsion also unter jenes Mittel rückt, dann rückt die Curve überall nach unten. Die wichtigste Erscheinung ist nun hier die, dass die Curve nun Culminationen zeigen kann. Wenn wir nämlich $dy/dx = o$ setzen, dann finden wir die Bedingung

$$-4 n k_2 = \frac{1}{\varrho(1-\varrho)}.$$

Der Nenner lässt leicht erkennen, dass die Curven stets zwei zu $\varrho = 1/2$ symmetrisch gelegene Culminationen haben, wie dies auch in der Zeichnung angedeutet ist. Wir wollen nur kurz constatiren, dass diese Culminationen Sättigungsgrade characterisiren, wollen aber nicht weiter in die Sache eingehen.

Wir wollen nun die Dichte ϱ derjenigen Flüssigkeit A zuschreiben, welche schwerer ist, so dass wir k_1 positiv setzen können. Sodann wählen wir behufs orientirender Discussion die Höhendifferenz $x_2 - x_1$ so, dass

$$e^{nk_1(x_2-x_1)} = 1{,}01$$

ist. Dann lautet unsere Formel für den Einfluss der Schwere

$$y_2 = 1{,}01\, y_1,$$

d. h. bei der angenommenen Höhendifferenz ist die Mischungsfunction y_2 um ein Procent grösser, als die Mischungsfunction y_1. Suchen wir nun auf irgend einer der Curven zwei Punkte auf, von denen der eine um ein Procent höher liegt, als der andere. Die entsprechenden Abscissen ϱ_2 und ϱ_1 zeigen uns dann, um wie viel die Concentration von A bei einer Höhendifferenz $(x_2 - x)$ zunimmt. Wir sehen sofort aus dem Laufe der Curven:

Je grösser die Adhäsion der gemischten Flüssigkeiten an einander ist, um so weniger ändert sich die Mischung mit der Tiefe.

Für practische Beobachtungen ergibt sich nach den bisherigen Entwicklungen folgendes:

1. In einer Mischung zweier Flüssigkeiten nimmt die Concentration ϱ der schwereren Flüssigkeit A mit der Tiefe zu. Zwischen den Concentrationen ϱ_1 und ϱ_2 in den Tiefen x_1 und x_2 unter der Oberfläche (wobei $x_2 > x_1$ ist) besteht der Zusammenhang

$$\frac{\varrho_1}{1-\varrho_2}\, e^{4nk\varrho_2} = h\, \frac{\varrho_1}{1-\varrho_1}\, e^{4nk\varrho_1}.$$

Hierbei ist

$$k = c - \frac{a+b}{2}$$

$$h = e^{n(\sigma_1-\sigma_2)(x_2-x_1)}$$

wobei σ_1 und σ_2 die specifischen Gewichte der reinen Flüssigkeit A und B sind.

2. Die Beobachtungen führen zur Bestimmung von zwei neuen Constanten k und n. Nachdem aber a, b und p von anderen Untersuchungen her bekannt sind, so ergibt sich die Bestimmung der Adhäsionsconstante c und der Molecularstromconstante q.

3. Wenn die Mischung mit Contraction verbunden ist, dann hat man die Experimente mit Mischungen zu gleichen Volumtheilen zu machen, weil dann die Aenderung im Mischungsverhältnis einen minimalen Einfluss auf die Contraction besitzen.

Die Constanten a, b, c, k sind in der eingangs angegebenen Weise durch Division mit v^2 zu rectificiren.

Eingesendete Bücher.

E. Roscoe und **A. Schuster, Die Spectralanalyse** in einer Reihe von sechs Vorlesungen mit wissenschaftlichen Nachträgen, dritte Auflage. Neubearbeitung, Braunschweig, bei F. Vieweg & Sohn. 466 S. mit zahlreichen Figuren und Tafeln. 16 M. 1890. Zu dieser Neubearbeitung des trefflichen Werkes sind die zahlreichen Entdeckungen und neueren Ergebnisse auf dem Gebiete der Spectralanalyse seit dem Erscheinen der letzten Auflage mit berücksichtigt, wodurch das Werk jetzt einen klaren Ueberblick über den gegenwärtigen Stand dieser Disciplin gewährt.

N. von Konkoly, Handbuch für Spectroscopiker im Cabinet und am Fernrohr. Halle a. S., Verlag von W. Knapp 1890. 568 S. mit 335 Figuren 18 M. Der rühmlichst bekannte Verfasser theilt in diesem Werke seine langjährigen Erfahrungen auf dem Gebiete der Spectroscopie mit; die Reichhaltigkeit des Inhaltes geht schon aus den Kapitelüberschriften hervor: 1. Einrichtung eines spectroscopischen Laboratoriums. 2. Präcisionshilfsapparate. 3. Die Spectroscope. 4. Die Messapparate an den Spectroscopen. 5. Spectralphotometer und Spectroscopien welche für specielle Untersuchungen dienen. 6. Die Fernröhre, ihre Unterbringung und ihre Triebwerke. 7. Von den Sternwarten im allgemeinen.

H. Kayser, Lehrbuch der Physik. Stuttgart bei F. Enke 1890. 464 S. mit 334 Figuren. 10 M. Das Buch, für Studirende an Hochschulen berechnet, gibt eine sehr übersichtliche Anordnung des vorhandenen Stoffes unter Berücksichtigung der neuesten Forschungen; die Ausstattung ist eine sehr gute.

A. Sprockhoff, Grundzüge der Physik. 2. Auflage. Hannover, Verlag von C. Meyer. 1890. 430 S. mit 442 Abbildungen 3,50 M. Uebersichtliche Anwendung des Stoffes zum Gebrauche an Mittelschulen. Dem Buche ist ein Vorbereitungscurs über die wichtigsten Erscheinungen des täglichen Lebens, sowie zum Schlusse eine historische Tabelle beigegeben.

F. Mann, Georg Simon Ohm, Beiträge zum Charakterbilde des grossen Physikers. Leipzig bei A. Deichert's Nachf. 1890. 58 S. 75 Pf. Das Schriftchen empfiehlt sich schon von selbst durch seinen Titel.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1888, I. Hälfte Abth. I und II. Herausgegeben von Prof. P. Schreiber.

Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. Leipzig bei Engelmann. Erschienen sind wieder die folgenden Heftchen: Nr. 9 Hess, Thermochemische Untersuchungen. Nr. 10 F. Neumann, Die mathematischen Gesetze der indicirten elektrischen Ströme. Nr. 11 G. Galilei, Unterredungen und mathematische Demonstrationen. Nr. 12 J. Kant, Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels.

W. Steffen, Lehrbuch der reinen und technischen Chemie I. Bd. Stuttgart Verlag von J. Maier 1889. 816 S. und 366 Fig. 16 M. Der vorliegende 1. Band dieses einen Theil der Kleyer'schen Encyclopädie bildenden Werkes behandelt in der bekannten didaktischen Weise die Metallerde.

M. Faraday, Experimentelle Untersuchungen über Elektricität, 2. Bd. Deutsch von Dr. S. Kalischer, Berlin bei J. Springer 1890. 303 S. mit zahlreichen Figuren und Tafeln 8 M. Es ist dies nun der zweite Band der Uebersetzung des berühmten Werkes, das heute noch das grundlegende für das ganze Gebiet der Elektricitätslehre ist; der dritte und letzte Band wird hoffentlich bald folgen.

Protokoll der Versammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 6. Mai 1890.

Vorsitzende: Hofrath Ludwig und Hofrath Stefan.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Hierauf werden die angekündigten Vorträge gehalten, und zwar 1. von Herrn Hofrath Dr. E. Ludwig: „Ueber das Vorkommen von Arsen in Friedhofserden"; 2. von Herrn Dr. E. Lecher: „Eine bequeme Methode zur Vergleichung von Condensatoren"; 3. von Herrn Dr. F. Wächter: „Ueber elektrische Gasentladungen".

Der Secretär.

Protokoll der Versammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 13. Mai 1890.

Vorsitzender: Hofrath Ludwig.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Herr Dr. Adolf Jolles hält die angekündigten Vorträge: „Beiträge zur Methodik der Harnuntersuchung", und: „Ueber die Ursache des Irisirens von Tafelglas".

Der Sekretär.

Protokoll der Versammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 16. Mai 1890.

Vorsitzender: Prof. Siegm. Exner.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Herr Max Nowack hält den angekündigten Vortrag: Demonstration des Grammophons und Mikrophons von Berliner.

Der Secretär.

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:	Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert & Co., Kommandit-Gesellschaft, Nürnberg. (2/8)	Fabrik elektrischer Maschinen für Beleuchtung, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.
Hartmann & Braun, Bockenheim-Frankfurt a/M.	Elektrische und magnetische Messinstrumente. Vollständige Einrichtungen von Laboratorien.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

SCHUCKERT & Co.,

Kommandit-Gesellschaft,

Nürnberg.

Elektrische Maschinen für Hand- und Maschinenbetrieb. (1/8)

Anerkannt vortheilhafte Konstruktion für Lehrzwecke.



(11)

Bestellungen auf **Meyers Konversations-Lexikon** nehmen alle Buchhandlungen entgegen.



Volt- & Ampèremeter

HARTMANN & BRAUN, BOCKENHEIM-FRANKFURT a/M.

Voltmeter für electrische Lichtbetriebe
mit grossen Intervallen an der Gebrauchsstelle, oder mit ziemlich gleichmässiger Scale in verschiedenen Aichungen.

Voltmeter als Controllinstrument für Monteure.

Einfachere Spannungszeiger für galvanoplastische Betriebe.

Ampèremeter in allen Aichungen bis 1000 Amp.

Einfache Stromzeiger bis 5, 10 und 25 Amp.

Electricitätszähler, Erdschluss- resp. Isolationsprüfer.

Messbrücken, Rheostaten u. Galvanometer für Werkstätte u. Montage.

Blitzableiter-Untersuchungsapparate.

Trocken-Elemente, eigene Construction, für alle Zwecke vorzüglich geeignet.

Preislisten mit Abbildungen zur Verfügung.

(4/8)

XXVI. Band. 9. Heft.

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 9. Heftes.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1890.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Ueber die Art der Elektriciätsleitung im Lichtbogen [1]).

Von

H. Luggin.

Die experimentellen Behelfe zur Durchführung dieser Arbeit stammten zum bedeutendsten Theile aus dem physikalischen Institute, dessen Vorstand, Herr Hofrath Stefan, mir die Mehrzahl der erforderlichen Apparate und Vorrichtungen zur Verfügung stellte; ich bin aber auch noch nach anderen Seiten hin zu grösstem Danke verpflichtet. Die Versuche erheischten nämlich eine sehr bedeutende Stromquelle, welche mir im Sommer des vergangenen Jahres in einer Accumulatorenbatterie von 80 Volt Spannung (dieselbe diente im städtischen Rathhause zu Beleuchtungszwecken) geboten wurde; dort stellte mir auch Herr Ingenieur Klose seinen Messraum und mehrere Instrumente freundlichst zur Verfügung. Vom Anfange dieses Jahres an konnte ich durch mehrere Monate im technologischen Museum, in den Messräumen des Herrn Prof. Schlenk, mit Maschinenströmen arbeiten und genoss dabei in so mancher Beziehung überaus liebenswürdige Unterstützung von Seiten des genannten Herrn. Als der elektrische Beleuchtungsbetrieb des technologischen Museums wegen vorgerückter Jahreszeit eingestellt wurde, gestatteten mir Herr Regierungsrath v. Waltenhofen im elektrotechnischen Institute des Polytechnikums und Herr Prof. v. Lang, im physikalischen Cabinete, die Vornahme einiger letzter Versuche.

1. Schon der erste Anblick des Lichtbogens erinnert an einige von jenen elektrokinetischen Vorgängen, welche man mit dem Ausdruck der Gasentladungen zusammenfasst. Bei näherer Betrachtung scheint noch eine ganze Reihe das Lichtbogenphänomen begleitender Umstände für innige Verwandtschaft mit der genannten Erscheinungsklasse zu sprechen: so z. B. die Zerstäubung und Convection des Elektrodenmaterials, die Verschiedenheit der Arbeitsleistung beim Aus- und Eintritt des Stromes, das an elektrische Ventilwirkung gemahnende Verhalten

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus den Wiener Sitz.-Ber. Bd. 98 (1889).

beim Uebergang von Wechselströmen zwischen ungleichen Elektroden und dazu noch die geringe Abhängigkeit der Spannung von der Stromstärke, welche sich im Entladungsgesetze kundgibt.

Wenn man diese Aehnlichkeiten insgesammt ins Auge fasst, so dürfte das Bestreben nach Erweiterung der Analogien nicht aussichtslos erscheinen und auch das Bemühen, die Gesetze des Lichtbogens durch ähnliche Beziehungen bei Gasentladungen zu erläutern, dürfte seine Rechtfertigung finden. (Siehe besonders die von Stenger gezogene Parallele zwischen Lichtbogen und Glimmentladung [1]).

Auf solche Erwägungen gestützt, erblickt Wiedemann [2]) im Lichtbogen lediglich eine äusserst rasche Aufeinanderfolge getrennter Entladungen und versucht auf Grund dieser Annahme das Edlund'sche Spannungsgesetz zu erklären. Um diese Anschauung zu erhärten, unternahm Lecher eine Reihe von Versuchen, welche für Platin und Eisenlichtbogen heftige Potentialschwankungen erwiesen [3]).

Bei der vorliegenden Untersuchung hatte ich vor allem das Bestreben, die Dichtigkeit in den Lichtbogen einfliessender Ströme zu variiren und gleichzeitig die Veränderung der Spannungsverhältnisse an den betreffenden Eintrittsstellen der Ströme wahrzunehmen, um aus einer derartigen Erweiterung des Entladungsgesetzes zu neuen Vergleichspunkten mit irgend welchen Gasentladungen zu gelangen. Es musste mir im Verlaufe der Untersuchung auffallen, dass an der Anode ausserhalb des eigentlichen Kraters, aus welchem die Elektricität in grosser Dichtigkeit und unter mächtiger Licht- und Wärmeentwicklung strömt, noch eine weitere leitende Zone existirt, welche den Uebergang beträchtlicher Elektricitätsmengen allerdings in wesentlich geringerer Dichte vermittelt. Diese Thatsache führte mich zum Schlusse, dass der Lichtbogen Schauplatz zweier verschiedener Entladungsvorgänge ist, welche von ganz verschiedenen Gesetzen beherrscht werden; über die Art dieser Gesetze vermag ich leider nur einige wenige qualitative Angaben zu machen.

2. Bei den nun folgenden Versuchen sowie bei allen übrigen, wo nicht ausdrücklich Anderes angegeben wird, diente ein d'Arsonval-scher Multiplicator mit objectiver Ablesung als einziges Messinstrument. Der Apparat wurde durch Wippen abwechselnd in verschiedene Widerstandscombinationen eingefügt und man mass nun, derart auf passende Empfindlichkeit gebracht, entweder in directer Weise alle Potentialdifferenzen, welche zu ermitteln waren oder indirect die Stromstärken, indem er die Spannung an den Enden eines stromdurchflossenen 0,001

1) Wied. Ann. Bd. 25, 1885.

2) Elektricität und Magnetismus, Bd. 4, S. 855.

3) Wiener Ber. Bd. 95, 1887.

Ohmseils angab. Zu Zwecken der Spannungsmessung war der Multiplicator in eine Widerstandscombination von mehr als 100,000 Ohm eingefügt, so dass allfällige Uebergangswiderstände verschwinden mussten. Bei der Raschheit, mit welcher die aperiodischen Anschläge des Multiplicators erfolgen, war es möglich, alle Ablesungen in kurzer Aufeinanderfolge zu erledigen.

3. Die Beschaffenheit des Potentialabfalls längs des Lichtbogens wurde bereits mehrfach in der Weise untersucht, dass das Potential eines in den Lichtbogen tauchenden Probirstiftes ermittelt und dann auf das Potential des Bogengases um den Stift geschlossen wurde. Dabei bediente sich Lecher [1]) eines Elektrometers; ich [2]) wandte eine Brückenmethode und Uppenborn [3]) das Spannungsgalvanometer an. Die derart gewonnenen Resultate liessen mir eine eingehendere Untersuchung der Fehlerquellen bei der Messung und insbesondere der Unterschiede in der Potentialvertheilung, die innerhalb eines und desselben Lichtbogenquerschnittes gefunden werden, wünschenswerth erscheinen. Es waren schon in vorhinein recht complicirte Verhältnisse zu erwarten. Eine derartige Untersuchung lässt wenigstens die Vergleichbarkeit verschiedener Resultate beurtheilen, dem absoluten Werthe nach bleiben dieselben immer unsicher, da man den Betrag der Spannungsdifferenz zwischen dem Probirstift und dem umgebenden Bogengase nicht ermitteln kann. Uebrigens dürfte dieser Unterschied in den Potentialen nicht sehr gross sein, da der Abstand eines dünnen Stiftes von der Lichtbogenachse für die Grösse seines Potentials ziemlich belanglos ist und an der Oberfläche eines Stiftes, der nur in die Aureole reicht, denn doch keine gar sehr hohen thermoelektrischen oder contactelektromotorischen Kräfte wahrscheinlich sind.

Wenn ein Stift in den Lichtbogen Ströme seitlich überführt, oder wenn er aus ihm Ströme empfängt, so vermitteln vor allem jene Stellen seiner Oberfläche, welche am weitesten in den Lichtbogen hineinragen, den Uebergang der Elektricitäten (siehe unter 18); das Potential eines Stiftes wird also in bedeutendem Masse durch das Potential der Bogengase, welche jene tief eingesenkten Stellen des Stiftes umgeben, bestimmt.

Nun kann man am normalen (d. h. nicht zischenden) Lichtbogen drei Theile: das hellleuchtende Lichtbogeninnere oder den Lichtbogenkern, den dunkleren umgebenden Flammenmantel und die meist grün gefärbte Aureole unterscheiden; darnach lässt sich die Stellung des

1) Wiener Ber. Bd. 95, 1887.
2) Wiener Ber. Bd. 96, 1887.
3) Centralblatt für Elektrotechnik, Bd. 10, 1888.

Probirstiftes wenigstens einigermassen charakterisiren, je nachdem er nämlich in den ersten, zweiten oder dritten dieser Theile ragt.

Will man den Einfluss der Stellung eines Stiftes auf sein Potential studiren, so empfiehlt es sich, zwei gleich starke Stifte gleichzeitig in unterschiedlichen Lagen in den Lichtbogen zu tauchen und ihre Potentiale zu vergleichen. Ich wählte zunächst zwei Stifte von etwa 1,2 mm Stärke, welche durch ein zwischengelegtes Brettchen in etwa 4 mm Abstand einander parallel erhalten wurden, und brachte sie in horizontale Lage und in ein und derselben Höhe in einen vertical gestellten Lichtbogen, so dass nur der Unterschied ihrer Abstände von der Bogenachse in ihrer Potentialdifferenz zum Ausdrucke kam. Die Stifte spitzten sich im Lichtbogen sehr fein zu, sie bestanden wie immer bei diesen Untersuchungen, aus harter Carré'scher Kohle. Die Lichtbogenelektroden wurden stets durch Siemens'sche Kohlen und zwar diesmal aus Homogenkohle (N 12 mm als Anode oben und N 12 mm als Kathode unten) gebildet. Zwischen ihnen brannte der Lichtbogen bei 16 Ampère mit einer Länge von 8 mm.

Die Stifte wurden zunächst in den tiefsten Querschnitt des Lichtbogens gestellt und zwar so, dass der eine möglichst nahe am Lichtbogenkern vorbeiging, dann war sein Potential meist um 3 Volt niedriger als das des anderen Stiftes, der nur in die äusseren Partien des Flammenmantels reichte; ein derartiges Resultat konnte schon im vorhinein erwartet werden, da sich der Lichtbogen vom hellen Glutfleck an der Kathode aus zunächst kegelförmig verbreitert und die Niveauflächen des Potentials infolge dessen schaalig um diese Stelle gelagert sind.

Für höher gelegene Querschnitte des Lichtbogens ergaben diese Versuche ein umgekehrtes Verhältnis. Wenn die Stifte sich in halber Höhe des Lichtbogens befanden und der eine bis in das Lichtbogeninnere zu ragen schien, während der andere nur bis in die äusseren Theile des Flammenmantels drang, so war das Potential des ersteren, tiefer eingesenkten durchschnittlich um zwei Volt höher als das des zweiten. In ganz derselben Weise wird für Stifte, welche dicht unterhalb der Anode stehen, die Potentialdifferenz Anode—Stift, dann kleiner gefunden, wenn der Stift mit seiner Spitze erst unterhalb der centralen Partien der Anode endet, als dann, wenn er nicht so tief eindringt. Ich bemerke hier, dass an der Endfläche der Anode zwei Regionen, nach welchen sich die Stellung der Stiftspitze wenigstens einigermassen charakterisiren lässt, zu unterscheiden sind; eine Kernzone von höchster Glut, in welcher die Kraterbilduug vor sich geht, und eine Ringzone, deren Temperatur und Leuchtkraft geringer ist und welche ich die Glutzone nennen will.

Das Potential eines dünnen Stiftes, der — nicht allzunahe der Kathode — mit seiner Spitze bis in den Lichtbogenkern eingesenkt wird, ist also höher als das eines anderen gleich dünnen Stiftes, der im selben Querschnitt des Lichtbogens steht, aber mit seiner Spitze bereits im Flammenmantel endigt. Diese Verschiedenheit des Verhaltens könnte entweder in einem Potentialabfall vom Lichtbogenkern gegen den Lichtbogenmantel hin begründet sein oder es könnten auch entsprechende contactelektromotorische und thermoelektrische Kräfte vom heisseren, (tiefer eintauchenden Stift) durch das Galvanometer hindurch gegen den kühleren (weiter ausserhalb befindlichen) wirken; im letzteren Falle müsste man auch im Lichtbogen selbst wegen des ungeheuren Temperaturunterschiedes zwischen Anode und Kathode eine entsprechende thermoelektrische Gegenkraft annehmen. (Siehe unten 15.)

Uebrigens wird sich der tiefer eintauchende Stift auch in höherem Masse an der Ueberleitung des Stromes betheiligen und dabei an der oberen der Anode zugekehrten Seite gewissermassen als Kathode und an der unteren Seite als Anode fungiren, auch davon könnte man eine Erhöhung des Stiftpotentiales erwarten, es ist aber auffallend, dass dickere Stifte, bei denen dies noch mehr hervortreten müsste, nicht nur kein höheres, sondern sogar bedeutend niedrigeres Potential aufweisen. Stifte von ursprünglich 4 mm Stärke, deren Dicke aber durch Verbrennung bedeutend abgenommen hatte, die bis in den Lichtbogenkern zu tauchen schienen, zeigten ein um 7,3 Volt niedrigeres Potential als ganz dünne Stifte, die nur bis in den Flammenmantel drangen. Dieser Einfluss der Stiftdimensionen macht sich viel weniger geltend, wenn die Stifte nur in den Flammenmantel des Lichtbogens, woselbst die Stromdichtigkeit viel geringer ist, eindringen. (Ich will hier gleich im vorhinein, bemerken, dass wenn im Folgenden dickere Stifte bei Potentialmessungen in Verwendung kommen, diese Stifte niemals bis in den Lichtbogenkern hineinreichten oder daran dicht anzuliegen schienen.)

Dickere Stifte pflegten übrigens auch auf das Brennen des Lichtbogens eine störende Wirkung zu üben, man braucht nur durch die Aureole hindurch tiefer in den Flammenmantel hineinzufahren, um zu bemerken, dass der Lichtbogenkern dem Stifte auszuweichen strebt. Besonders dann, wenn ein verhältnismässig geringer Qerschnitt der Anode dies Streben behindert, macht sich ein Steigen der Spannung bemerkbar; man kann den Lichtbogen durch Einschieben des Stiftes zum Singen und schliesslich zum Zischen bringen. Selbst dann, wenn die Spitze eines Stiftes in den Lichtbogenkern eindringt, unterbindet sie noch in einem gewissen Grade den Hauptstrom und falls der Stift

nur um ein paar Millimeter von der Anode absteht, hebt sich ein ziemlich scharf umrissenes Schattenbild seiner Spitze vom unvergleichlich hellen Krater ab und zeigt, dass die Stromfäden fast durchgeschnitten sind.

Bei den vorher beschriebenen Versuchen diente, wie bereits angegeben, Homogenkohle als Anode, das Verhalten wird anders, wenn man anstatt derselben Dochtkohle wählt. Probestifte von 4 mm Stärke, welche verschieden tief in ein und denselben Querschnitt des Lichtbogens eindrangen, wiesen dann stets nur ganz geringfügige Potentialdifferenzen auf. Ein so wesentlich verschiedenes Verhalten, an einen scheinbar geringfügigen Materialunterschied geknüpft, lässt grosse Ungewissheit und Unsicherheit empfinden, wenn es sich darum handelt, ob mit einem Wechsel des Elektrodenmaterials die absoluten Werthe des Lichtbogenpotentials oder nur die Wechselwirkung von Stift und Lichtbogengas geändert wurde [1]). Ich muss übrigens bemerken, dass Verschiedenheit des Materials auch Verschiedenheit im Aussehen des Lichtbogens bedingt. (Siehe unter 10.).

4. Ich gehe nun zur Untersuchung eines vertical gestellten, normalen, d. h. nicht zischenden Lichtbogens über und zwar ist zunächst die Potentialvertheilung längs eines Bogens, der zwischen Siemens'scher Homogenkohlen (Sorte N 12 mm) mit 15,5 Ampère brannte, zu beschreiben; die Anode des Bogens befand sich (wie immer, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird) über der Kathode.

Zunächst wurden die Potentialsprünge, welche an den Oberflächen der Elektroden statt haben, gemessen. Den einen von ihnen, welcher das Potential von Anode und Lichtbogen trennt, will ich künftig der Kürze halber, und um keinerlei Annahme über eine Ursache zu machen, als das Anodenhindernis H_+ bezeichnen, während der Potentialabfall an der Kathode das Kathodenhindernis H_- benannt werden soll.

Zur Messung von H_+ bediente ich mich eines horizontal gestellten Probirstiftes von ursprünglich 1,3 mm Stärke, der sich dicht unterhalb der Anode befand und dessen Spitze, durch den Flammenmantel des

1) Ich will an dieser Stelle eine ungerechtfertigte Verallgemeinerung berichtigen, die sich in meiner früheren Arbeit (siehe Citat) vorfindet. Ich bemerke nämlich dortselbst, dass ganz kurze Lichtbögen mit nur 25 Volt, also unter wesentlich herabgesetzter Spannung brennen. Ich habe ein solches Verhalten neuerdings und sogar bei grossen Stromstärken (16 Ampère) aber nur für Dochtkohle constatiren können; bei Homogenkohle sank die Spannung nicht unter 40 Volt und vor der Berührung der Elektroden trat Zischen ein. Das Verhalten der Dochtkohle mag mit dem erhöhten Salzgehalt der Bogengase, welche bei geringem Elektrodenabstand von Luftströmungen langsamer fortgeführt werden, zusammenhängen.

Lichtbogens hindurchragend, erst unterhalb des eigentlichen Kraters endete. Bei solcher Anordnung erhielt ich aus 5 Messungen $H_+ =$ 33,7 $\pm$ 0,46 Volt.

Die Bogenlänge, welche bei diesen Versuchen sehr stark variirte, schien keinen Einfluss auf die Werthe von H_+ zu haben.

Bei der nun folgenden Messung des Kathodenhindernisses H_- tauchte der wieder horizontal gestellte Stift möglichst tief in den Lichtbogen und stand mit seiner Spitze dem hellen Glutfleck an der Kathode möglichst nahe. Sechs Messungen ergaben $H_0 = 8{,}78 \pm 0{,}17$ Volt. Uppenborn[1]) erhielt ebenfalls durch Messungen mittels eines Probirstiftes für Dochtkohle-Lichtbögen $H_+ = 32{,}5$ Volt und $H_- = 5{,}2$ Volt.

Nach meinen Messungen würden Anoden- und Kathodenhindernis zusammen 42,5 Volt für den von der Bogenlänge unabhängigen Theil der Spannung ergeben, ihre Differenz, welche ich die Einseitigkeit E der Potentialvertheilung nennen will, beträgt $E = 24{,}9$ Volt. Unter Voraussetzung eines ganz gleichmässigen Potentialgefälles im Lichtbogen selbst, könnte diese Einseitigkeit auch noch in anderer Weise ermittelt werden. Stellt man nämlich den Stift in den mittleren Querschnitt des Lichtbogens und misst einerseits die Potentialdifferenz v zwischen der Anode des Lichtbogens und dem Stift und anderseits die Spannungsdifferenz S zwischen den beiden Elektroden, so ist unter obiger Voraussetzung $E = v - (S - v) = - S + 2v$. Wenn das Potential des Stiftes um einen Betrag dv von dem der umgebenden Bogengase abweicht, so wird der Werth von E um $2\,dv$ fehlerhaft.

Bei Anwendung dieser Methode wurde immer erst v dann S und schliesslich wieder v bestimmt. Die Probestifte hatten ursprünglich 4 mm Stärke, spitzten sich aber im Lichtbogen so sehr zu, dass sie daselbst nirgends 2 mm stark sein mochten. Die Spitze des Stiftes kam nur in die äusseren Theile des Flammenmantels des Lichtbogens zu liegen; angesichts der nicht unbeträchtlichen Querschnittsdimension wäre das mittlere Potential des Stiftes bei tieferem Eindringen in den Lichtbogen zu niedrig und v daher erheblich zu gross ausgefallen. Aber auch so ist noch eine gewisse Unsicherheit vorhanden, wegen deren auf die Uebereinstimmung der nachfolgend mitgetheilten Werthe von E mit dem früher ermittelten Werthe ($E = 24{,}9$ Volt) kein zu grosses Gewicht gelegt werden darf. Als ich erkannte, dass bei Homogenkohle eigentlich immer mit ganz dünnen Probestiften gemessen werden sollte, war eine Widerholung der Versuche nicht mehr möglich. Ich erhielt bei 16,8 Ampère mittlerer Stromstärke für

1) Centralblatt f. Elektrotechn. Bd. 10, 1888.



$S = 49{,}4$ Volt	$E = 24{,}5$ Volt
$S = 53{,}8$ „	$E = 25{,}8$ „
$S = 65{,}2$ „	$E = 25{,}6$ „

Die annähernde Uebereinstimmung in den Werthen für E deutet darauf hin, dass die Potentialdifferenz zwischen der Anode und dem mittleren Querschnitt des Lichtbogens und die Potentialdifferenz zwischen der Kathode und eben diesem Querschnitt beide bei wachsender Bogenlänge ungefähr gleich stark zunehmen.

Ein solches symmetrisches Anwachsen des Potentials bei wachsender Bogenlänge wird nur für homogene Elektroden gefunden, als ich Dochtkohle (*Do* 12 mm) als Anode über einen Stab (*N* 12 mm) als Kathode stellte und das mittlere Potential des Lichtbogens mittels eines Probirstiftes bestimmte, so ergab sich bei 17 Ampère Stromstärke für

$S = 44{,}9$ Volt	$E = 28{,}3 \pm 0{,}24$
$S = 51{,}4$ „	$E = 29{,}6 \pm 0{,}61$
$S = 55{,}2$ „	$E = 30{,}3 \pm 0{,}29$
$S = 58{,}7$ „	$E = 31{,}4 \pm 0{,}40$
$S = 64{,}8$ „	$E = 34{,}4 \pm 0{,}54.$

Bei diesen Versuchen wurde die Einstellung des Stiftes in die Lichtbogenmitte ohne alle Messung besorgt, während bei den unmittelbar vorher mitgetheilten ein Bild von Stift und Lichtbogen gleichzeitig auf die transparente Scala eines Flammenmaasses geworfen und hernach der Stift so lange verschoben wurde, bis sein Bild von jeder der beiden Elektroden um gleichviel Scalentheile entfernt zu sein schien. Ich habe mich überzeugt, dass die Einstellung des Stiftes ohne Flammenmass nicht schlechter gelingt als mit einem solchen.

Die vorstehenden Versuche lassen sich so deuten, dass bei Dochtkohle der Potentialabfall in der oberen Hälfte des Lichtbogens grösser ist als in der unteren, damit würde noch ein anderes Experiment übereinstimmen. Es wurden zwei Stifte (2 mm stark) einander parallel zu beiden Seiten eines horizontalen, 3 mm starken Brettchens befestigt und so in einem constanten Verticalabstande erhalten. Dieses Stiftepaar tauchte in einen verticalen Lichtbogen, der bei 20 Ampère Stromstärke zwischen (*Do* 18 mm) als Anode und (*N* 12 mm) als Kathode mit 1,4 cm durchschnittlicher Bogenlänge brannte. Je nachdem nun das Stiftepaar, welches in das Lichtbogeninnere selbst einzudringen schien, im oberen oder unteren Theile des Lichtbogens, d. h. je nachdem es der Anode oder der Kathode näher stand, wiesen die Stifte 12,4 oder 8,05 Volt Potentialdifferenz auf. Die sehr langen Bögen brannten ruhig mit einem scharf umränderten Krater, sie waren aber

dem Aussehen nach schon darin verändert, dass die Aureole meist im oberen Theile in eine natriumgelbe Flamme ausartete, welche seitlich an der Anode emporschlug. (Siehe unter 10.)

Es erscheint befremdlich, dass der Werth der Einseitigkeit gerade bei Dochtkohle grösser gefunden wird, als bei Homogenkohle, woselbst ähnlich grosse Werthe nur dann zu erlangen sind, wenn ein verhältnismässig dicker Stift dicht an den Lichtbogen herangerückt ist, so dass sein Potential angesichts seiner bedeutenden Querschnittsdimension herabgedrückt wird. Für diese Verschiedenheit der E, welche durch einen scheinbar geringfügigen Materialunterschied herbeigeführt wird, gebe ich noch ein weiteres Beispiel. Ich erhielt bei 55 Volt mittlerer Spannung und 16,2 Ampère Stromstärke, während immer ein und dieselbe Kathode (N 12 mm) in Verwendung stand unter Anwendung eines Probirstiftes, von ursprünglich 4 mm Stärke für

(Do 18 mm) als Anode $E = 32{,}1 \pm 0{,}20$ Volt
(N 20 mm) „ „ $E = 22{,}5 \pm 0{,}25$ „
(N 20 mm auf 12 mm abgedreht $E = 24{,}7 \pm 0{,}34$ „

Für diesen Unterschied kann nicht etwa eine Verschiedenheit in den Werthen des Anodenhindernisses als Erklärungsgrund angeführt werden, denn während im Früheren für homogene Elektroden $H_1 = = 33{,}7 \pm 0{,}46$ Volt gefunden wurde, erhielt ich für (Do 12 mm als Anode und (N 12 mm) als Kathode bei 49 Volt Spannung und 14,5 Ampère Stromstärke $H_1 = 34{,}4 \pm 0{,}25$ Volt, wenn die Spitze des dicht unter der Anode stehenden Stiftes (4 mm Stärke) bis unter einen Punkt des hellleuchtenden Kraterbodens reichte. Wenn die Spitze bereits unterhalb eines Punktes der ringförmigen Glutzone um den Krater endete, erhielt ich $36{,}9 \pm 0{,}16$ Volt; als die Spitze des horizontal gestellten Stiftes bis an einen Punkt der Seitenfläche der Anode, welcher sich noch innerhalb der Aureole befand, reichte, wurde $H_+ = = 35{,}9 \pm 0{,}39$ Volt gefunden. Das Hindernis wird also auch für Dochtkohle in den centralen Partien der Anode kleiner gefunden als in der Ringzone.

5. Das Vorhergehende bestätigt die Regel, dass das Anodenhindernis, d. h. die Potentialdifferenz zwischen der Anode und dem angrenzenden Bogengas für lange und kurze Bögen in erster Annäherung constant ist; auch schwankt bekanntlich diese Potentialdifferenz (siehe unter 20), wenn der Strom einmal einen gewissen Betrag erreicht hat, bei einer weiteren Erhöhung seiner Intensität nur wenig, so lange die Stromesdichtigkeit nicht Beträge erreicht, bei denen Zischen eintreten muss. Diese Regeln gelten nicht nur für axiale Ströme, sondern auch dann, wenn der Strom unter sehr bedeutenden Schwankungen aus seitlich in den Lichtbogen ragenden Stiften in

das Bogengas überfliesst, bleibt der Potentialsprung Kohle-Lichtbogen auf derselben Grössenordnung[1]). Ein horizontal gestellter Stift *a* (Carrékohle 4 mm) stand, mit der Spitze bereits ein wenig in das Lichtbogeninnere ragend, in halber Höhe des vertical gestellten Bogens, der während der Versuche mit nahezu constanter Intensität von 16 Ampère zwischen Homogenkohlen (*N* 12 mm) brannte. Der Stift *a* war abwechselnd isolirt und von Strömen von 2,5 und dann von 8,2 Ampère durchflossen, hernach wurde er wieder isolirt; in diesen verschiedenen Zuständen wurde sein Potential mit dem eines zweiten in derselben Höhe in den Lichtbogen tauchenden, isolirten Stiftes *b* verglichen. Das Einleiten der Ströme von 2,5 und 8,2 Ampère hob das Potential des früher isolirten Stiftes *a* durchschnittlich um 34 bezw. 40 Volt. Es muss hier noch bemerkt werden, dass diese beiden Werthe etwas zu hoch gemessen sind; denn da der Stift (wenn auch mit ziemlich dünner Spitze) bis in das Lichtbogeninnere drang, so musste sein Potential ursprünglich, als er noch isolirt war, zu niedrig gefunden werden; allerdings kann der Fehler durchaus nicht so bedeutend gewesen sein, wie bei dem betreffenden Beispiele in 3, wo der Einfluss der Stiftdichte absichtlich an einem ganz extremen Fall illustrirt wurde. Andererseits dürfte sich am Werthe (34 Volt) bei der geringeren Intensität des seitlichen Stromes (2,5 Ampère) bereits eine Herabsetzung des Potentialsprunges infolge herabgesetzter Stromesdichtigkeit bemerkbar machen. (Siehe unter 6.)

Ein ähnlicher Fall, bei dem auch ein bedeutender Strom, 5,2 Ampère, durch einen Stift (4 mm) seitlich in den Lichtbogen überfloss und das Potential des Stiftes um 37,5 Volt erhöhte, ist unter (18.) beschrieben. Der Einfluss der Stiftdicke muss dabei in geringerem Grade hervorgetreten sein, da der Stift, so lange er isolirt war, nicht in die heissesten Theile des Lichtbogens ragte und erst später, nach Messung seines Anfangspotentials, in den Kern des Lichtbogens eingeschoben wurde.

Vorhin (4) wurde bei homogenen Elektroden das Hinderniss H_+ für axiale Ströme zu 33,7 Volt angegeben, dieser Potentialsprung ist von dem bei seitlich eintretenden Strömen constatirten nicht wesentlich verschieden.

Ich ergänze diese Fälle durch einen anderen, wo eine zischende Entladung von grösster Heftigkeit innerhalb des Hauptlichtbogens hervorbrach und die Spannung dieses Lichtbogens doch nicht erheblich stärker beeinflusste, als bei einer entsprechenden Intensitätsvermehrung

---

1) Ich benütze diese Gelegenheit, Herrn Assistenten Dr. Kusminsky zu danken, der mich bei einigen dieser Versuche hilfreich unterstützte.

des aus der Anode austretenden Stromes der Fall gewesen wäre. Ein horizontaler Stift (4 mm Carré) wurde mit seiner Spitze bis dicht an den Kern einer vertical gestellten Lichtbogens, der von seiner Anode einen constanten Strom von 16 Ampère bezog, geführt. In der Regel flossen 3,5 Ampère durch den seitlichen Stift in den Lichtbogen ab, für Augenblicke wurde aber der Strom auf 16,4 Ampère erhöht. Diese so grosse Veränderung und Verstärkung der seitlich eintretenden Entladung hatte nur eine Verminderung der Spannung von 59,5 auf durchschnittlich 53,7 Volt zur Folge.

6. Während bedeutende Ströme immer unter Ueberwindung eines nahezu constanten Anodenhindernisses in den Lichtbogen übertreten und dies Verhältnis nach oben hin erst dann eine wesentliche Aenderung erfährt, wenn der Lichtbogen, im Austritt bedeutend eingeengt, zu zischen beginnt, lässt sich durch Verminderung der Stromstärke alsbald ein Punkt erreichen, von dem an das Hindernis rasch abnimmt, um später mit den Strömen zugleich auf Null zu sinken. Schon Edlund[1] macht die Bemerkung, dass ein Lichtbogen unter verminderter Intensität mit verminderter Spannung (allerdings wahrscheinlich nicht ganz geräuschlos) brannte.

Da aber ein Lichtbogen schon bei 4 Ampère leicht erlischt, studirte ich statt der Hauptentladung eine Nebenentladung, welche seitlich in einen starken Lichtbogen einfloss. Bei der hohen Temperatur, welche der seitlich eintauchende Stift schon an sich im Lichtbogen aufweist, erwuchs mir der weitere Vortheil, dass die Erwärmung durch die schwächeren, seitlich einfliessenden Ströme den Gang der Erscheinung weniger beeinflusste.

Die Resultate, welche ich hier mitzutheilen habe, an sich nur von qualitativem Werthe, schliessen sich leider nicht vollkommen einheitlich an die unmittelbar vorher gegebenen an. Unkundig der wesentlichen Veränderungen, welche die Erscheinungen des Lichtbogens in mancher Hinsicht durch verdampfende Salze erleiden, hatte ich als Anode Siemens'sche Dochtkohle (*Do* 10 mm) zur Erzeugung des horizontal stehenden Lichtbogens verwendet und als Kathode Siemens-sche *J*-Kohle von gleicher Stärke, deren Salzgehalt so bedeutend ist, dass der Lichtbogen mit wesentlich verringerter Spannung brennt. Eine vollständige Wiederholung der Versuche war später nicht mehr möglich, doch verschaffte ich mir, ohne Messungen anzustellen, die Sicherheit, dass wenigstens der allgemeine Charakter der Erscheinung, das continuirliche und rapide Anwachsen des Hindernisses beim allmählichen Ansteigen des Stromes auch bei Homogenkohle derselbe bleibt.

---

1) Edlund, Pogg. Ann., Bd. 131, S. 586.

Der Lichtbogen brannte, wie gesagt, zwischen horizontal gestellten Elektroden mit etwa 4 mm Länge, sein Kern war schwach nach oben gekrümmt und sass nicht in der Achse des Flammenmantels, welcher durch den aufsteigenden Luftstrom in die Höhe getrieben, auf seiner oberen Seite bedeutend erweitert und ausgebaucht war. Gleichfalls in horizontaler Lage, etwas oberhalb der Lichtbogenachse und im Kreuz zu ihr, stand ein Stift aus Carrékohle (5 mm); mit der Spitze etwas über den Lichtbogen vorschauend, schien er mit ihm einen hell glühenden Berührungspunkt gemein zu haben. An dieser Glutstelle brannte der Stift rascher ab als in den übrigen Theilen, so dass sich sein äusserstes Ende alsbald pfriemenförmig nach abwärts bog; oft schien eine feine halbzirkelige Baumbildung den Lichtbogen umklammern zu wollen.

Wenn ich den Stift durch einen Widerstand mit der Anode des Lichtbegens verband, so floss nur mehr ein Theil des Gesammtstromes direct durch die Anode in den Lichtbogen, der andere Teil wurde durch die neugeschaffene Zweigleitung seitlich dem Lichtbogen übermittelt. Der Lichtbogen behält bei solcher Massnahme seine Spannung fast unverändert bei und da er die Batterie sammt ihrem Zusatzwiderstande zu einem geschlossenen Stromkreise ergänzt, so erfährt der Batteriestrom keine Veränderung. Ich will nun, ohne an dieser Stelle (siehe diesbezüglich 18) auf die Messmethode einzugehen, einige Resultate angeben, die bei der geschilderten Anordnung von Lichtbogen und Zuleitungsstift für eine bestimmte Form, Grösse und Stellung des Stiftes gewonnen wurden.

	1	2	3
J	1,33	2,60	3,54
H_t	2,20	7,71	18,5
$W = \frac{H_t}{J}$	1,73	2,97	5,23

Jede Colonne der vorstehenden Tabelle enthält zusammengehörige Werthe; die erste Zeile gibt die Stromstärken J in Ampère, die zweite die entsprechenden Hindernisse in Volt; wollte man diese Hindernisse durch Uebergangswiderstände zwischen Stift und Bogengas hervorgerufen denken, so müssten dieselben die in Zeile 3 der Tabelle angegebenen Werthe haben. Das Resultat der Tabelle erfährt in der beistehenden Figur eine graphische Darstellung.

Wenn man die Oberfläche des Stiftes vergrössern würde, so könnte bei constant bleibendem Hindernis ein stärkerer Strom in den Licht-

bogen gelangen, wie ja z. B. zwei Stifte den doppelten Strom überzuführen vermöchten. Da das Hindernis sich derart als Function der Stromesdichtigkeit charakterisirt, ist es selbstverständlich, dass die Resultate der vorstehenden Tabelle nur von qualitativem Werthe sein können, sie gelten nur für jene specielle Form und Stellung der Stiftspitze, bei welcher sie gefunden wurden, und für Spitzen von anderer Grösse und Stellung werden sich auch wieder anders gekrümmte Curven ergeben als die dargestellte.

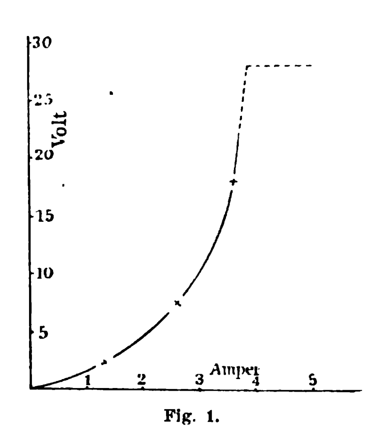


Fig. 1.

Es ist aber immer möglich, Stiftstellung, Form und Grösse der Spitze soweit ähnlich zu erhalten, dass man stets ähnliche Linien bekommt, welche vereint einen mittleren Zustand zur Darstellung bringen; thatsächlich ist auch die mitgetheilte Curve das Resultat einer solchen Vereinigung aus fünf Linien und zur Schätzung der erzielten Uebereinstimmung gebe ich an, dass die Mittel aus den Verhältnissen $\frac{W_1}{W_0}$ und $\frac{W_2}{W_0}$ wahrscheinliche Fehler von 4,5 % aufweisen.

7. Ich habe in der vorstehenden Figur versucht, die Curve noch über den Messbereich hinaus schematisch zu ergänzen: das Hindernis würde bei wachsender Stromstärke noch einige Zeit rasch zunehmen, um dann fast constant zu werden. Ich habe dieses Maximum der Spannungsdifferenz nur zu 28 Volt angenommen, da dieselbe im vorliegenden Falle durch den bedeutenden Salzgehalt des Lichtbogens jedenfalls sehr herabgesetzt ist; vom Knie an führte ich die Curve der Abscissenachse parallel weiter.

Eine rasche Aenderung im Charakter des Entladungsgesetzes liess sich leicht nachträglich für Homogenkohle erweisen: Der positive

Strom der Dynamomaschine floss durch einen Ballastwiderstand in den vertical gestellten Lichtbogen. In diesem Lichtbogen wurden zwei horizontale Stifte in gleicher Höhe eingesenkt und der eine durch einen ausziehbaren Rheostaten mit der Anode der Dynamomaschine verbunden, während das Spannungsgalvanometer die Potentialdifferenz der beiden Stifte verglich. Beim Nähern der Elektrodenplatten des Rheostaten bewegte sich die aperiodisch schwingende Nadel rasch und rascher, um bei einem gewissen Punkte angelangt — allerdings nicht plötzlich — ganz langsame Bewegung anzunehmen.

So lange der Stift wie bei den früher beschriebenen Anordnungen bis dicht an den Lichtbogenkern reichte oder wohl gar hineinzuragen schien, vermochte ich, während das Entladungsgesetz in der beschriebenen Weise wechselte, keinerlei plötzliche Aenderung im Aussehen der Entladungserscheinung selbst wahrzunehmen. Denn der Stift wies von Anfang an, da wo er den Lichtbogenkern berührte, bereits eine Stelle von äusserst heftiger Glut auf, und mit steigender Stromstärke nahm dieselbe scheinbar continuirlich an Intensität und Ausdehnung zu.

Es liess sich aber eine Anordnung treffen, bei welcher mit einer sprungweisen Aenderung des Stiftpotentials das Entladungsgesetz und das Aussehen der Erscheinung beide gleichzeitig wechselten. Ich verband den horizontal in halbe Höhe des Lichtbogens gestellten Stift durch einen Flüssigkeitsrheostaten mit der Lichtbogenanode und liess die Stiftspitze so weit durch die Aureole in den Flammenmantel ragen, dass sie nur durch eine dünne glühende Gasschicht vom Innersten der Strombahn getrennt war. Beim Nähern der Elektrodenplatten des Rheostaten stieg der seitlich einfliessende Strom auf Kosten des Hauptstromes und während infolge dessen die Glut des Stiftes immer höher wurde, stieg sein Potential rasch und näherte sich dem der Anode; da brach plötzlich an einer Stelle des Stiftes eine Lichterscheinung durch so hell und scharf umrandet, wie die am Krater, und im gleichen Augenblicke stürzte das Potential des Stiftes um einige Volt. Das Potential des Stiftes, welches vorher rasch angestiegen war, blieb nach der plötzlichen Abnahme ziemlich ruhig und mochte das Potential des mittleren Lichtbogenquerschnittes etwa um so viel übertreffen, als das der Hauptanode von dem des ihr angrenzenden Bogengases verschieden war. Wenn die beschriebene Lichterscheinung, die ich so wie den entsprechenden Vorgang im Krater der Hauptanode des Lichtbogens als das Kraterlicht bezeichnen will, einmal durchgebrochen war, so schien der Stift an der betreffenden Durchbruchstelle mit dem Lichtbogenkern zusammenzuhängen und der Sturz des Potentials mag lediglich dem Ausfall der trennenden Gasschicht zuzuschreiben sein.

Ich muss noch erwähnen, dass ich keinen solchen momentanen Wechsel, sondern nur raschen, aber allmählichen Uebergang gewahren konnte, wenn der Stift statt mit der Anode des Lichtbogens mit der Anode der Dynamomaschine verbunden war, dann konnte die seitlich einfliessende Stromstärke beim Sinken des Stiftpotentials nicht mehr so bedeutend zunehmen, da der Widerstand der zum Stift führenden Abzweigung jetzt bedeutend grösser war; es mag also das bedeutende Ansteigen der seitlichen Stromstärke beim Sinken des Stiftpotentials bedeutenden Antheil am brüsken Wechsel der Erscheinung gehabt haben.

Ich kann nach allem Gesagten nicht behaupten, dass der Gang, welcher der Potentialcurve in der vorhin gegebenen schematischen Darstellung zugeschrieben wird, auch wirklich einen ähnlich scharfen Wendepunkt aufweist, und es wäre möglich, dass die eigentliche Kraterlichterscheinung manchmal schon bei erheblich niedrigeren Potentialen auftreten kann, und dass die Spannungsdifferenz dann allmählich zum Werthe ansteigt, den das Hindernis an der Hauptanode eines Lichtbogens aufweist; ja wenn der in Rede stehende Entladungsvorgang wirklich ein periodischer ist, so müsste man für spärlichere Elektricitätsquellen sogar bei Anwesenheit von Kraterlicht ein kleineres Anodenhindernis erwarten [1]).

Wenn aber auch ein momentaner Wechsel des Entladungsgesetzes und ein momentanes und gleichzeitiges Auftreten einer besonderen Lichterscheinung nicht immer wahrgenommen werden konnten, so war doch wenigstens immer dann, wenn das Hindernis einmal seinen hohen Endwerth erreicht zu haben schien, am Stift eine ziemlich scharf umrandete Stelle bemerkbar, deren Lichtglanz sich von der Glut der Umgebung deutlich abhob.

8. Der Wandel im Charakter des Entladungsgesetzes knüpft sich also an das Auftreten eines neu hinzukommenden Entladungsvorganges, der, an einer besonders günstigen Stelle

---

1) Ich bemerke hier, dass Kraterlicht sehr häufig momentan auftaucht und dann wieder verschwindet, wenn man einen vorher isolirt in den Flammenmantel des Lichtbogens tauchenden Stift mit der Lichtbogenanode durch einen Widerstand verbindet.

Das eine Ende der primären Spirale eines sehr kleinen Ruhmkorff'schen Inductors war dauernd durch einen geringen Widerstand mit einem isolirt in den Flammenmantel des Lichtbogens tauchenden Stift verbunden. Wurde nun das andere Ende der primären Spirale an die Lichtbogenanode angelegt, so gab die Secundärspirale einen Schliessungsfunken, gleichzeitig war ein momentanes Aufblitzen von Kraterlicht am Stift bemerkbar; beim Abheben der Leitung wurde kein Oeffnungsfunken wahrgenommen. Das momentane Auftreten der Erscheinung hängt wahrscheinlich nur von einem äusserst rasch verflüchtigten Salzgehalt der Stiftspitze ab.

des Stiftes hervorbrechend, sich dortselbst durch intensivste Lichtentwicklung zu erkennen gibt.

In ihrer Entstehung und zu ihrem Fortbestande an sehr bedeutende Werthe des Potentialabfalles zwischen Kohle und Gas geknüpft, greift diese Entladung beim weiteren Anwachsen des Stromes um sich und regulirt so die Spannung.

Sie hat bei normalen Lichtbögen, welche zwischen gegenüberstehenden Elektroden brennen, den bedeutendsten Antheil an der Elektricitätsvermittlung und führt, vom Krater des Lichtbogens ausgehend, den Strom in solcher Dichtigkeit und infolge dessen unter so bedeutender Lichtentwicklung über, dass sie seit jeher als das wesentliche Phänomen im Lichtbogen erkannt wurde, ja dass sogar der andere Entladungsvorgang, welcher bei den schwachen seitlichen Strömen (6) die ausschliessliche Rolle spielte, obwohl nicht belanglos, übersehen wurde.

Diese letztere Erscheinung breitet sich rings um den Krater in einer hellen Glutzone bis dahin aus, wo die innere Begrenzungsfläche der Aureole in einer nicht immer gut sichtbaren Linie an der Anode des Lichtbogens anrandet.

Man kann einen Antheil dieser Glutzone an der Elektricitätsvermittlung auch ohne alle Messung ersehen. Unter Bedingungen nämlich, wie die meinen es waren, schloss sich die Aureole erst oberhalb des Kraterrandes an die Anode an, während sie in Kraterhöhe von der Anode noch so weit abstand, dass ich leicht die Spitze eines Stiftes in den Zwischenraum zwischen ihr und der Anode zu bringen vermochte, wurde nun der vorher isolirte Stift durch einen Kurzschluss mit der Anode verbunden, so erreichte seine vorher geringere Glut alsbald einen solchen Grad, wie ihn die Ringzone im Krater besitzt und die galvanometrische Messung ergab 1,1 bis 1,5, ja sogar 2,4 Ampère als Intensität des den Stift durchfliessenden Stromes. Gleicherzeit war die rasche Verbrennung des Stiftes auffallend, wie denn überhaupt starker Kohlenverbrauch in der ganzen Ausdehnung der Glutzone oft nachträglich bei Besichtigung des erkalteten Stiftes erkennbar ist.

So offenkundig nun auch der Durchgang von nicht unbedeutenden Strömen durch die Glutzone ist, so kann doch der ungeheure Unterschied der Arbeitsleistungen, welche der Strom pro Flächeneinheit im Krater und in der Glutzone vollbringt, nicht übersehen werden.

Diese blosse Thatsache der Verschiedenheit der pro Flächeneinheit geleisteten Arbeit und, da der Potentialsprung an der Anode gegen das Bogengas zu überall fast derselbe ist, also auch der Stromdichtigkeit, vermöchte, abgesehen von allem Vorhergehenden, die gleichzeitige

Existenz zweier verschiedener Entladungsvorgänge an der Anode zu erweisen.

9. Bevor ich des weiteren nach den Gesetzen der Entladungserscheinungen, welche von der Anode des Lichtbogens ausgehen, und nach Analogien mit anderen Gasentladungen frage, möchte ich noch ein paar Bemerkungen über die Structur des Lichtbogens als des Entladungsfeldes, durch welches sich die beiden Erscheinungen verbreiten, machen.

Stifte in beliebiger Stellung in den Lichtbogen gebracht und als Elektroden zur Einleitung bedeutender seitlicher Ströme benutzt, erglühen lebhaft, soweit sie durch die Aureole hindurch ragen, und, wenn sich die Aureole bei bedeutender Intensität des seitlich ausfliessenden Stromes gegen den Stift hin ausbaucht, so erfährt auch die Glutzone dortselbst eine entsprechende Erweiterung. Dergestalt ergibt sich für den ganzen Lichtbogen, soweit er von der Aureole umschlossen ist, ein bedeutendes Leitungsvermögen.

Strombahn und Aureole wechseln in ihrer Form je nach Material, Querschnitt und Stellung der Elektroden und auch mit der Stärke des durchfliessenden Stromes. Bei Homogenkohle (*N* 12 mm) — Anode oben und Kathode unten — und bei etwa 16 bis 20 Ampère Stromstärke, woran ich als bestimmten Fall denke, hatte die Innenfläche der Aureole die Form einer Glocke, welche auf der Spitze der Kathode aufsitzend, sich zuerst rasch, dann langsam erweitert, um sich schliesslich oberhalb des Kraters einzuschnüren und an die Anode anzuschliessen. Nach aussen hat die Aureole keine scharfe Begrenzung, und ihr grünlicher Lichtglanz verliert sich allmählich in dem dunklen Raum.

In der Strombahn selbst hebt sich der helle Lichtbogenkern, eine nach unten zu sich verjüngende Säule, welche den Krater mit der Kathode verbindet, vom umgebenden Gasmantel, der sogar der Aureole an Glanz nachsteht, auffallendst ab, ohne von ihm scharf und deutlich geschieden zu sein.

10. Schon bei einem solchen Lichtbogen zwischen salzfreien Elektroden lässt das Lichtbogeninnere bei genügender Bogenlänge in den mittleren Querschnitten geringere Leuchtkraft bemerken, als an den Enden. Ist ein solches Verhältnis in diesem Falle eben erst bemerkbar, so kann es für Dochtkohle nicht mehr übersehen werden, und bei noch weiterem Steigen des Salzgehaltes gewinnt die ganze Erscheinung geradezu ein verändertes Aussehen.

Wenn Dochtkohle (*Do* 18 mm) als Anode über der Kathode (*N* 12 mm) stand, so hatte der Lichtbogenkern bei 20 Ampère und für Längen von etwa 7 mm Birnform (einen solchen Fall hat schon

Uppenborn [1]) zu photographischer Darstellung gebracht). Beim weiteren Auseinanderziehen der Elektroden verlängert sich diese Birne und gleichzeitig wird die Leuchtkraft des Verbindungsstückes zwischen dem oberen grösseren und stark gebauchten und dem kleineren unteren Theile der Birne immer schwächer, so dass schliesslich zwei der Grösse nach sehr ungleiche, ungestielte Büschel durch fast wässerigen Lichtglanz verbunden erscheinen.

Gelegentlich dieser hier zu Tage tretenden Verschiedenheit des oberen, bis in die Mitte des Lichtbogens reichenden und des kleineren unteren Büschels, erinnere ich an die Unregelmässigkeiten des Potentialgefälls (4), welche sich bei Dochtkohle geltend machten.

Es empfiehlt sich, die Vorgänge, welche durch Einbringen von Salz in den Lichtbogen verursacht werden, durch eine Combination farbiger Gläser, welche das intensive blaue Licht des Lichtbogens entsprechend mildert und die Spectralfarbe des eingebrachten Salzes, z. B. Natriumlicht deutlich wahrnehmen lässt, zu betrachten. Bei Annäherung eines salzgetränkten Stiftes beginnt der Lichtbogenkern sich innerhalb seines mittleren Querschnittes zu lösen, während die Aureole besonders im unteren Theile gefärbt erscheint. Bei steigendem Salzgehalte schrumpfen der Krater und das aufsitzende blaue Anodenbüschel ein, die Bläue des Kathodenbüschels, welches mit der Aureole eng verwachsen erscheint, scheint zu schwinden oder verblasst zum Mindesten vor dem Glanze des Natriumlichtes; gleichzeitig verändert die Aureole selbst ihre Form, die früher bauchige Glocke wird zu einem gegen die Anode hin offenen Kegel. So fortschreitend, verschwinden schliesslich Krater und Anodenbüschel und die Anode scheint nur mehr Glutzonenlicht auszustrahlen, so dass das ursprüngliche Lichtbogenphänomen zu einem ganz andern wird.

Es muss hier sehr auffallen, dass dem Auge nur die Aureole und nicht auch der ungleich heissere Flammenmantel mit sammt dem Lichtbogenkern gefärbt erscheint.

Während nun hier der Kern des normalen, d. h. nicht zischenden Lichtbogens bei gleichbleibender Intensität gewissermassen in zwei Büschel aufgelöst wird, darf ein älterer Versuch von Hittorf [2]) nicht übergangen werden, wo der anfangs schwache Strom zwischen Platinelektroden durch eine Flamme fliesst und fortwährend anwachsend, zuerst ein kleines Büschelchen an der Anode, dann bei kleinen Entfernungen im dunklen Raume gelbes Licht und schliesslich Bogenentladung bewirkt.

1) Uppenborn loc. cit.
2) Hittdorf, Pogg. Ann., Jubelbd. S. 443, 1874.

Wenn ich im Vorhergehenden den Ausdruck Büschel wählte, und denselben auch fernerhin anwende, so soll damit nur eine Aeusserlichkeit der Form charakterisirt und nicht auch bereits Identität mit den Büscheln der Reibungselektricität behauptet werden. In der That handelt es sich hier nur um Bestandtheile der gasförmigen Strombahn und die Arbeitsleistung selbst, welche an der Oberfläche der Anode geleistet wird, könnte auch ganz wohl dem Glimmlicht entsprechen, welches zu seinem Auftreten ebenfalls erst das Vorhandensein einer gewissen minimalen Spannung erfordert und das, einmal gebildet, mit der Stromstärke langsam steigende Spannungen aufweist [1]).

11. Die beiden Büschel, welche als Bestandtheile eines langen salzhältigen Lichtbogens unterschieden werden können, scheinen in einem gewissen Masse in ihrer Stellung von einander unabhängig zu sein. Sie orientiren sich möglichst senkrecht zu jener Stelle der Anodenfläche, auf welcher sie fussen. So kann es kommen, dass sie mit einander Winkel einschliessen: z. B. wenn die Anode schief abgebrannt ist und der Krater demnach nicht senkrecht auf der Verbindungslinie von Anode und Kathode steht, oder wenn der Lichtbogen auf der Kante der Kathode aufsitzt.

Am auffallendsten werden diese Erscheinungen, wenn man gleiche und bedeutende Ströme durch zwei Anodenkohlen gegen eine und dieselbe Stelle einer Kathode strömen lässt, wobei sich meist die drei Büschel gegen einen in ihrer Mitte gelegenen Punkt richten und manchmal eines der zwei positiven Büschel vielmehr gegen die andere Anode als die Kathode zu streben scheint.

Die elektrostatischen Ladungen gegenüberliegender Elektroden sind also für die Stellung der Büschel nicht maassgebend; hingegen sind elektrodynamische Einflüsse auf die Büschel leicht nachweisbar sowohl was die Richtung anlangt, als auch in Bezug auf die Abstossung des gasförmigen Stromleiters in Richtung des Stromes. In letzterer Hinsicht braucht man nur zwei gleichnamige verticale Elektroden wie die Pole einer Lampe einander gegenüberzustellen und eine dritte horizontale Elektrode von entgegengesetztem Zeichen ⊢ hinzuzufügen, so dass der Lichtbogen sich von der horizontalen gegen die beiden anderen Elektroden hin spaltet; man wird nun bei genügender Stromstärke bemerken, wie die horizontale Elektrode die Lichtbogengase geradeaus zwischen den beiden verticalen hindurch und darüber hinaustreibt.

Da die Stromesdichtigkeit im mittleren Querschnitte des Lichtbogens wohl geringer ist als an der Austrittsstelle des Stromes an

1) Jaumann, Wiener Ber. Bd. 97, S. 1587 u. f., Jahrg. 1888.

der Kathode, müssen solche elektrodynamische Abstossungen auch im Lichtbogen statt haben und werden auf die Luftströmungen daselbst ihren Einfluss üben.

12. Es ist hier der Ort, eine andere Lichterscheinung zu beschreiben, welche von der Anode zischender Lichtbögen auszugehen pflegt. Um das Phänomen als ein in gewissem Sinne selbständiges und isolirtes betrachten zu können, empfiehlt es sich, eine zischende Entladung von der Seite in einen Lichtbogen übertreten zu lassen. Ich stellte einen verticalen Stift (4 mm) mit seinem oberen Ende dicht unter die Mitte eines horizontalen Lichtbogens und liess dann einen positiven Strom von sehr bedeutender Dichtigkeit in den Lichtbogen übertreten; dabei brach alsbald an der Austrittsstelle des Stromes eine Flamme von blendender Weisse hervor und schoss unter Zischen zwischen dem Elektroden des Lichtbogens hindurch nach oben. Das Zischen und Rauschen, zugleich das rasche Zerstäuben des Stiftes und die blendende Weissglut der abgesprengten Theilchen, welche, in geraden Strahlen fortgerissen, der Flamme ihr Licht gaben und, dann sich in den Lichtbogen vertheilend, auch diesen weiss färbten und noch darüber hinaus eine Flammenzunge erfüllten, — dies Alles verlieh dem Phänomen das Aussehen äusserster Gewaltsamkeit.

Wenn man über kräftige Ströme verfügt, so kann der Stift (4 mm) ganz wohl 3 cm und mehr unterhalb der Lichtbogenachse stehen und dann strebt die weisse Büschelflamme in einem schwach divergenten Kegel nach oben und, je nach der Stellung des Stiftes mehr gegen die Anode oder die Kathode gewendet, lässt sie zwar den richtenden Einfluss einer zur Ebene der Austrittsstelle senkrechten Kraft aber keinerlei elektrostatischen Einfluss von Seiten der Elektroden des Lichtbogens erkennen. Einmal in den Lichtbogen übergegangen, strebte die Büschelflamme darüber hinaus nicht geradstrahlig weiter, sondern spitzte sich zu einer Zunge zu, die etwa so wie eine Kerzenflamme in ihrem oberen Theile geformt war [1]).

13. Die beiden Erscheinungen, welche ich beim zischenden, bezw. beim normalen Lichtbogen Anodenbüschel nannte, sind bei der grossen Verschiedenheit ihres Aussehens vielleicht nicht genau correspondirende Phänomene. Mag aber diese Benennung sich auch streng genommen nicht rechtfertigen, so bietet doch im allgemeinen die Identität der beiderseitigen Entladungsgesetze dieser zwei Lichtbogen-

1) Bei Anwendung von Zinkelektroden gewann ich den Eindruck, dass auch an der Kathode zischende Entladung auftreten könne, es gingen nämlich bei geringer Stromstärke von den nahe gegenüberstehenden Elektroden feine Büschel aus, welche, sich unter den verschiedensten Winkeln begegnend, den Uebergang der Elektricitäten vermittelten.



typen und die Aehnlichkeit der sonstigen Bedingungen ihres Auftretens, wie der bedeutenden Stromstärke und der enormen Temperatur gewichtige Gründe dar, dieselben für innig verwandt zu halten und in allen wichtigen Punkten Analogien zu erwarten. Ich habe aus diesem Grunde beim zischenden Lichtbogen einige Versuche allerdings mehr qualitativer Natur über den Einfluss der Stromesdichtigkeit angestellt, um so für den normalen Lichtbogen in den gleichen Fragen Winke zu erhalten.

Es ist längst erkannt worden, dass Zischen durch fortgesetzte Vermehrung der Stromesdichtigkeit herbeigeführt werden kann, ich versuchte nun zu ermitteln, ob Zischen etwa immer durch annähernd ein und dieselbe Stromesdichtigkeit eingeleitet wird. Ein verticaler Lichtbogen wurde zwischen verticalen Stiften (N 12 mm) entzündet und zwar mit der Kathode nach oben und der Anode nach unten, um einerseits die Glutzone um den Krater möglichst einzuengen und anderseits um zu verhindern, dass das Kraterlicht bei fort und fortanwachsender Stromesdichtigkeit über die Endfläche der Anode hinausgreife. Sowie der Strom so bedeutend war, dass das Kraterlicht diese Endfläche ausfüllte, bedurfte es nur mehr einer ganz geringen Annäherung der Elektroden um Zischen hervorzurufen. Im selben Augenblick wurde auch schon der Strom unterbrochen und nach dem Erkalten der Elektroden wurde die Endfläche der Anode und hiermit die Ausdehnung des Kraterlichtes mittels Maassstabes ausgewerthet. Derart liess sich die Stromesdichtigkeit $\left(\text{der Quotient } D = \frac{\text{Stromstärke}}{\text{Kraterfläche}}\right)$, bei der Zischen eingetreten war, berechnen. Die langen Lichtbögen vertragen viel bedeutendere Stromstärken J_n ohne zu zischen, als die kurzen, dafür ist aber auch ihre Kraterfläche entsprechend grösser und zwar haben die kürzeren Lichtbögen concave, die langen convexe Endflächen, d. h. statt der Krater Kuppen, immer waren diese Endflächen auffallend regelmässig gebildet und umrandet. Ich hatte z. B.:

Bogenlänge	J_n (Ampère)	Durchmesser der Endfläche	D
3,7 mm	19,2	6,87 mm	0,51 Ampère
8,5 „	26,3	8,25 „	0,49 „

Die letzte Colonne gibt den grössten Strom D, der pro Quadratmillimeter des Kraters in den Lichtbogen ohne Zischen übertreten kann. Für 8 mm starke Kohlen wurde für kurze und lange Bögen zwischen 41 und 73 Volt Spannung und dem entsprechend bei Strom-

stärken J_n zwischen 6,5 und 12 Ampère die maximale Stromesdichtigkeit D mit allerdings bedeutenden Schwankungen zu 0,62 Ampère pro (1 mm)² gefunden.

Sowie der Lichtbogen zu zischen beginnt, wird die Ausdehnung des Kraterlichtes geringer, die Stromesdichtigkeit also etwas grösser; zugleich sinkt die Minimalspannung (Bogenlänge = 0) nach den Formeln, welche Cross und Shepard [1]) aufgestellt haben, um etwa 23 Volt. Mir sank in sechs Versuchen, die mit Homogenkohle, (N 12 mm) — Anode oben, Kathode unten — angestellt wurden, die Spannung des bis 50,9 Volt und 16,4 Ampère noch normal brennenden Lichtbogens auf 38,5 Volt also um 12,4 Volt, als ich die ursprüngliche Stromstärke von 16,4 Ampère durch Ausschalten von Rheostatenwiderständen soweit erhöhte, dass der Lichtbogen nunmehr unter Zischen mit 24,8 Ampère brannte. Dabei ging der Werth der Einseitigkeit $E - 2v - S$, welche mittels eines Probirstiftes von 4 mm gemessen wurde, um 9,4 ± 0,17, nämlich von 26,4 auf 1,70 Volt zurück. Der Spannungsrückgang beim Eintritt des Zischens findet also zum weitaus grössten Theile auf Seiten der Anode, also wohl an der Anoden**oberfläche** selbst statt.

Da ein zischender Lichtbogen immerfort ein zischender Lichtbogen bleibt, wie sehr man auch seine Stromstärke vermehren mag, so kann man sich in einfacher Weise Aufschluss verschaffen, wie das Anodenhindernis bei stark wechselnder Stromstärke verändert wird. Es wurde die Anode dünn genommen (N 8 mm) und unter eine Kathode (N 12 mm) gestellt, so dass also das Kraterlicht des zischenden Bogens möglichst auf die Endfläche der dünnen Elektrode beschränkt war.

Der Lichtbogen brannte zwischen diesen Elektroden unter Zischen mit einer Stromstärke J_α; nachdem die Spannung S_α und das Potential der Lichtbogenmitte v_α in Bezug auf die Anode ermittelt war, wurde eine grössere Stromstärke J_β angewendet und das zugehörige S_β und v_β bestimmt, hernach ging ich nochmals auf J_α zurück und bestimmte nochmals S_α und v_α. Die folgende Tabelle enthält das Ergebnis zweier

		J (Ampère)	Diff.	S (Volt)	Diff.	v (Volt)	Diff.	E (Volt)	Diff.
I	α	13,5	5,3	39,1	− 1,32 ± 0,13	27,4	− 0,32 ± 0‘24	15,7	+ 0,68
	β	18,8		37,8		27,1		16,4	
II	α	21,3	17,4	39,5	+ 3,44 ± 0,19	29,0	+ 4,25 ± 0,13	18,5	+ 5,1
	β	28,7		42,9		33,2		23,4	

1) Proc. Amer. Ac. of arts and sciences 1886.

Beobachtungssätze I und II, welche aus je sieben derartigen Versuchen unter absichtlich verschiedenen Modalitäten gewonnen wurden; sie enthält in der vierten Colonne die Werthe für die Einseitigkeit $E = 1\,(v) - S$. Im ersten Beobachtungssatze (I) füllte das Kraterlicht des zischenden Lichtbogens nicht die ganze Endfläche der Anode aus und eine Vermehrung der Intensität bewirkte infolge des verbesserten Leitungsvermögens der Lichtbogengase ein deutliches Sinken der Spannung. Im zweiten Beobachtungssatze (II) erschien die Endfläche der Anode von allem Anfang an mit Kraterlicht bedeckt, eine Vermehrung der Intensität auf fast das Doppelte bewirkte diesmal ein Steigen der Strom-Dichte und hiermit stieg die Spannung, die vierte Colonne zeigt, dass letzteres durch ein Anwachsen der E um 5 Volt bewirkt wurde.

Wenn es nun auch sicher ist, dass das Hindernis, d. h. die Potentialdifferenz zwischen der Anode und dem umgebenden Bogengas durch die grossen Intensitätsvariationen in (II) vermehrt wurde, so veränderte sich das Hindernis doch keineswegs proportional der Stromdichte. Man kann darum nicht einfach von einem Uebergangswiderstande an der Anode des zischenden Lichtbogens in dem Sinne sprechen, als ob ein constanter Factor existirte, der, mit der Stromesdichtigkeit multiplicirt, den Potentialsprung an der Anodenoberfläche des zischenden Lichtbogens liefern würde.

14. Aehnlich wie das Anodenhindernis des zischenden Lichtbogens erfährt auch das des normalen bei wachsender Stromesdichtigkeit jedenfalls keine sehr rasche Steigerung, wenn auch ein geringes Anwachsen wahrscheinlich ist.

Die Sache erfordert beim normalen Lichtbogen ein etwas abgeändertes Beobachtungsverfahren da normales Brennen bedeutend vermehrter Stromesdichtigkeit auf die Dauer unmöglich ist.

Die blosse Thatsache, dass die Bogenentladung überhaupt jemals normal, d. h. im Vergleiche zum zischenden Lichtbogen unter um 12 Volt erhöhter Spannung vor sich geht, erheischt das Vorhandensein einer Kraft, welche der fortschreitenden Concentration der Stromesdichtigkeit, die schliesslich zum Zischen führen müsste, entgegenwirkt. Wenn also an einer bevorzugten Stelle, an einer Hervorragung des Kraterstandes oder an einer Unebenheit im Krater eine Vermehrung der Stromesdichtigkeit stattfindet, so macht sich dort ein Wachsen des Potentialgefälls bemerkbar, welches zum Theil in der Grenzfläche zwischen der Kohle und den angrenzenden Partien des Lichtbogens, zum Theil in diesen Partien selbst stattfinden kann.

Ueber die Grössenordnung der bei wechselnder Stromesdichtigkeit stattfindenden Veränderung versuchte ich mich in folgender Art zu

orientiren. Ich glaubte bemerkt zu haben, dass die zischende Entladung bei rascher und bedeutender Vermehrung der Stromstärke zwar plötzlich, aber nicht absolut gleichzeitig hervorbricht. Darnach sollte eine elektromotorische Messung der Potentialdifferenz zwischen den Elektroden, unmittelbar nach der Intensitätssteigerung vorgenommen, die Spannung eines unter gesteigerter Stromesdichtigkeit normal brennenden Lichtbogens liefern.

Ein solcher Versuch wurde im elektrotechnischen Institute des Polytechnikums ausgeführt, ich genoss dabei freundliche Unterstützung seitens der beiden Herren Assistenten Zickler und Frisch. Ich gebe im folgenden die Einzelheiten des Versuches.

Zu Anfang des Versuches theilte sich der Strom einer Dynamomaschine, der durch Ballastwiderstände auf ungefähr 21 Ampère erhalten wurde, in zwei Stromzweige, deren einer den normal brennenden Lichtbogen enthielt, während der andere aus Regulirwiderständen und einer brennenden Unterbrechervorrichtung bestand. Diese Regulirwiderstände wurden derart gehandhabt, dass der Lichtbogen durchschnittlich von 8 Ampère durchflossen war, während sie selbst den Rest des Hauptstromes (13 Ampère) vermittelten. Zur Messung des Lichtbogenstromes und des gesammten Maschinenstromes waren in die betreffenden Stromzweige Ampèremeter eingeschaltet.

Die Kathode des Lichtbogens war zur Erde abgeleitet, die darunter stehende Anode wurde mit der Nadel eines Lang'schen Elektrometers verbunden, beide Elektroden waren homogen und hatten 8 mm Stärke (Siemens'sche Kohle).

Die vorher erwähnte Unterbrechervorrichtung bestand aus einer sehr kräftigen, horizontal gestellten Stahlfeder, in deren freies Ende ein nach unten ragender, starker Kupferstift eingeschraubt war. Dieses freie Ende liess sich mit Hilfe eines Excenters um etwa 2,5 cm nach abwärts biegen, wobei die platinbelegte Endfläche des eingeschraubten Kupferstiftes mit dem ebenfalls platinbelegten Ende eines anderen untergestellten Stiftes in vollkommene Berührung kam. In solcher Lage, welche zu Anfang des Versuches eingenommen wurde, leitete die Feder den vom Zweigrheostaten kommenden Strom (13 Ampère) durch den Stift hindurch zur Vereinigung mit dem vom Lichtbogen kommenden Strom über, alsdann flossen die beiden Ströme wieder vereint in die Maschine zurück.

Sowie die Feder nach einer kleinen Drehung des Excenters wieder frei wurde, schnellte sie mit bedeutender Geschwindigkeit aufwärts, riss dabei den eingeschraubten Stift aus der Berührung mit dem darunter stehenden und unterbrach derart den Zweigstrom, so dass die Maschine von nun an ihren ganzen Strom durch den Lichtbogen sendete. Der

Gesammtstrom der Maschine wurde beim Unterbrechen des Zweigstromes für den Anfang fast gar nicht geändert; da nämlich die Spannungsmessung (siehe weiter unten) ergab, dass der Lichtbogen seine Spannung indessen fast unverändert bewahrt hatte und da ja die Spannung an den Enden des Lichtbogens zugleich die Spannung an den Enden des von der Maschine und ihren Ballastwiderständen gebildeten Leiterstückes ist, muss auch der Strom in diesem Leiterstück derselbe geblieben sein. Vor dem Abschnellen der Feder ging also nur ein Theilstrom von 8 Ampère, nach dem Abschnellen ging der volle Strom von im ersten Augenblick etwa 20 Ampère, durch den Lichtbogen über.

Um die Spannung des Lichtbogens im ersten Augenblick nach dieser Intensitätsveränderung zu ermitteln (was der Versuchszweck war), war Vorkehrung getroffen, dass die abschnappende Unterbrecherfeder, noch ehe sie ihre Ruhelage nach etwa 0,005 Secunden erreichte, die Leitung, welche die Lichtbogenanode mit der Elektrometernadel verband, durchschlug. Die Nadel, von diesem Moment an isolirt, liess die Potentialveränderung, welche die Anode beim Eintritt der Intensitätsvariation erlitten hatte, erkennen.

Um die erforderliche jähe Unterbrechung der Elektrometerleitung durch die abschnappende Feder zu bewerkstelligen, wurde die Leitung von Anfang an in zwei Stücke zerschnitten. So lange der Lichtbogen mit 8 Ampère brannte, wurde die leitende Verbindung der beiden Stücke und hiermit die Ladung der Elektrometernadel durch zwei Platinfedern, deren Enden sich deckten und leicht gegen einander pressten, besorgt. Gegen die Enden der Platinfeder stiess nun die abschnellende Unterbrecherfeder mit Hilfe eines isolirt eingesetzten Stiftes und stellte, dieselben erst dicht an einander vorbei reissend (Moment der Berührung) und dann aus einander schlagend, die Isolation der Elektrometernadel her. Zu ganz einwurfsfreier elektrometrischer Messung ist bei so kurzer Ladezeit des Elektrometers wohl ein ganz ausgezeichneter Contact zwischen den Platinfedern der Leitung unerlässlich; ein solcher war bei der getroffenen Anordnung nur in dem Momente zuverlässig vorhanden, in welchem der isolirte Stift, auf die Federn aufschlagend, dieselben fest an einander presste, um sie hernach zu trennen. Bei Vorversuchen hatte ich die Platinfedern in der Unterbrecherstelle der Elektrometerleitung anfänglich ganz aus einander gebogen, so dass sie einander gar nicht berührten; die eine von ihnen stand dabei wieder mit der (bei diesem Vorversuch) vorher abgeleiteten und dann isolirten Elektrometernadel in Verbindung, die andere Feder war mit dem positiven oder negativen Pol einer constanten Elektricitätsquelle dauernd verbunden. Die Platinfedern kamen erst beim

Abschnellen der stählernen Unterbrecherfeder in gegenseitige Berührung, indem sie erst hart an einander geschlagen und dann an einander vorbeigerissen wurden; bei diesem Vorgang lud sich die Nadel nur zu drei Viertheilen des Potentials der Elektricitätsquelle.

Mag nun aber auch die Schwankung im Potential der Anode des Lichtbogens beim nachfolgend beschriebenen Versuche seitens der Elektrometernadel nicht voll mitgemacht worden sein, der qualitative Werth des Resultates wurde dadurch nicht beeinträchtigt.

Der Lichtbogen brannte, so lange er von 8 Ampère durchflossen war, mit einer durchschnittlichen Spannung von 46 Volt und dem entsprachen 27,8 Scalentheile Elektrometerausschlag, nach dem Abschnappen der Feder und infolge dessen einer Intensitätsvermehrung auf etwa 20 Ampère, stieg die Angabe des Elektrometers durchschnittlich um 1 Volt, es zeigte aber auch bis um 2 Volt höhere Potentiale an. Die Spannung des Lichtbogens änderte sich also im ersten Augenblick nur sehr wenig, während sich die Stromesdichtigkeit wohl fast verdoppelt haben mochte; das Kraterlicht erfüllte nämlich bereits bei 8 Ampère fast die ganze Endfläche der Anode und ich konnte nicht bemerken, dass dasselbe etwa hernach, beim Abschnellen der Feder, noch auf die Seitenflächen der Anode hinab übergegriffen hätte.

Ich kann nach dem Gesagten nicht glauben, dass der Potentialsprung von der Anode gegen den Lichtbogen der Stromesdichtigkeit proportional zunehme, wie dies Herr Feussner[1]) annimmt, indem er an der Oberfläche der Lichtbogenanode einen Uebergangswiderstand von der Beschaffenheit voraussetzt, dass er, wie jeder andere Widerstand, dem Ohm'schen Gesetze folgt.

15. Im Grossen und Ganzen dürfte sogar die Annahme einer gegenelektromotorischen Kraft den Beziehungen, die zwischen dem Potentialsprung an der Anode und der Stromesdichtigkeit herrschen, viel besser gerecht werden, als die Annahme eines derartigen Uebergangswiderstandes. Wenn ein Theil oder die ganze Stromarbeit zur Schaffung einer neuen Elektricitätsquelle aufgewendet wird, so ist der Nachweis eines entsprechenden Polarisationsstromes der einzig zuverlässige Beweis einer solchen Thatsache. In dieser Hinsicht liegt ein einziges sicheres Ergebnis vor und dieses ist vollkommen negativer Natur. Lecher[2]) hat nämlich gezeigt, dass der Integralwerth des Polarisationsstromes des Lichtbogens auch unter den günstigsten Widerstandsverhältnissen viel kleiner ist, als man nach einem von Edlund

1) Centralbl. für Elektrotechnik 1888, S. 226.
2) Lecher, loc cit.

viel früher angestellten Versuche, bei dem mancherlei Fehlerquellen mitgewirkt haben mochten, erwarten musste.

Die von mir in (14) benutzte Aufstellung ermöglichte nach einer kleinen Abänderung die Grenzen, innerhalb welcher der Polarisationsstrom, wenn überhaupt vorhanden, nachweisbar wäre, noch weiter einzuengen.

Der positive Strom der Dynamomaschine (12 Ampère) floss durch Ballastwiderstände und die vorher beschriebene Unterbrecherfeder hindurch zur Anode des Lichtbogens und dann von der Kathode aus wieder in die Maschine zurück. Derart hing die Anode des Lichtbogens nach dem Abschnellen der Feder nur noch nach einer Seite, nämlich gegen die Kathode zu mit dem nunmehr unterbrochenen Stromkreise zusammen.

Die Kathode des Lichtbogens stand dauernd mit der Erde in Verbindung, die Anode kam nur nach der Unterbrechung des Maschinenstromes auf einen kurzen Augenblick mit der isolirten und ungeladenen Nadel des Elektrometers in Berührung; hätte nun die hypothetische Gegenkraft des Lichtbogens in diesem Momente noch vorgehalten, so hätte die Nadel des Elektrometers eine entsprechende Ladung bekommen müssen. Die momentane Verbindung von Nadel und Lichtbogenanode wurde, wie beim Vorversuche in (14) in der Weise erreicht, dass 2 Platinfedern, deren eine mit der Anode des Lichtbogens und deren andere mit der Elektrometernadel zusammenhing, von dem in die abschnellende Unterbrecherfeder isolirt eingesetzten Stifte erst hart an einander geschlagen, und dann sofort an einander vorbei gerissen wurden.

Wenn nach Unterbrechung des Maschinenstromes die momentane Verbindung der Anode mit dem Elektrometer erst dann hergestellt wurde, als die abschnellende Unterbrecherfeder bereits ihre Ruhelage passirte, so konnte ich keinerlei Ladung der Elektrometernadel wahrnehmen. Es wurden aber sehr bedeutende Ausschläge erhalten, wenn die Verbindung mit der Anode in früheren Phasen der Federschwingung geschah, so zwar, dass schliesslich Nadelausschläge auftraten, die fast der vollen Lichtbogenspannung entsprachen. Ich kann aber in diesen Ladungen keinen Beweis einer Gegenkraft erblicken, denn es zeigten sich beim Abschnellen der Feder stets sehr lange Funken an der Unterbrechungsstelle, so dass also der Maschinenstrom damals gar nicht unterbrochen war. Erfolgte aber die Verbindung mit dem Elektrometer erst, als die Unterbrecherfeder durch ihre Ruhelage ging, also etwa 0,005 Secunden nach ihrem Abschnappen vom Excenter, so war die platinirte Endfläche des in die Feder eingeschraubten Stiftes bereits in 2,5 cm Entfernung von der Endfläche

des darunter stehenden fixen Stiftes, dann war der Oeffnungsfunke des Maschinenstromes zwischen den beiden Stiften verschwunden, dann empfing auch wie gesagt, die Nadel keine Ladung mehr.

Die Polarisationsversuche konnten im elektro-technischen Institute nur ein paar Mal angestellt werden, um möglichst sicher zu gehen, führte ich eine Wiederholung derselben im physikalischen Cabinet durch, woselbst mir ein einpferdiger Gasmotor und eine Gramme'sche Maschine, die kurze Lichtbögen mit 4—5 Ampère erzeugte, zur Verfügung standen. Es machte sich diesmal eine neue Fehlerquelle störend bemerkbar, obwohl nämlich die Kathode mit zwei verschiedenen Punkten des Gasleitungsnetzes gut leitend verbunden war, floss die negative Elektricität des Extrastromes doch nicht mit genügender Raschheit zur Erde ab, so dass die Anode durch den Lichtbogen hindurch Negativladungen von ein paar Volt erhielt. Derartige Ladungen zeigten sich in annähernd gleicher Grösse, wenn der Lichtbogen durch vollkommen inductionsfreie Widerstände aus Neusilberstreifen von zusammen 6,4 Ohm, ersetzt wurde; es ist also nicht zu befürchten, dass etwa der Effect eines erheblicheren Polarisationsstromes durch diese Negativladung der Elektrode verdeckt würde. Auch bei schwachen Strömen von 4—5 Ampère hatte der Inductionsfunke an der Unterbrecherstelle noch sehr bedeutende Länge: der fixe Stift des Unterbrechers wurde von einem Napf umgeben und absoluter Alkohol 1 cm hoch über die Endfläche dieses Stiftes gegossen; beim Abschnellen der Feder setzte der Inductionsfunke den Alkohol in Brand. Nach Erlöschen des Inductionsfunkens war auch diesmal keine + Nadelladung zu erzielen.

Mir scheint durch diese Versuche erwiesen, dass 0,005 Secunden nach der Stromunterbrechung keine irgend bedeutende elektromotorische Kraft im erlöschenden Lichtbogen vorhanden ist; an eine thermoelektrische Kraft von 40 Volt, wie dies neuerdings von Dub[1]) halb und halb vermuthet wurde, vermag ich nicht zu glauben. Einer derartigen Ansicht steht auch die geringe Veränderlichkeit der Potentialdifferenz zwischen Anode und Lichtbogen und nicht zum Mindesten die Thatsache, dass verschieden tief in den Lichtbogen eingesenkte dünne Stifte trotz der enormen Temperaturdifferenz ihrer Spitzen so geringe Potentialdifferenzen aufweisen, entgegen.

16. Es soll übrigens eine mehr untergeordnete Rolle thermoelektrischer Kräfte im Lichtbogen nicht geleugnet werden, solche Kräfte machen sich auch noch im erlöschenden Lichtbogen bemerkbar.

1) Centralbl. f. Elektrotechnik Bd. 10, 1888.

Ich führte eine Wiederholung des Edlund'schen Polarisationsversuches aus, dabei floss der Strom einer Accumulatorenbatterie von 80 Volt durch Ballastwiderstände in ein Excenter aus Messing und vom Zahn des Excenters durch eine aufliegende Feder zur Anode in den Lichtbogen, um von hier zur Batterie zurückzukehren. Die Kathode des Lichtbogens war dauernd durch einen 100,000-Ohmwiderstand hindurch mit dem einen Ende eines d'Arsonval'schen Multiplicators in Verbindung; wenn man den Excenter drehte, so schnappte die Feder ab, unterbrach den Batteriestrom ohne auffälligen Inductionsfunken und stellte, auf einen darunterstehenden Stift aufschlagend, eine Verbindung der Anode des Lichtbogens mit dem andern bisher freien Ende des Multiplicators her. Nun standen also die Elektroden des Lichtbogens durch den 100,000-Ohmwiderstand und den Multiplicator, welcher bei so grossen Widerständen mit 0,5 Secunden Schwingungsdauer fast ohne Dämpfung schwang, mit einander in Verbindung; ein allfälliger Polarisationsstrom, so weit er seinen Weg nicht durch die Glutzone in den Lichtbogen und vom Lichtbogen zurück in den Krater wählte, konnte durch den Multiplicator abfliessen. Hatte der horizontal gestellte Lichtbogen (*Do* 10 mm als Anode, *N* 10 mm als Kathode) mit 10 Ampère bei 48 Volt Spannung gebrannt, so gab der Multiplicator bei Unterbrechung des Stromes einen ersten Ausschlag nach rechts, ebenso gross, wie ihn etwa eine auftretende constante Polarisation von 0,46 Volt bewirkt hätte, die nächstfolgenden Schwingungen wurden um Punkte, die ebenfalls auf der rechten Seite der Scala lagen, vollzogen. Wurde ein Element von 0,67 Volt elektromotorischer Kraft zwischen Multiplicator und Zusatzwiderstand gegen den Sinn des Polarisationsstromes eingeschaltet, so erfolgte nach Unterbrechung des Batteriestromes ein erster Ausschlag nach links, derselbe liess wieder auf eine gegenelektromotorische Kraft von 0,3—0,45 (Volt) schliessen. Beim zweiten Ausschlag nach derselben (linken) Seite lag der Umkehrpunkt der Nadel noch weiter nach links, wodurch ein weiterer Rückgang der vom Lichtbogen ausgehenden elektromotorischen Kraft gegenüber der Kraft (0,67 Volt) des polarisirenden Elementes offenbar wurde.

Bei einer Stromstärke des Batteriestromes von 14 Ampère und bei 49 Volt Spannung des Lichtbogens reichte das Element von 0,67 Volt nicht mehr ganz aus, um bereits im ersten Ausschlag die Wirkung der Polarisation im Lichtbogen aufzuheben; die Nadel schwang also erst nach rechts, ging dann rückschwingend über den Nullpunkt hinaus, kehrte aber dann nicht mehr auf die rechte Seite zurück, sondern vollzog Schwingungen um Punkte die auf der linken Seite der Scale liegen.

Es ist ersichtlich, dass die Polarisationskräfte, welche sich bei diesen Versuchen in den Ausschlägen des Multiplicators offenbarten, niedrige Werthe hatten, lang aushielten und nur allmählich abfielen, sie waren bei grösserer Intensität des ursprünglichen Batteriestromes bedeutender und mögen ganz wohl thermischen Ursprungs gewesen sein.

Im allgemeinen dürften indess jene, welche in der hohen Spannung des normalen und wohl auch des zischenden Lichtbogens in erster Linie eine Aeusserung bedeutender gegenelektromotorischer Kräfte erblicken, geneigt sein, des Weiteren auch das hohe Endladungspotential von Funken, Büschel und Glimmlicht auf gegenelektromotorische Kräfte zurückzuführen. Versuchte doch auch Edlund gleicher Zeit im Funken und im Lichtbogen elektromotorische Kräfte nachzuweisen.

Diese Polarisationen würden mit von keiner Federschwingung erreichbarer Raschheit entstehen und vergehen und da sind denn Beweis und Widerlegung beide gleich schwer.

17. Es war mir leider nicht mehr möglich, die elektrometrischen Versuche über den Zusammenhang von Stromesdichtigkeit und Stromstärke weiter auszudehnen, besonders, um zu erfahren, bei welchen Stromstärken die rasche Abnahme der Lichtbogenspannung beginnt; dies wäre mir als weitere Controle der in dieser Arbeit niedergelegten Anschauungen von grossem Werthe gewesen.

Eine derartige Untersuchung ist übrigens bereits von Joubert[1]) für den Wechselstromlichtbogen, und zwar in einer Weise ausgeführt worden, dass der allgemeine Charakter der Beziehung zwischen Spannung und Stromstärke gewissermaassen mit einem Blicke zu übersehen ist. Leider sind keinerlei Angaben über den Elektrodenquerschnitt und über die Intensitäten der Ströme gemacht, so dass kein Schluss auf die Stromesdichtigkeit möglich ist.

Joubert schaltete einen Lichtbogen in den Stromkreis einer Wechselstrommaschine, deren Ströme nach dem Gesetze einer Sinuscurve variirten, ein. Mit der rotirenden Welle der Maschine war ein Interruptor in Verbindung, der immer nur in einer bestimmten beliebig gewählten Phase der wechselnden Stromstärke zuliess, dass das Elektrometer durch die Elektroden des Lichtbogens geladen werde.

Indem man diese Phasen passend auswählte, wurde nach und nach der gesammte Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung ersichtlich. Die Spannung des Lichtbogens hielt sich fast beständig zwischen 40 und 45 Volt, es muss also mit nur ganz kurzen zwischenliegenden Unterbrechungen bald von der einen, bald von der anderen

1) Joubert, Comp. rend. 91, p. 161.

Elektrode des Lichtbogens jener Entladungsvorgang ausgegangen sein, der die annähernd constante Spannungsdifferenz an der Anode herbeiführt und die hohe Glut des Kraters verursacht.

Wenn kein Strom vorhanden war, bestand auch keine Spannungsdifferenz; in dem Augenblicke, wo die Stromstärke im Begriff war, auf Null zu sinken, war ein rascher Abfall der Spannung wahrnehmbar. In dieser kurzen Zeit des raschen Spannungsabfalls gab es jedenfalls im Lichtbogen nur jene eine Entladungsform, die sich bei geringerer Lichtentwicklung in der Glutzone um den Krater vollzieht und deren Spannungsgesetz durch die bedeutende Veränderlichkeit des Potentialsprunges an der Anode H_+ mit der Stromstärke J charakterisirt ist. (Siehe unter 5.)

Wenn der Strom nach seinem Abfall auf Null wieder in entgegengesetzter Richtung anstieg, so traten die hohen Spannungen von 40 Volt plötzlich wieder auf, das Kraterlicht brach also jedenfalls fast unvermittelt aus. Allerdings ist zu vermuthen, es möchte eine kurze Vorperiode in der nur Glutzonenleitung stattfand, der Beobachtung entgangen sein.

Eine Wiederholung derartiger Versuche an Lichtbögen mit ungleichen Elektroden möchte wohl für die Versuche von Jamin und Maneuvrier[1]) eine andere Erklärung ergeben, als die von jenen Physikern durch die Annahme einer ungleichen Polarisation der Elektroden versuchte. Es mag z. B. das Kathodenbüschel aus einer Quecksilberelektrode früher hervorbrechen als aus einer gegenübergestellten Kohlenelektrode und so der Anschein erweckt werden, die Kohle wirke dem Strom mit einer um 103,7 Bunsen grösseren Polarisation entgegen als das Quecksilber. In ähnlicher Weise wurde bei einem von mir[2]) beschriebenen Versuche, bei dem eine Kohlenscheibe als Anode diente, der Lichtbogen immer wieder sofort entzündet, wenn er infolge der Rotation der Scheibe zerriss, während die einmal unterbrochene Entladung dann dauernd aufgehalten wurde, sowie die Scheibe als Kathode fungirte. Auch möchte der Umstand, dass die von Jamin und Maneuvrier wahrgenommenen Unterschiede mit der Bogenlänge zunahmen, dem Einflusse der Schlagweite zuzuschreihen sein.

18. Ich komme nochmals auf jenen Entladungsvorgang zurück, der sich beim normalen Lichtbogen in der Glutzone rings um den Krater abspielt und der vielleicht auch im Krater selbst einen gewissen Antheil an der Elektricitätsleitung nimmt. Diese Erscheinung

1) Compt. rend. Bd. 94 1882.

2) Loc. cit.

charakterisirt sich durch die bedeutende Veränderlichkeit des Potentialgefälls bei wechselnder Stromesdichtigkeit, ich halte sie für identisch mit dem von Hittdorf[1]) beobachteten Entladungsvorgange: Schmelzen der Anode ohne sichtbaren Lichtbogen.

Zunächst folge eine Beschreibung der Messmethode, welche auch die bereits unter (6) mitgetheilten Resultate gewinnen liess.

Es waren sowohl die Stromintensitäten, welche aus Zuleitungsstiften seitlich in den Lichtbogen übergingen, als auch die Veränderungen, welche die Stiftpotentiale beim Durchgang dieser Ströme erfuhren, in möglichst rascher Weise zu ermitteln.

Die bedeutende Abnutzung, welche stromdurchflossene Stifte gerade an jenen Stellen, welche am weitesten in den Lichtbogen ragen, erfahren, vergrössert die Widerstände für die austretenden Ströme so schnell, dass eine kurze Dauer des Versuches ganz unerlässlich erscheint.

Ich ermittelte vor dem Versuche, als der seitlich in den Lichtbogen tauchende Stift noch von keinem Strome durchflossen war, die Spannung S des Lichtbogens und die Potentialdifferenz v_0 zwischen einem Vergleichungspunkt A und dem Stift.

Nun wurde der Stift durch einen bekannten Widerstand w mit der Anode des Lichtbogens verbunden, infolge des durchfliessenden Stromes J nahm er das Potential v_1 an, die Differenz $H = v_1 - v_0$ war die Potentialerhöhung durch den Strom.

Die zugehörige Grösse J, die Stärke dieses Stromes war aus denselben Daten zu berechnen, ich musste nur auch noch die Potentialdifferenz p zwischen der Anode des Lichtbogens und dem Punkte A kennen; $p - v_1$ gab dann die Spannung an den Enden des Widerstandes w und $J = \frac{p - v_1}{w}$ die Grösse des durch den Stift in den Lichtbogen überfliessenden Stromes.

Von den Grössen v_0, v_1, p, welche sich zur Ermittlung von H und J nothwendig erwiesen, wurden die ersten zwei direct spannungsgalvanometrisch gemessen. Der Punkt A war nämlich mit dem einen Ende eines d'Arsonval'schen Multiplicators, dessen Empfindlichkeit durch nebengeschaltete Widerstände passend und in bekannter Weise regulirt wurde, in Verbindung; vom andern Ende des Multiplicators führte die Leitung durch einen Widerstaud von 10000 SE zum Stift, dessen Potential ich zu ermitteln hatte. Dasselbe liess sich aus dem Ausschlag des Multiplicators, dem Reductionsfactor dieses Instrumentes und aus allen Widerständen, durch welche der Stift mit dem Punkte A verbunden war, berechnen.

1) Wied. Ann. 21 S. 112, 1888.

Zur Kenntnis der Grösse p war nur die zu Anfang des Versuches gemachte Bestimmung der Lichtbogenspannung S, welche mittels eines Siemens'schen Torsionsgalvanometers vorgenommen wurde, erforderlich, denn S stand zu p in constanter Beziehung. Ich hatte nämlich zwei mit Zinksulfatlösung gefüllte Rheostatenröhren, deren Widerstände a und b sich wie 0,87 zu 0,13 verhielten, hintereinander dem Lichtbogen parallel geschaltet. Das längere a grenzte an die Anode, das kürzere b an die Kathode an; der Punkt, wo die beiden Röhren a und b zusammenstiessen, bildete den Vergleichspunkt A für die Messung des Stiftpotentials. Die Potentialdifferenz zwischen der Anode des Lichtbogens und dem Punkte A war nun einfach $p = S\frac{a}{a+b} = S \cdot 0{,}87$, falls kein Strom sich vom Stift aus durch die Multiplicatorleitung in die beiden Rheostatenröhren verzweigte. Wenn ein Strom durch die Multiplicatorsleitung abfloss, so hob er das Potential des Punktes p ein wenig, so dass eine kleine Correctur nothwendig wurde.

Der geschilderte Vorgang bei der Messung von J und H hat den Vorzug kurzer Dauer, der Strom J brauchte nur während der einen Ablesung von v_1 durch den Stift zu gehen und es waren auch kleine v_1 mit grosser Empfindlichkeit messbar, da sich das Potential des Stiftes dann wenig von dem des Vergleichspunktes A unterschied; anderseits basirt dieser Vorgang auf nicht vollkommen gerechtfertigten Voraussetzungen. Die Verbindung der Anode mit dem Stifte und hiermit die Abzweigung eines Stromes von der Anode hinweg und die seitliche Zuleitung desselben in den Lichtbogen muss nämlich sowohl die Spannung S und infolge dessen die Potentialdifferenz p zwischen der Anode und dem Punkte A vergrössern als auch die ganze Potentialvertheilung im Lichtbogen selbst bis zu einem gewissen Grade verändern. Die Grösse $H = v_1 - v_0$ wird von diesen Fehlerquellen nur wenig beeinflusst, die Intensitäten J werden aber zu klein gefunden und zwar in um so rascher zunehmendem Masse, je grösser sie sind. Wenn aber auch die Curven wie die unter (6) mitgetheilte derart zu sehr gekrümmt erscheinen, so kann doch der Grundcharakter der Beziehung zwischen J und H keine wesentliche Veränderung erlitten haben. Die bedeutendste dortselbst (6) mitgetheilte Intensität beträgt $J = 3{,}5$ Ampère; wäre nun dieser Strom bei der Abzweigung von der Anode in den Stift vollkommen verloren gegangen und nicht wieder seitlich durch den Stift in den Lichtbogen zurückgekehrt, so hätte die eingetretene Veränderung der Spannungsverhältnisse des Lichtbogens einen Fehler von 10 % bewirkt; da nun aber der Zweigstrom schliesslich doch wieder durch den Stift dem Lichtbogen zufloss, muss der Fehler geringer gewesen sein. Uebrigens handelt es sich hier (6) ja

um eine Vermehrung des Verhältnisses $w = \frac{H}{J}$ von 1,7 auf 5,2 Ohm, so dass das rapide Anwachsen von H bei zunehmendem J ausser Zweifel steht.

Auch Spannungsdifferenzen irgend welcher Natur, die von allem Anfang an, als noch gar kein Strom seitlich durch den Stift überfloss, vorhanden gewesen sein mochten, können diesen Allgemeincharakter der Erscheinung nicht berührt haben.

Beobachtungen wie die in Rede stehenden müssen in unmittelbarer Aufeinanderfolge bei ein und derselben Stellung und Form des Stiftes gemacht werden, da nur so gewonnene Werthepaare als zusammengehörig mit einander vergleichbar sind. Die Beobachtungen wurden zuerst bei den geringeren (J_0) und dann bei den grösseren (J_1) Intensitäten vorgenommen und hernach wurde, ohne an der Stellung des Stiftes etwas zu ändern, auf die geringeren Intensitäten zurückgegriffen, um so auch den Einfluss, den das Abbrennen des Stiftes auf die Grösse H ausübt, zu eliminiren. Zu Anfang und am Ende jedes Beobachtungssatzes wurde die Spannung S des Lichtbogens und das Potential v_e des isolirt in den Lichtbogen tauchenden Stiftes gemessen.

Aus der Spannung der Batterie von meist 80 Volt, den Widerständen der Aufstellung und der Spannung des Lichtbogens liess sich schliesslich noch die Intensität des Batteriestromes annähernd ermitteln.

Streng vergleichbare Werthpaare können nur bei unveränderter Form und Stellung des Stiftes erhalten werden:

Wenn mit der Form der Stiftspitze die Stromesdichtigkeit verändert wird, so gibt sich dies alsbald in den Resultaten zu erkennen:

1. Stifte, die mit stumpferen und breiteren Spitzen in den Lichtbogen ragten, lieferten gestrecktere Curve.

2. Wenn umgekehrt vom Stifte aus feine Bäume in den Lichtbogen wuchsen, so nahm das Hindernis oft für geringere Intensitäten ab, für stärkere Intensitäten konnte es sogar infolge der gleichzeitig fortschreitenden Verbrennung des Stiftes zunehmen, derart wurden bei fortschreitender Baumbildung die Curven stärker gekrümmt.

Ich beobachtete beispielsweise abwechselnd bei geringeren J_0 und bei grösseren J_1 Intensitäten, während ein Baum sich vom Stifte aus zwischen die beiden Elektroden senkte, und erhielt, ohne sonst etwas an der Stellung des Stiftes zu ändern, nach einander die Werthe

H_0 (Volt)	J_0 (Ampère)	H_1 (Volt)	J_1 (Ampère)
2,95	1,22	15,4	4,13
2,41	1,24	16,4	3,98
1,93	1,39	19,0	3,85

Also bei fortschreitender Baumbildung: Abnahme des Hindernisses für die geringeren und Zunahme für die grösseren Intensitäten.

Womöglich noch auffallender als dieser Einfluss der Stiftform ist der Einfluss der Stiftstellung, derselbe ist den grossen Widerständen zuzuschreiben, welche die dünne Gasschicht zwischen Stift und Lichtbogenkern dem Durchgang des Stromes entgegengesetzt. Ich erwähne beispielshalber Messungen, welche bei homogenen vertical gestellten Lichtbogenelektroden, und Stiften von 4 mm mit Maschinenströmen (17 Ampère) ausgeführt wurden. Ein Stift *a*, ich will ihn den Zuleitungsstift nennen, empfing seinen Strom von einem Punkte des Rheostaten (höheres Potential als das der Lichtbogenanode); das Potential von *a* wurde mit dem eines zweiten in den Lichtbogen tauchenden Stiftes *b* verglichen. Zu Anfang des Versuches stand der Stift deutlich ausserhalb des Lichtbogenkerns tangential zur Peripherie desselben, wies nirgends eine besonders helle Stelle, welche sich mit Kraterlicht hätte vergleichen können, auf, und leitete 2,73 Ampère über, dabei war sein Potential gegen den ursprünglichen Zustand, wo ihn noch kein Strom durchfloss, um 44,5 Volt erhöht. Hernach wurde der Stift sich selbst parallel allmählich näher gegen den Lichtbogen geschoben, da trat, anfangs noch nicht sehr concentrirt dann immer heller und schärfer umrissen, das blendend weisse Kraterlicht auf, und so wurde durch geringe Verschiebung auf continuirliche Weise ein stationärer Zustand erreicht, bei dem die entsprechenden durchschnittlichen Werthe für das Stiftpotential und für die überfliessende Stromstärke 37,5 Volt und 5,2 Ampère betrugen. Als ich den Stift wieder zurückschob, nahmen Potential und Stromstärke wieder angenähert die alten Werthe an. Es reichte also eine dünne Gasschicht zwischen Lichtbogenkern und Zuleitungsstift hin, um das Ausbrechen von Kraterlicht völlig hintanzuhalten und die Spannungsdifferenz des Stiftes gegen den Lichtbogen erheblich zu erhöhen. — Auch die Verbrennung, welche selbst bei geringer Intensität des seitlich austretenden Stromes gerade in den am weitesten vorragenden Theilen des Stiftes rasch beschleunigt vor sich geht, erhöht diese Spannungsdifferenz, indem sie die Entfernung zwischen Stift und Lichtbogenkern vergrössert.

Wenn sich also auch alle Partien des Stiftes, sofern sie noch in den Flammenmantel des Lichtbogens zu liegen kommen, an der Elektricitätsvermittlung in merklichem Grade betheiligen, so tritt der Strom doch meist an jenen Stellen über, welche dem Lichtbogenkern am nächsten liegen. Derart lagern sich bei wachsender Entfernung eines Stiftes stets grössere Widerstände zwischen Lichtbogenkern und Stift und die Curven, welche das Potential (als Ordinate) und die Stromstärke (als Abscisse) in ihrem gegenseitigen Zusammenhang

versinnlichen, steigen immer steiler und gestreckter zu den hohen Potentialen auf.

Eine schlechter leitende Zwischenschicht kühleren Gases, welche bei wachsender Intensität des Stromes immer mehr schwinden müsste, ist wohl auch dann vorhanden, wenn Stift und Lichtbogen — wie in (6) — sich zu berühren scheinen; ihr Einfluss, von den Potentialwerthen der Curve in (6) in Abzug gebracht, würde zwar die Ordinaten geringer, die Krümmung der Curve aber bedeutender erscheinen lassen. Auch nach Abzug dieser Correctur würde übrigens die Curve noch nicht den Zusammenhang zwischen Stromesdichtigkeit und Anodenhindernis wiedergeben, da ja bei stufenweiser Steigerung des seitlich eintretenden Stromes immer weitere Stellen des Stiftes nahe an den Lichtbogen heranrückten, derart musste jene Zone, welche die Ueberleitung der Elektricität in relativ bedeutender Dichtigkeit besorgt, fortwährend an Ausdehnung gewinnen.

19. Braun[1]) hat für Elektroden, welche durch Bunsenflammen ganz geringe Ströme vermittelten, bei wachsender Intensität an den Austrittsstellen dieser Ströme in die Flamme rasches Wachsen des Uebergangswiderstandes constatirt. Es handelt sich hier zwar um äusserst geringe Ströme, aber immerhin erinnert der Charakter dieser Beziehung zwischen Uebergangswiderstand und Stromstärke an den Zusammenhang zwischen Anodenhindernis und Stromstärke, welcher beim Lichtbogen für nicht übermässig starke Zweigströme wahrgenommen wird.

So lange der Stift nahe dem Lichtbogenkern steht, ist allerdings ein unipolares Leitungsvermögen für schwache Ströme, wie es bei Flammen besteht, nicht wahrzunehmen. In diesem Falle scheinen in den Stift ein- oder austretende Ströme bei ihrem Uebergange vom Stromsinn und innerhalb enger Grenzen auch von der Stromstärke unabhängige Widerstände zu überwinden:

1. Der Stift wurde in passende Lage gebracht und hernach wurden bei geringerer J_0, dann bei grösserer J_1 und hernach wieder bei geringerer J_0 Intensität die Grössen J und H nach der in (18) beschriebenen Methode bestimmt. Neun derartige Beobachtungssätze lieferten im Mittel

$$i_0 = 0{,}386 \text{ Ampère} \qquad h_0 = 0{,}913 \text{ Volt}$$
$$i_1 = 0{,}908 \quad " \qquad h_1 = 2{,}34 \quad "$$

Das Verhältnis $\frac{W_1}{W_0}$, für jeden einzelnen Beobachtungssatz berechnet, ergab den Mittelwerth:

1) Braun, Pogg. Ann. Bd. 154, S. 481, 1875.

$$\frac{W_1}{W_2} = 1{,}09 \pm 0{,}041;$$

hier ist unter W wieder der Quotient $\frac{H}{J}$ verstanden.

2. Der Stift wurde wieder möglichst dicht an den Lichtbogen herangeschoben und dann bei unveränderter Stellung abwechselnd durch bekannte Widerstände mit der Anode des Lichtbogens oder mit der Kathode der Batterie und hierauf wieder mit der Anode verbunden. Derart flossen abwechselnd Ströme von $J_+ = 0{,}874$ Ampère durch den Stift in den Lichtbogen oder aus dem Lichtbogen ($J_- = 0{,}394$ Ampère) in den Stift. Dabei gab der d'Arsonval'sche Multiplicator abwechselnd positive und negative Ausschläge, aus welchen nach der in (18) beschriebenen Methode J_+ und H_+, bezw. — da das Potential der Kathode der Batterie bekannt war — nach denselben Grundsätzen auch J_- und H_- bezeichnet wurden. Das gegenseitige Verhältnis $\frac{W_+}{W_-}$ der Quotienten $W_+ = \frac{H_+}{i_+}$ und $W_- = \frac{H_-}{i_-}$ wurde für sieben derartige Beobachtungssätze getrennt gerechnet. Als Mittelwerth ergab sich

$$\frac{W_+}{W_-} = 0{,}986 \pm 0{,}055.$$

So lange der Stift bis dicht an die heissesten Theile des Lichtbogens ragt, bieten sich also ein- und austretenden schwachen Strömen annähernd gleiche Widerstände dar; diese Widerstände nehmen rasch zu, je mehr man den Stift vom Lichtbogenkern entfernt, und zwar wahrscheinlich stärker für die negativen (vom Lichtbogen durch den Stift abfliessenden) Ströme als für die entgegengesetzt gerichteten positiven. Schliesslich, wenn der Stift nur mehr in die Aureole reichte und positive Ströme bei 50 Ohm Widerstand zu überwinden hatten, wurden für negative Ströme mehrfach und vielfach grössere Widerstände gefunden. Hier herrschten also Zustände, wie in den gewöhnlichen Flammen, wo auch an der Kathode ungleich grössere Uebergangswiderstände sind als an der Anode.

20. Das Vorhergehende bot mehrmals Beispiele, dass die Entladungsvorgänge in der Glutzone neben denen in der Kraterfläche eine bedeutende Rolle zu spielen vermögen. Der Antheil der beiden Erscheinungen an der Elektricitätsvermittlung wird bei Lichtbögen von nur zwei Elektroden nicht immer derselbe sein, ebensowenig nimmt die Ausdehnung des Kraters immer proportional mit der Stromstärke zu. Ich stellte die Anode (N_{12} mm) eines Lichtbogens unter eine Kathode aus gleichem Material und entwarf ein Bild des Lichtbogen-

kraters auf der transparenten Scala eines Flammenmaasses. Da das Flammenmaass dem annähernd kreisförmigen Krater nicht direct gegenüberstehen konnte, so musste das Bild elliptisch erscheinen. Die Länge der grossen Achse a der Ellipse wurde an der Scala des Flammenmasses abgelesen, a^2 musste der Kraterfläche proportional sein. Es wurden abwechselnd Ströme $i_0 = 12{,}9$ und $i_1 = 7{,}34$ Ampère durch den Lichtbogen gesendet und gleichzeitig immer die Grössen a_0, a_1 bestimmt. Während die Ströme im Verhältnisse $\frac{i_0}{i} = 1{,}764$ standen, war das Verhältnis der Flächen $\frac{f_0}{f_1} = 2{,}57 \mp 0{,}088$. Die Ungleichheit der beiden Verhältnisse kann nicht durch störende Irradiationswirkungen hervorgebracht sein, da färbige Gläser, zwischen den Lichtbogen und das Flammenmaass geschoben, die Grösse des Kraterbildes unverändert erscheinen liessen.

Auch dieses eigenthümliche Wachsthum des Kraters muss wohl die Spannungsverhältnisse der Erscheinung beeinflussen und derlei wird bei künftigen Arbeiten über den Lichtbogen Berücksichtigung verdienen.

Beispielsweise steigt die Spannungsdifferenz zwischen der Anode und dem Flammenmantel des Lichtbogens beträchtlich, wenn derselbe zwischen sehr dicken Elektroden brennt, darin muss aber noch nicht mit Nothwendigkeit ein directer Einfluss der Abkühlung gesehen werden. Als ich mit der Spitze eines Stiftes möglichst dicht unter die Glutzone eines aufrechten Lichtbogens von 5,2 Ampère, der zwischen (N 20 mm) als Anode und (N 8 mm) als Kathode brannte, fuhr, so war das Potential des Stiftes um $H = 47{,}1 \pm 0{,}67$ Volt niedriger als das der Anode, während bei dünneren Anoden und stärkeren Strömen (siehe unter 3) $H_1 = 33{,}7 \pm 0{,}46$ für einen in den Lichtbogenkern dringenden Stift gefunden wurde. Es ist nun auffallend, dass solche Lichtbögen mit sehr dicken Anoden punktförmige Krater hatten, so dass also nicht gerade die Temperatur als Ursache der Veränderung von H angenommen werden muss.

Aehnliche, nur viel geringere Variationen in den Potentialverhälthältnissen des Lichtbogens werden auch bei geringen Veränderungen der Stromstärke wahrgenommen:

Ich nahm Do 18 mm als Anode und stellte darunter N 12 mm als Kathode und maass nun für drei verschiedene Bogenlängen, deren Werthe mittels eines Flammenmaasses ermittelt wurden, die Spannungen S_0 und die Intensitäten J_0 des Lichtbogens, sowie auch die Beträge dS, um welche die Spannungen S abnahmen, wenn J um dJ vermehrt wurde. Der Controle halber wurde hernach wieder eine

Verminderung um dJ vorgenommen und die entsprechende Spannungsvariation dS beobachtet.

Es wurde nun die Voraussetzung gemacht, die Spannungsvariation gehe ganz innerhalb des Lichtbogens von der Länge l vor sich; darnach wurde der Werth $\frac{dS}{dJ} \cdot \frac{1}{l}$ für die einzelnen Fälle berechnet, d. h. es wurde die Spannungsvariation per Millimeter des Lichtbogens berechnet. Die folgende Tabelle enthält in ihrer vierten Colonne die mittleren Werthe dieser Variationen. Die Intensitäten J (zweite Colonne) sind die Mittelwerthe aus J_0 und $J_0 + dJ$, also die Werthe $J_0 + \frac{dJ}{2}$, ebenso ist $S = So - \frac{dS}{2}$. Die Spannungsvariationen dJ betrugen im Durchschnitt 6 Ampère.

Bogenlänge mm	J Ampère	S Volt	$\frac{1}{l}\frac{dS}{dJ}$	$\frac{dS}{dJ}$
3,59	20,6	45,4	0,142 ± 0,002	0,510
6,78	21,0	50,0	0,104 ± 0,003	0,703
9,70	20,4	53,4	0,062 ± 0,001	0,602

Die Werthe der dritten Colonne erscheinen von der Bogenlänge in hohem Masse abhängig, im Gegensatze dazu behalten die Werthe $\frac{dS}{dJ}$ wenigstens immer gleiche Grössenordnung: d. h. bei einer Veränderung der Intensität J wurde in erster Linie das Glied a im Ausdrucke $S = a + bl$, der die Beziehung zwischen Spannung und Bogenlänge l zum Ausdrucke bringt, geändert. Natürlich soll damit nicht geleugnet werden, dass das Potentialgefälle bei schwächeren Strömen mit steigender Stromstärke im Lichtbogen selbst sehr stark zurückgeht.

Die ausgesprochene Vermuthung, es möchten Intensitätsvariationen im vorliegenden Falle vor allem die Spannungsdifferenz zwischen Lichtbogen und Anode herabsetzen, wird durch Beobachtung der Schwankungen im Potential des Bogens gestützt. Es wurde ein Stift in halber Höhe eines Lichtbogens (Spannung S und Länge l) in den Flammenmantel gebracht und das Stiftpotential mit dem der Lichtbogenanode verglichen; der bezügliche Potentialunterschied v erfuhr bei der Vermehrung des Stromes J um dJ eine Verminderung um dv, gleichzeitig ging auch die Spannung S um dS zurück. Nun wurde in ähnlicher Weise, wie bei den unmittelbar vorhergehenden Versuchen, wo es sich um $\frac{dS}{dJ}$ handelte, jetzt $\frac{dv}{dS}$ bestimmt. Das Material war dasselbe wie bei diesen früheren Versuchen und ferner war $J = J_0 + \frac{dJ}{2} = 21$ Ampère

und $S = S_0 - \frac{dS}{2} = 51{,}7$ Volt. Ich fand $\frac{dv}{dS} = 0{,}856 \pm 0{,}038$, der Potentialrückgang erfolgte also grösstentheils auf Seiten der Anode.

In anderen Fällen, wo Homogenkohle in Verwendung stand, und die Stromstärke verhältnismässig sehr bedeutend war, ergab sich bei Anwendung derselben Methode nur geringe Abhängigkeit des Anodenhindernisses von der Stromstärke. Indes konnte ich auch bei Homogenkohle niemals ein Ansteigen der Spannung bei wachsender Stromstärke wahrnehmen, wie dies von Nebel [1]) beobachtet wurde.

Immerhin beweist z. B. ein Versuch von Arons [2]) dass bei sehr rasch verlaufenden Variationen des Stromes die Spannung des Lichtbogens zugleich mit der Stromstärke steigt und fällt; ungefähr wie dies bei einem kleinen Widerstande der Fall ist.

Ich bemerke aber an dieser Stelle, dass mir die Annahme, die Spannung habe bei diesem Versuche nur in der Gasstrecke variirt und sei einzig und allein dem Widerstande derselben zuzuschreiben, sehr gewagt erscheint.

---

1) Exner's Repert. 1886, S. 527 m. ff.

2) Wied. Ann., Bd. 30 (1887).

Ueber die Abhängigkeit der magnetischen und diamagnetischen Eigenschaften der Elemente von ihrem Atomgewichte.

Von

P. Bachmetjew.

Faraday ist der Erste gewesen, der den Magnetismus und den Diamagnetismus der Körper untersucht hat; die von ihm gefundenen magnetischen und diamagnetischen Elemente sind in folgenden zwei Reihen enthalten, wobei sie ihrer Magnetisirbarkeit oder Diamagnetisirbarkeit nach eine absteigende Reihe bilden:

Magnetische Reihe:

Fe, Co, Ni, Mn, Cr, Ce, O.

Diamagnetische Reihe:

Bi, Sb, Zn, Sn, Cd, Hg, Pb, Ag, Cu, Au, As, Ur, Rh, Ir, W.

Später wurden diese Reihen vervollständigt, wobei sich magnetisch erwiesen: La, Di. Als diamagnetisch und zwar zunächst in sehr hohem Maasse hat Böttger[1]) Te gefunden; in etwas geringerem Grade diamagnetisch zeigten sich nach seinen Beobachtungen: S, Se, Tl, und ganz schwach Nb und Ta[2]).

Platin hat man längere Zeit für magnetisch gehalten, da sein Erz Eisenfeilspähne anzuziehen vermochte; die weiteren Untersuchungen haben jedoch dargethan, dass diese Eigenschaften dem Eisen angehören, welches im Erz vorhanden ist: sobald aber Platin chemisch rein gewonnen wird, ist es diamagnetisch[3]).

Diamagnetisirbarkeit ist später auch bei folgenden Körpern nachgewiesen worden: C, N, Os, Cl, H, P, Si, Be, K, Al[4]).

---

1) Böttger, Frankf. Jahresber. S. 26. 1863.
2) Poggendorff, Pogg. Ann. Bd. 73 S. 619. 1848.
3) Kokscharof, Bullet. de St. Petersb. Bd. 7 S. 1771. 1867.
4) Lamy, Ann. de Chim. et de Phys. Bd. 51 S. 305. 1857.

Die diamagnetischen Untersuchungen werden im allgemeinen dadurch erschwert, dass eine Darstellung chemisch reiner Körper mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist. Dazu kommt noch der Umstand, dass das diamagnetische Moment im Vergleich zu dem magnetischen sehr klein ist. (Nach W. Weber ist dasselbe bei Bi $2\frac{1}{2}$ Mill. mal kleiner als beim Eisen), so dass schon die kleinste Beimischung von Fe den Körper magnetisch macht.

Verschiedene Forscher versuchten eine gewisse Abhängigkeit der magnetischen und diamagnetischen Eigenschaften vom Atomgewicht der Körper in dem periodischen System der Elemente zu finden.

Schon Carnelley[1]) ist zu der Ansicht gekommen, dass die Körper, welche den geraden Reihen aller acht Gruppen des Systems von Mendelejew angehören, magnetisch, diejenigen aber, welche den ungeraden Reihen angehören, diamagnetisch seien.

Zum gleichen Resultate gelangte auch Errera[2]).

Bei näherer Betrachtung des periodischen Systems von Mendelejew ist diese von Carnelley und Errera gezeigte Regelmässigkeit jedoch nicht richtig, denn dann müssten auch Ur, Pt, Os, Ir, W, Ta, Pd, Rh, Nb, C, N magnetisch sein; ihre Diamagnetisirbarkeit ist aber, wie oben gesagt, erwiesen.

Den gleichen Triumph hatte auch der Versuch von Crookes und Spring[3]); nach ihrem Schema müssten auch: W, Ur, Nb, Ta, K, Be etc. magnetisch sein, was jedoch mit den directen Beobachtungen im Widerspruche steht.

Es ist mir nun vor einigen Jahren gelungen eine solche Abhängigkeit vom Atomgewichte zu finden und zwar gestützt auf meine Untersuchungen über den Einfluss des Zuges und Druckes (der Länge nach) der Metallstäbe auf ihr magnetisches Verhalten[4]).

Um in dieser Abhängigkeit der magnetischen und diamagnetischen Eigenschaften der Elemente von ihrem Atomgewichte eine grössere Klarheit zu verschaffen, werde ich hier die dazu nothwendigen Resultate der oben erwähnten Untersuchung anführen.

Wollen wir Eisendrähte, die sich in einem immer stärker und stärker gezogenen Zustande befinden, magnetisiren, so bemerken wir, dass der Magnetismus der Drähte (bei sonst gleichen Umständen) ein verschiedener ist: er wird mit dem Zuge stärker, erreicht ein Maximum und bei noch stärker gespannten Drähten wird er wieder kleiner.

---

1) Carnelley, Beibl. 4 S. 148. 1880.
2) Errera, Beibl. 5 S. 615. 1881.
3) Crookes und W. Spring, Beibl. 11 S. 193. 1887.
4) Journ. russ. phys.-chem. Gesellsch. 16 S. 427. 1884.

Die Fig. 1 zeigt diese Aenderung. Die verticale Axe bedeutet das magnetische Moment ($+ M$) und die horizontale die Zugkraft.

Sobald wir nun die Magnetisirung aber mit immer stärker und stärker comprimirten Eisenstäben ausführen werden, werden wir zugleich finden, dass ihr Magnetismus immer mehr und mehr abnimmt, um schliesslich Null zu werden [1]). Wollen wir auch dieses Resultat graphisch darstellen (Fig. 2).

Die Untersuchung der Nickeldrähte führte zu den entgegengesetzten Resultaten. Die Curve in Fig. 3 stellt den Einfluss des Zuges und in Fig. 4 den Einfluss der Compression dar.

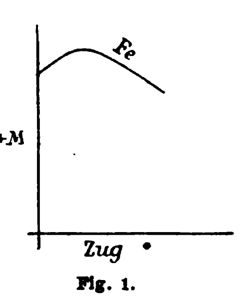


Fig. 1.

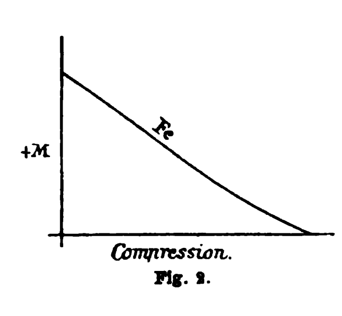


Fig. 2.

Da wir rechts von der verticalen Axe den Zug angenommen haben, so wird die Compression (als entgegengesetzter Process) links sein; indem wir auf diese Weise die Curven 1 mit 2 und 3 mit 4 combiniren, erhalten wir:

In Anbetracht dessen, dass die Verminderung der Compression einem Zuge und die Verminderung des Zuges einer Compression entspricht, fällt uns sofort auf, dass die Curve für Ni (Fig. 6) eine natürliche Fortsetzung der Curve Fe (Fig. 5) darstellt; mit anderen Worten: Nickel verhält sich beim Comprimiren und Dehnen gerade so, wie der Körper B (Fig. 5) unter gleichen Umständen. In der That wird der Magnetismus des Körpers B (welcher schon das gespannte Fe bedeutet) beim Dehnen, wie Fig. 5 zeigt, kleiner, und beim Comprimiren (eigentlich bei der Verminderung des Zuges) grösser; dasselbe wird auch beim Ni beobachtet.

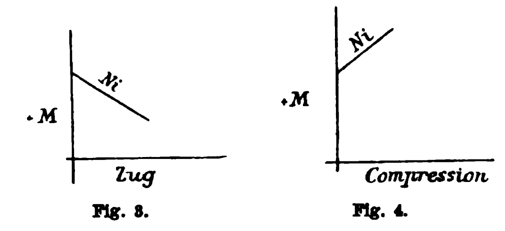


Fig. 3. Fig. 4.

Auf diese Weise sind wir berechtigt den Körper B durch Ni zu ersetzen und indem wir die Curven 5 und 6 combiniren, erhalten wir Fig. 7.

1) Diese bemerkenswerthe Thatsache ist in der Wirklichkeit von mir beobachtet worden.

Da das Co dieselben Veränderungen durch Comprimiren und Dehnen erfährt wie Ni, so muss es auf der Curve (Fig. 7) auch rechts von Fe sich befinden; und andrerseits sein Magnetismus grösser ist als derjenige des Ni und kleiner als der des Fe, so ist sein Platz auf der Curve zwischen Fe und Ni. Wir erhalten folglich die Reihe: Fe, Co, Ni, in welcher sich die Elemente ihrem Magnetismus nach in absteigender, in Betreff ihres Atomgewichtes aber in aufsteigender Reihe folgen (Fe = 56, Co = 58, Ni = 59); auf diese Art können wir auf der horizontalen Axe die Zug- und Druckkraft durch das Atomgewicht der Elemente ersetzen (wenigstens relativ), wobei dasselbe rechts zunimmt und links abnimmt, ohne dass dabei die Curve ihr charakteristisches Aussehen verliert.

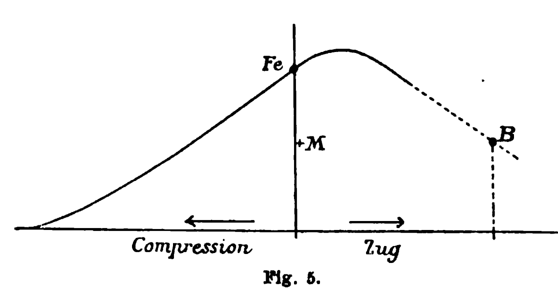


Fig. 5.

Fig. 6.

Gestützt darauf bekommen Mn und Cr auf der Curve ihren Platz links von Fe. Wir erhalten folglich das Schema (Fig. 8).

Hier sind die Elemente ihrem Atomgewichte nach vertheilt, wobei die verticalen Axen ihre Magnetisirbarkeit anzeigen; gleichzeitig gibt

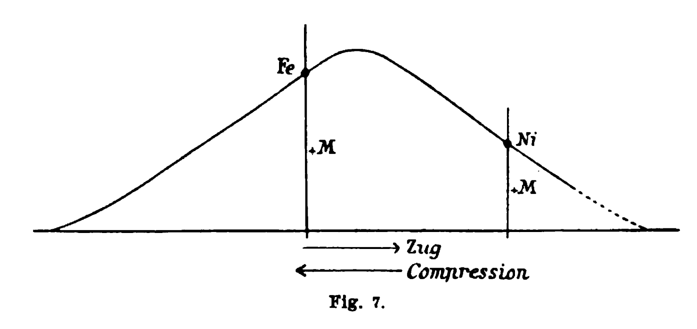


Fig. 7.

die Curve auch die Veränderung der Magnetisirbarkeit infolge des Dehnens oder der Compression an.

Wir sind weit von dem Gedanken entfernt, zu behaupten, dass Cr und Mn durch die **einfache** Compression des Fe und Co und Ni durch dessen Spannen entstanden sind, da die Curven für jedes einzelne Element in der Wirklichkeit schon keine absolut richtige Fortsetzung von einander darstellen, aber bestimmt können wir behaupten, dass die Erscheinungen z. B. des sehr stark gespannten Eisens, mögen es

nun je nachdem die thermischen oder die magnetischen etc. sein, zu gleicher Zeit auch Erscheinungen des gewöhnlichen Nickels sind; das comprimirte Eisen hinwiederum wird Erscheinungen besitzen, die uns an diejenigen des Mangans erinnern, etc.

Die diesbezüglichen Thatsachen sind wirklich vorhanden und werden am Schlusse angeführt.

Aus dem bereits Gesagten ist es daher ganz klar, dass wir die Abhängigkeit des Magnetismus und des Diamagnetismus vom Atomgewicht nur mittels eines ähnlichen Verfahrens zum Ausdruck bringen können (Diamagnetismus würde dann durch diejenige Curve versinnbildlicht, welche sich unter der horizontalen Axe befindet).

Fig. 9 zeigt eine solche Darstellung, welche folgendermaassen erhalten wurde: Auf der Horizontalaxe wurden die Atomgewichte aller bis jezt bekannten Elemente aufgetragen; dann wurde beim Atom-

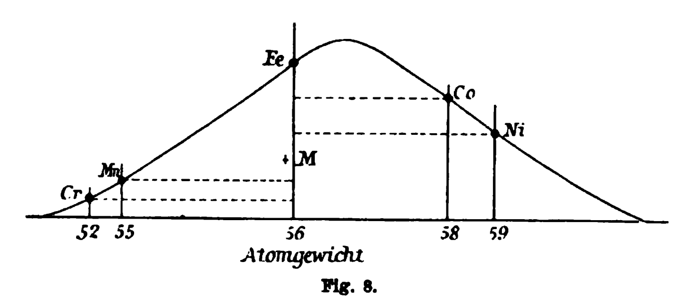


Fig. 8.

gewichte jedes einzelnen Elementes, welches sich in der Reihe von **Faraday** befindet, eine verticale Axe errichtet, auf welcher die **relative** Grösse des Diamagnetismus (Diamagnetismus des Bi wurde = 100 angenommen) aufgetragen wurde. Verticale Axen für magnetische Körper sind mit den verticalen Axen für diamagnetische Körper nicht vergleichbar, sonst müsste man sie einige Tausende mal grösser machen (einzelne Gruppen sind unter sich aus dem gleichen Grunde auch nicht vergleichbar). Indem wir die äusseren Punkte der verticalen Axen unter sich verbinden, erhalten wir unsere Curve, welche uns u. A. angibt, wie stark (ungefähr) diamagnetisch oder magnetisch einzelne Elemente sind, die in dieser Richtung noch nicht untersucht worden.

Diejenigen Stellen der Curve, welche nicht ganz ausgezogen sind, zeigen, dass in dieser Gruppe das Element noch nicht bekannt ist, welches in der Nähe vom Maximum liegen sollte.

Vergleichen wir die Reihe von **Faraday** mit dem angeführten Schema, so finden wir, dass nur Zn, Cu und Rh dieser Abhängigkeit nicht folgen, was aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich ist:

Reihe von **Faraday**:

Bi, Sb, Zn?, Sn, Cd, Hg, Pb, Ag, Cu?, Au, As, Ur, Rh?, Ir, W.

Reihe nach dem Schema:

Bi, Sb, —, Sn, Cd, Pb, Hg, Ag, — Au, As, Ur, —, Ir, W.

Aus allen Gruppen des hier angeführten Schemas sind am besten die IV, V, und VII studirt worden und — was für uns von besonderer Wichtigkeit ist — sind Thatsachen vorhanden, welche Schlüsse zu ziehen erlauben, dass Bi dasjenige Element ist, welches in der Nähe des Maximums der Curve für die Gruppe VII liegt. Knoblauch und Tyndall[1]) fanden nämlich, dass der Diamagnetismus des Bi durch Compression vergrössert und durch Dehnen (eigentlich durch Erwärmen [2]) verkleinert wird. Es ist leicht zu ersehen, dass damit diese Beobachtungen im Einklange mit unserer Darstellung stehen, Bi rechts vom Wendepunkt der Curve (für die Gruppe VII) stehen muss.

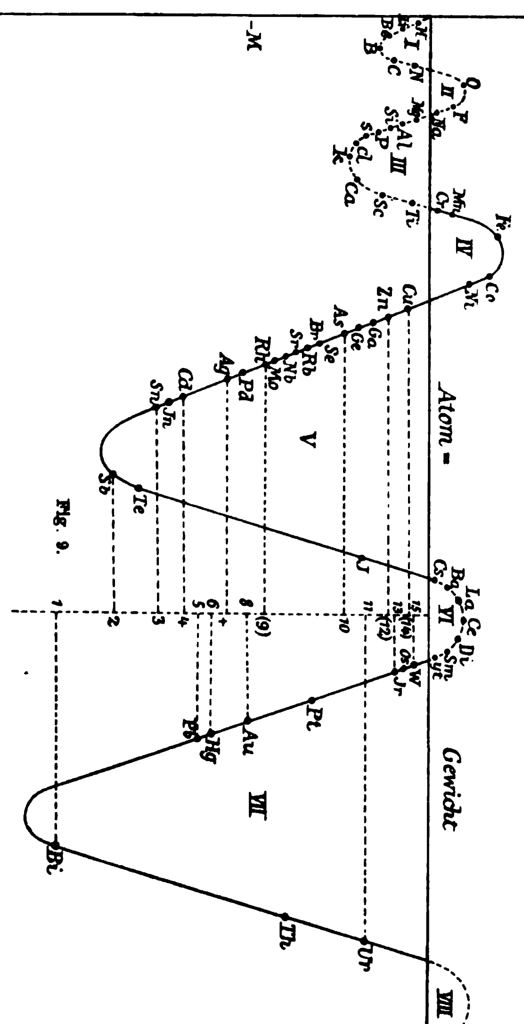


Fig. 9.

So muss auch Sb nach Bi der zweitstärkste diamagnetische Körper in der Nähe vom Wendepunkt der Curve für Gruppe V sich befinden (die Thatsachen fehlen noch, ob links oder rechs von demselben).

Wie oben erwähnt, sind wir berechtigt zu schliessen, dass stark gespanntes Eisen analoge Erscheinungen zeigen wird, wie gewöhnliches

1) Knoblauch und Tyndall, Pogg. Ann. Bd. 81 S. 492. 1850.
2) Plücker, Pogg. Ann. Bd. 74 S. 370. 1848.

Nickel. Und in der That: Joule[1]) fand, dass ein Eisendraht im magnetischen Zustande länger ist, als im unmagnetischen. Diese Verlängerung nimmt jedoch ab, wenn der Draht stärker und stärker gespannt wird, bis schliesslich ein sehr stark gespannter Eisendraht unter dem Einfluss der Magnetisirung sich verkürzt.

Wie Barrett gefunden, verkürzt sich ein Nickeldraht unter dem Einfluss des Magnetisirens, ohne dass er gespannt werden muss. In dieser Thatsache hätten wir die erste Bestätigung unserer Ansichten.

Die thermoelektrischen Erscheinungen sind ebenfalls im Einklang mit diesem Schluss und zwar: Wird der Eisendraht eines Eisen-Nickel-Thermoelementes stärker und stärker gespannt, so nimmt die thermoelektromotorische Kraft zuerst zu, erreicht ein Maximum, um nachher wieder abzunehmen[2]) (bevor diese Kraft = 0 wird, zerreisst der Eisendraht). Diese Abnahme der elektromotorischen Kraft lässt sich auch dadurch erklären, dass sehr stark gespanntes Eisen dem gewöhnlichen Nickel sehr nahe kommt.

Die von mir entdeckte Erscheinung, dass ein Eisenstab beim starken Ziehen gar keinen Ton bei seiner intermittirenden Magnetisirung ergibt und bei noch stärkerem Spannen wieder zu tönen anfängt[3]) (wie ein Ni-Draht im gewöhnlichen Zustande), spricht auch für die oben erwähnte Analogie.

Die wichtigste Consequenz aus dieser Abhängigkeit ist die, dass durch Compression oder Zug die magnetischen Körper in die diamagnetischen und umgekehrt verwandelt werden können. So z. B. zeigt uns das Schema, dass sich Ni beim Dehnen in einem dem Cu ähnlichen diamagnetischen Körper verwandeln wird, und Eisen wird durch Comprimiren in einen dem Ti ähnlichen Körper verwandelt[4]).

Beim Ziehen des Cu soll dasselbe zuerst stärker und nachher schwächer diamagnetisch sein, um schliesslich bei noch stärkerem Dehnen magnetisch zu werden[5]) (d. h. dem Cs ähnlich werden), etc.

1) Joule, Phil. Mag. Bd. 30 S. 225. 1847.

2) P. Bachmetjew, Journ. russ. phys.-chem. Gesellsch. B. 21 p. 264. 1889.

3) P. Bachmetjew, Repert. d. Phys. S. 137, 1890.

4) Diese Vermuthung wird durch meine früheren Untersuchungen bestätigt, nach welchen ein Eisendraht beim starken Comprimiren vollständig unmagnetisch wurde (vielleicht diamagnetisch?). (Journ. russ. phys.-chem. Gesellsch. Bd. 16 S. 427, 1884).

Die in der neuesten Zeit entdeckte Legirung, bestehend aus Mn und Fe, besitzt nach hier angeführter Darstellung deshalb keine Magnetisirbarkeit, weil dieselbe so zu sagen das comprimirte Eisen in sich enthält, d. h. diese Legirung erleidet beim Erstarren eine Volumenverminderung.

5) Br und Cu sind zwei diamagnetische Körper; $CuBr_2$ aber zeigt magnetische Eigenschaften (Wiedemann). Diese Thatsache lässt sich von unserem Standpunkt aus dadurch erklären, dass Cu in $CuBr_2$ in einem sehr ausgedehnten (specifisch leichteren) Zustande sich befindet.

Den künftigen Untersuchungen wird überlassen, zu zeigen, z. B.:

Dass In stärker diamagnetisch als As, Ag und Cd und schwächer als Sb und Sn ist.

Dass ein comprimirter Ni-Stab durch Magnetisiren eine kleinere Verkürzung zeigen wird, um schliesslich bei sehr starkem Comprimiren eine Verlängerung zu zeigen.

Dass Sn beim Dehnen einen grösseren Diamagnetismus besitzen wird.

Dass die specifische Wärme eines magnetisirten Nickel-(Eisen)-Stabes beim Comprimiren (Spannen) zuerst gleich gross und bei noch stärkerem Comprimiren (Spannen) grösser (kleiner) sein wird als diejenige des nicht magnetisirten Nickel-(Eisen)-Stabes [1].

Dass der thermoelektrische Strom, welcher sonst durch die erwärmte Stelle vom magnetisirten (nichtmagnetisirten) zu nichtmagnetisirten Nickel-(Eisen)-Stabe geht, seine Richtung sofort ändern wird, sobald zu diesem Versuche comprimirtes (gespanntes) Nickel (Eisen) benutzt wird etc.

Zürich und Sofia, Juli 1890.

---

1) Specifische Wärme des magnetischen Nickel-(Eisen)-Stabes ist, wie bekannt Stephan), kleiner (grösser) als die des nicht magnetisirten.

Einfluss der Erddrehung auf die Windrichtung.

Eine kritische Abhandlung.

Von

A. Kurz.

Ueber jenen Einfluss und denjenigen der Reibung handelt gemäss seinem Titel ein Aufsatz von Roth in diesem Repertorium (J. 1884 S. 681—702), welcher als eine Replik gegen einen Artikel von Bruns auftritt [1]), welch letzterer mir hierdurch neuerdings nahe gelegt wurde. Mit diesem will ich Kirchhoffs „Mechanik", soweit dieselbe in der IX. „Vorlesung" von obigem Thema handelt, nunmehr vergleichen.

Die Reibungsglieder des Calkuls von Bruns lasse ich a priori weg, da sie die Windrichtung nicht beeinflussen [2]).

Soweit die Bezeichnungen von Bruns und Kirchhoff von einander abweichen, wähle ich diejenige des ersteren und schreibe für das mit der Erde rotirende Coordinatensystem $\xi \eta \zeta$ ($x\, y\, z$ das feste im Weltraum, beider Mittelpunkt ist im Erdcentrum, die Axe des z und ζ ist Welt- und Erdaxe). Dann ist

bei Bruns:

$$\xi = x \cos wt + y \sin wt$$
$$\eta = -x \sin wt + \cos wt$$
$$\zeta = z,$$

wo die z-Axe nach dem Nordpol, die y-Axe östlich von der x-Axe angenommen ist. Hieraus wird

$$\xi'' = x'' \cos wt + \eta'' \sin wt + \\ + 2 w \eta' + w^2 \xi$$
$$\eta'' = -x'' \sin wt + \eta'' \cos wt - \\ - 2 w \xi' + w^2 \eta$$
$$\zeta'' = z''.$$

nach Kirchhoff:

in der dritten Auflage (1883) gerade so, vorher (1876) w mit dem entgegengesetzten Zeichen. Kirchhoff verwendet übrigens die nach x und y aufgelösten Gleichungen. (§ 1 Gl. 2).

Vergl. § 1 Gl. 4 und die Ausdrücke 5.

1) „Die Trägheitsbahn auf der Erdoberfläche, mit Berücksichtigung der Reibung", Mathem. Ann. J. 1883 S. 296—298.

2) S. oben Zusatz 1.

Ich setze jetzt mit **Bruns** die Kräftefunktion U der Erde ein, welche in diejenige der reinen Gravitation und diejenige der Centrifugalkraft $Q = \frac{1}{2} w^2 (x^2 + \eta^2) = \frac{1}{2} w^2 (\zeta^2 + \eta^2) = \frac{1}{2} w^2 r^2$ zerfällt und schreibe [3])

$$x'' = \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \qquad y'' = \lambda \frac{\partial U}{\partial y} \qquad z'' = \lambda \frac{\partial U}{\partial z},$$

wo λ eine beliebige Constante (Lagrange), so dass

$$\xi'' = \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \cos w t + \lambda \frac{\partial U}{\partial y} \sin w t + 2 w \eta' + w^2 \xi$$

$$\eta'' = - \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \sin w t + \lambda \frac{\partial U}{\partial y} \cos w t - 2 w \xi' + w^2 \eta$$

$$\zeta = \lambda \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cos w t$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \sin w t,$$

aber auch

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial \eta} \sin w t$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \cos w t,$$

also

$$\xi'' = \lambda \frac{\partial U}{\partial \xi} + 2 w \eta' + w^2 \xi$$

$$\eta'' = \lambda \frac{\partial U}{\partial \eta} - 2 w \xi' + w^2 \eta$$

$$\zeta'' = \lambda \frac{\partial U}{\partial \zeta}.$$

Vergl. **Kirchhoff** § 2 Gl. 9 und 10. Mittels seines § 1 Nr 5 hätte man diese Gleichungen sofort hinschreiben können. S. Zusätze 3 und 4.

Nun die Windrichtung: ψ sei der Winkel, dessen Nullwerth S-Wind und dessen Werth $\frac{\pi}{2}$ W-Wind bedeuten (an dem fraglichen Beobachtungsorte); dann ist $v \sin \psi$ die Geschwindigkeitscomponente längs des Breitenkreises und die doppelte Dreiecksfläche

$$r v \sin \psi = \xi \eta' - \eta \xi' \text{ (in der Ebene des Breitenkreises).}$$

3) Siehe oben Zusatz 2.

Durch Differenziren nach t, wobei ich v constant nehme (hierüber s. noch unten den 1. Zusatz), wird

$$r' v \sin \psi + r v \cos \psi \cdot \psi' = \xi \eta'' - \eta \xi'',$$

und beim Einsetzen für ξ'' und η'' sieht man gleich, dass deren mit w^2 behaftete Glieder jetzt ausfallen; desgleichen die mit U behafteten Glieder, da wir die Erde als Rotationskörper ansprechen, so dass nur die mit w behafteten Glieder rechts stehen bleiben:

$$r' v \sin \psi + r v \cos \psi \cdot \psi' = -2 w (\xi \xi' + \eta \eta')$$
$$= -2 w r r' \text{ (da } r^2 = \xi^2 + \eta^2).$$

Dabei ist r' die radial einwärts gerichtete Geschwindigkeit im Parallelkreis von der geographischen Breite φ, welche sich als Componente von $v \cos \psi$ aus beistehender Figur des Erdquadranten ergiebt. ($v \cos \psi$ ist die von S nach N gerichtete Componente des im vorletzten Absatze eingeführten SW-Windes, woselbst die andere Componente $v \sin \psi$ als Westwind erwähnt worden ist.) Also ist

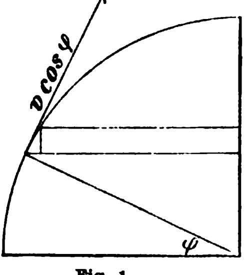


Fig. 1.

$$r' = -v \cos \psi \sin \varphi,$$

so dass nach dessen Substitution die Winkelgeschwindigkeit des Windes, welche den SW in W zu verwandeln strebt, also die nach rechts wirksame Ablenkung der Windrichtung

$$\psi' = 2 w \sin \varphi + \frac{v}{r} \sin \varphi \sin \psi;$$

das erste Glied derselben rührt allein her von der Umdrehung der Erde; des letzteren Gliedes wegen, von welchem Bruns nur kurz erwähnt, dass es von der Convergenz der Meridiane herrühre, will ich noch transformiren mittels $R \cos \varphi = r$, wo R der Aequator-Radius, in

$$\psi' = 2 w \sin \varphi + \frac{v}{R} \tan \varphi \cdot \sin \psi,$$

um hervortreten zu lassen, dass dieses zweite Glied, wie es bei S- und N-Wind Null ist und für W- und O-Wind am grössten positiv und negativ, auch beim W- und O-Wind in den praktischen Fällen meist gegen das erste Glied vernachlässigt werden kann.

Es ist nämlich $2w = 0{,}000054$ und für den beträchtlichen Werth $v = 10$ Secundenmeter

$$\frac{v}{R} \text{ noch unter } 0{,}000002;$$

die Multiplication hier mit tan φ und dort mit sin φ erhöht den kleinen Posten erst merklich gegenüber dem grösseren in sehr hohen Breiten.

1. Zusatz: Von der Reibung sagt Bruns, dass man a priori nicht wissen könne, ob sie nicht auch den Schlusswerth ψ' beeinflusse, und sein Calkul gibt die bestimmte Antwort Nein. Bei diesem Calkul ist v mit t veränderlich angenommen, so dass bei obiger Differenzirung von $r\,v \sin\psi$ drei Glieder entstanden. Ich habe dagegen v' als Null angenommen und glaube, dass jene apriorische Behauptung aufrecht erhalten werden kann.

2. Zusatz: Bruns hat in den Gleichungen, die nach Lagrange benannt zu werden pflegen, auch noch $\frac{\partial V}{\partial x}$ neben $\lambda \frac{\partial U}{\partial x}$ stehen und analog $\frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial V}{\partial z}$, wo „$V$ das Potential der Gravitation". Ich hatte darob am Schlusse des vergangenen Jahres eine kurze Notiz an die „Mathematischen Annalen" gesendet und erhielt dieselbe im Januar mit einem freundlichen Schreiben eines Mitgliedes der Redaktion zurück, worin zur Sache steht: „U ist die Kräftefunction der Erde, über die nicht weiter verfügt ist, als dass $U=$ const. die Gleichung der Erdoberfläche darstellt. Von U ist das Potential der äusseren Kräfte abgespaltet. Es enthalten die Gleichungen $x'' = \ldots$, $y'' = \ldots$, $z'' = \ldots$ in der ersten Colonne die äusseren Kräfte $\frac{\partial V}{\partial x}\ldots$, in der zweiten die Bedingung für die Bewegung auf der Oberfläche $\frac{\partial U}{\partial x}\ldots$ und in der dritten die Componenten der Reibung — wie es sein soll"[4]). Um nun zu zeigen, dass mit solcher „Abspaltung" für U nichts mehr übrig bleibt, habe ich schon oben Kirchhoffs „Mechanik" angeführt und bilde noch den

3. Zusatz. Kirchhoff rechnet in dem citirten § 2 die Schwungkraft der Schwerkraft ein, was oben nicht geschah, daher oben noch die Glieder $w^2\xi$ und $w^2\eta$ am geeigneten Orte auftreten (s. Anm. 1). Er hat allerdings dabei nicht die Form von Lagrange gebraucht, was hier auch gar nicht nöthig war, denn das obige $\lambda \frac{\partial U}{\partial \xi}$ ist mit Kirchhoffs $-g \cos\psi$ u. s. w. gleichbedeutend. Dagegen tritt bei Kirchhoff

4) Der Brief fährt fort und schliesst mit: „Die Componenten der Schwungkraft $\frac{\partial \theta}{\partial x}\ldots$, die hier selbstverständlich noch nicht stehen, treten ein, wenn das bewegliche Coordinatensystem der $\xi\,\eta\,\zeta$ eingeführt wird, nach den bekannten (und in Bruns' Aufsatz mitgetheilten) Formeln". Davon handelte auch meine der Math. Ann. offerirte Notiz nicht.

im § 3, welcher vom Foucault'schen Pendel handelt, ausser der ersten Colonne mit g, um mich der im vorigen Zusatz citirten Stelle wegen so auszudrücken, wirklich noch eine Colonne auf, d. i. die Bedingung, dass der pendelnde Körper auf der durch den Pendelfaden ihm vorvorgeschriebenen Kugelfläche bleibe, und hierzu tritt die Colonne der Glieder von Lagrange mit ihrem Factor λ jetzt nothwendig in Erscheinung. Die weitere Colonne mit w^1 ist sichtbar, diejenige mit w^2 steckt in g, wie eingangs dieses Zusatzes gesagt wurde.

4. Zusatz. Kürzere Darlegung des Problems:

Ein stationärer Südwest z. B. bewegt sich mit der horizontalen Geschwindigkeit v am Orte der geographischen Breite φ in der Geraden, die um ψ vom geographischen Meridian abweicht.

Man hat dann, da die Schwerkraft durch die Unterlage aufgehoben ist (und die Reibung schon im constanten v liegt) gemäss der obigen Beziehungen

$$\xi'' = 2w\eta' + w^2\xi, \quad \eta'' = -2w\xi' + w^2\eta, \quad \zeta'' = 0$$

(in oberen Gleichungen $U = 0$ angenommen) und das Uebrige wie oben.

Dies der höhere Calkul; auf elementarem Wege habe ich das Problem behandelt im heurigen Jahrgange der Blätter für das bayrische Realschulwesen. Dort ist auch das Hadley'sche Princip in das ihm gebührende (beschränkte) Recht eingesetzt, was in obiger Schlussgleichung für ψ' durch die Specialfälle $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ (S- und N-Wind) sich ausspricht.

Ueber die Constante des Gasgesetzes.

Von

A. Kurz.

Unter diesem Titel berechnet Herwig in seinen „Physikalischen Begriffen“ für atmosphärische Luft zuerst die dimensionenlose Zahl

$$A = 0{,}068,$$

und aldann „in der gewöhnlichen Darstellungsweise“

$$B = 29{,}3 \text{ Meter},$$

Ich will nun meine Bemerkungen hierzu, und was sich noch daran schliessen soll, unter folgenden Nummern zusammenfassen.

1. Die Zahl A hatte auch mich bestochen, bis ich jetzt bemerke, dass sie doch sehr umständlich gewonnen werden muss, indem man in

$$\frac{p\,v}{T} = \frac{p_0\,v_0}{273^0} = A$$

auch den Temperaturgrad auf dem Umwege über die Calorie als Quadrat einer Geschwindigkeit benutzt und den Factor g (Fallbeschleunigung einführt.

2. Wenn man der Meinung ist, dass es keinen Zweck hat, die Constante des Gasgesetzes losgelöst von diesem Gesetze zu betrachten, so erfüllt B viel kürzer seine Bestimmung in der Gleichung

$$\frac{p\,v}{T} = \frac{p_0\,v_0}{273} = B,$$

wobei allerdings der Temperaturgrad als blosse Einheit eingeführt ist (weshalb ich zum Unterschiede hier das Gradzeichen bei 273 wegliess).

Das p_0 ist hier $1033\,\frac{\text{Gramm}}{\text{Centimeter}^2}$; das specifische Volum v_0 ist $\frac{773}{1}\,\frac{\text{Centimeter}^3}{\text{Gramm}}$, wobei allerdings die Inconvenienz, aber nur scheinbar, eintritt, dass man das Gramm in zwei Bedeutungen, als Kraft- und als Masseneinheit gebraucht. Dieser Fehler wird bekanntlich durch

Beisetzung von g beseitigt. Aber, weil letzteres auf der linken und rechten Seite des Gasgesetzes geschehen müsste, fällt g doch wieder hinaus.

Wir bekommen also

$$\frac{p\,v}{T} = \frac{p_0\,v_0}{273} = B \text{ nahe 3000 Centimeter}$$

zur eventuellen Berechnung von p, v oder T, wenn die beiden anderen Grössen gegeben sind, in den genannten Einheiten bezw. $\frac{\text{Gramm}}{\text{Centimeter}^2}$ $\frac{\text{Centimeter}^3}{\text{Gramm}}$, 1° Celsius (vom absoluten Nullpunkte aus).

3. Ist hiermit die von Herwig bemängelte B gegenüber der von ihm auf den Schild erhobenen A gerechtfertigt, so lade ich noch zur Betrachtung einer dritten Constante C ein, die mir nirgends zu Gesicht gekommen ist, obwohl ihre Entstehung viel älteren Datums erscheinen könnte. Dieser scheinbare Widerspruch erklärt sich daraus, dass man vor 20 und noch mehr Jahren nicht die Constanten so kultivirte, also schrieb

$$\frac{p\,v}{1+\alpha t} = p_0\,v_0,$$

und dieses $p_0\,v_0$ will ich jetzt C nennen, also

$$C \text{ nahe } 8.10^5 \text{ Centimeter,}$$

oder 273 mal so klein als B.

Wozu dies? kann ein Kritiker fragen, und ich antworte: C hat vor B voraus, dass der Nenner $(1+\alpha t)$, worin $t=0$ zu setzen, jetzt wirklich eine reine Zahl bedeutet, während B noch mit dem Celsiusgrad als Einheit berechnet werden muss.

4. Während für technische Anwendungen die von mir mit den Zahlen 3000 und 800000 gebrauchte Annäherung oft noch mehr als hinreichend erscheinen wird (für atmosphärische Luft), gebt F. Neumann in seinen Vorlesungen [1]) strenge vor, indem er sagt, dass v_0 (s. oben) von Regnault für Paris gleich 773,27 gefunden worden sei, also „locale Bedeutung besitze für 48° 50′ Breite; 185 Fuss Meereshöhe und 0,76 Druck". Er reducirt sie hernach auf 45° Breite und den Meeresspiegel mittels des Ausdruckes

$$777{,}27\left(1-\frac{\cos 2\varphi}{384{,}2}\right)\left(\frac{r}{r+z}\right)^2,$$

1) „Einleitung in die theoretische Physik", herausgegeben von Pape 1883. (Vorlesung vom Wintersemester 1858/59.)

wo r der Erdradius und z die Meereshöhe von Paris ist, und findet 773,5. Ich habe diese Rechnung angestellt, indem ich annähernd schrieb statt der beiden Binome

$$\left(1+\frac{\sin 8^0}{400}\right)\left(1-2\frac{z}{r}\right)$$

oder $1+\frac{8\cdot\pi}{400\cdot 180}-\frac{2z}{r}$ oder $1+0{,}00035-0{,}00002$ oder $1+\frac{1}{3000}$, so dass ich 773,51 erhielt.

Als „Anwendung" berechnet alsdann Neumann für irgend einen Ort (φ, z) das Gewicht γ eines Luftvolums V

$$\gamma=\frac{V}{773{,}5}\left(1-\frac{\cos 2\varphi}{384{,}2}\right)\left(1-\frac{2z}{r}\right)$$

Gramme, wenn V Cubikcentimeter; also wird mein obiges

$$v_0=\frac{V}{\gamma}=\frac{773{,}5}{\left(1-\frac{\cos 2\varphi}{384{,}2}\right)\left(1-\frac{z}{r}\right)}=773{,}5\left(1+\frac{\cos 2\varphi}{400}+\frac{2z}{r}\right),$$

wie ich es zuletzt annähernd gefasst habe.

Somit wird der strenge Werth der fraglichen Constanten D aus C gebildet, indem man $p_0 v_0$ mit dem Normalwerth 773,5 schreibt und mit dem Correcturgliede

$$\left(1+\frac{\cos 2\varphi}{400}+\frac{2z}{r}\right)$$

versieht.

Für das Gedächtnis der letzteren dient, dass sowohl am Aequator $(\varphi=0)$ als in grossen Höhen (z) das specifische Volum der Luft wegen der Centrifugalkraft und der geringeren Nähe am Erdcentrum grösser sein muss.

Als Curiosum wird nochmal wiederholt, dass also jede Stadt auf der Erde ihre eigene Gasgesetzconstante hat.

5. Die vorhin angegebene Correctur ist dieselbe wie diejenige des g, welches ich übrigens möglichst ferne gehalten habe. Es hat geschichtliches Interesse, dass Poisson in seinem Traité de méc. § 624 schreibt

$$p=k\varrho(1+\alpha\theta)$$

und im § 625

$$k=(7951{,}12)\,G.$$

Darin ist also k unsere Constante und ϱ die specifische Masse der Luft; 7951 oder nahe 8000 ist in Metern das obige C; und $G=9{,}80896$ ist la gravité à la latitude (und in der Meereshöhe) de Paris. Voraus

gehen die Worte et dans cette valeur il faudra prendre pour G la gravité au lieu òu le rapport $\frac{m}{D}$ (das ist 13,6 durch 1 : 773) a été déterminé.

Man sieht aus der vorigen Nummer 4, dass der Factor G selbst nicht hierher gehört, wohl aber, wie es Neumann mit dem Normalparallel von 45° und dem Meeresspiegel ausführte, seine Correctur. Auch bei Poisson soll wohl, wie die von ihm über 7951,12 gemachte Klammer andeutet, das G nur eine Art von Suffix sein, und schliesst § 625 mit dem Beispiel für feuchte Luft

$$k = 7971{,}09 \text{ Meter,}$$

was noch mehr von dem Verdachte jenes Fehlers ablenkt. Aber unvollkommen blieb bei Poisson der Gedanke, welcher von Neumann klar gestellt wurde.

Die barometrische Höhenformel.

Zweite Mittheilung.

Von

A. Kurz.

Ich knüpfe an meine erste Mittheilung im vorigen Jahrgange S. 593—595 an mit der Formel

$$H = 18400\,(\log b_0 - \log b_1) \text{ Meter} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1$$

indem ich aber jetzt ausdrücklich 18400 schreibe statt des dortigen 18200, da die Division von (log 760 — log 759) in 10,5 Meter gleich gut 18300 und 18400 erscheinen lässt. Man könnte auch 18350 nehmen, aber ich halte dies für überflüssig [1]).

A. Einfluss der Temperatur und Feuchtigkeit.

Kohlrausch sagt in seinem „Praktikum", dass man „für gewöhnlich rechne"

$$18420\,(\log b_0 - \log b_1)\,(1 + 0{,}004\,t),$$

wobei t das arithmetische Mittel der unten und oben geltenden Temperaturen t_0 und t_1. In dem (kleingedruckten) „Beweis der hypsometrischen Formel" wird neuerdings (6. Aufl. 1887) der veränderte Artikel 16 citirt, worin das $(1 + 0{,}004\,t)$ statt $(1 + 0{,}00367\,t)$ zum ersten Male auftaucht.

Rühlmann hat in seiner Logarithmentafel (Leipzig 1883 Arnold) S. 266 die Zahl 18400,2, als ob sogar die Zifferstelle der Zehntel feststünde, und den Temperaturfactor $(1{,}00157 + 0{,}00367\,t)$.

Woher diese Erhöhung des 1. Summanden (über 1) und jene des 2. Summanden, habe ich mich zunächst gefragt. Darüber fand ich im (grossgedruckten) Texte bei Kohlrausch nur die Worte „dass ein mittlerer Feuchtigkeitsgehalt der Luft vorausgesetzt" sei und im

1) 18200 scheint von einem Druck- und Correcturversehen herzurühren.



„Beweise“, dass für die „unbekannte Luftfeuchtigkeit man die halbe Sättigung annimmt, und den Einfluss des Wasserdampfes in die Dichigkeit und den Ausdehnungscoefficienten der Luft aufnimmt“. Wirklich schreibt Kohlrausch auch später, nachdem er die Feuchtigkeit e_0 und e_1 an beiden Stationen beobachtet voraussetzt,

$$18405\,(\log b_0 - \log b_1)(1 + 0{,}00367\,t)(1 + \tfrac{3}{8}\,k),$$

wo

$$k = \tfrac{1}{2}\left(\frac{e_0}{b_0} + \frac{e_1}{b_1}\right).$$

Indem ich nunmehr auch zu meiner obigen Gleichung (1) die Berücksichtigung des Thermo- und Hygrometers hinzufüge, erinnere ich an das Werden der obigen Zahl 10,5 aus der Gewichtsbilanz

$$\text{Luft } 1050\,\tfrac{1}{773} = (76{,}0 - 75{,}9)\cdot 13{,}6 \text{ Quecksilber},$$

wobei die durch Erwärmung und Wasserdampfbeimischung verdünnte Luft eine höhere Stufe als 10,5 m aufweist, bis das Barometer um 1 mm fällt an der Meeresküste. Also kommt

$$H = 18400\,(\log b_0 - \log b_1)(1 + \tfrac{1}{273}\,t)(1 + \tfrac{3}{8}\,k) \quad . \quad . \quad . \quad (2$$

woraus zu ersehen, dass man den Einfluss des Wasserdampfes nur in die Dichte, nicht auch in den Ausdehnungscoefficienten aufnehmen darf. Wollte man letzteres doch durch Aufrundung auf 0,004 motiviren, so wäre das schon bei $t = 10^\circ$ einer Erhöhung von H um 3,3 pro Mille gleichbedeutend oder wie wenn man die Zahl 18400 um 60 erhöhen würde. Analog ist auch Rühlmann's angeführtes Verfahren zu beurtheilen. Es zeigt sich dabei noch, dass der der Zahl 18400 anhaftende Grad von Ungenauigkeit im Hinblick auf diese beiden Correcturen gewissermassen schadlos wird. Aber wenn ich auf diese Art die 4. und 5. Zifferstelle von 18400 als durch die Messungen unerhältlich preisgebe, so ist es andrerseits consequent, dass ich die 3. Stelle zu erhalten suche [2]).

Vorübergehend will ich noch den Factor $(1 + \frac{3}{8}\,k)$ ableiten durch das Beispiel, dass in der ganzen Luftsäule vom variablen Barometerstande b der Wasserdampf die variable Druckhöhe e ausmache, so dass $e : b$ constant sei; dann wird die Bilanz:

$$\text{Gas } h \cdot \frac{1}{773} \cdot \frac{(b - e)\,1 + e\,\frac{5}{8}}{b} = 0{,}1 \cdot 13{,}6 \text{ Quecksiber},$$

das ist auch

$$h \cdot \frac{1}{773}\left(1 - \frac{3}{8}\,\frac{e}{b}\right) = 1{,}36,$$

2) Die Reduktion wegen der Temperatur des Quecksilbers bringt man bei b_0 und b_1 an. S. u. a. Kohlrausch's besonderen Art. S. ferner den Schlusssatz von Anm. 5.

oder annähernd

$$h \cdot \frac{1}{773} = 1{,}36\left(1 - \frac{3}{8}\,\frac{e}{b}\right).$$

Zur Schätzung dieses Einflusses der Feuchtigkeit auf das Resultat H in (Gl. 2) mag $e_0 = 20$, $e_1 = 5$, $b_0 = 700$, $b_1 = 500$ betragen; dann wird

$$1 + \frac{3}{8}k = 1 + \frac{81}{11200}, \text{ das ist unter } 1 + \frac{1}{100},$$

d. h. die 3. Zifferstelle von 48400 wird hierdurch kaum beeinflusst, womit der Schluss des vorletzten Absatzes verglichen werden möge.

B. Ueber den Einfluss der Variation der Schwere.

Dieser Einfluss ist ein zweifacher, wegen der geographischen Breite und wegen der Höhe (über dem Meere). Wegen der ersteren steht in den genannten und anderen Büchern bei obiger Formel (2) rechts noch ein Factor, den ich zur Bequemlichkeit

$$1 + \frac{1}{400}\cos 2\psi$$

nennen will, da er besagen soll, dass die Fallbeschleunigung auf der Erde vom Aequator bis zum Pole um 5 pro Mille rund variirt, was im äussersten Falle, vom Aequator bis zum Pole, für den obigen Factor 18400 nur 92 ausmachen würde.

Wegen der Meereshöhe schreibt Kohlrausch noch den Factor hinzu

$$1 + 0{,}0000002 \cdot z,$$

wo z die mittlere Meereshöhe der gemessenen Höhendifferenz sein soll. Wäre z auch 5000 m, so gäbe dies nur 1 pro Mille an der Stelle der 5 im vorigen Absatze. Aber ich habe überdies schon im vorletzten Jahrgange des Repertoriums S. 207 dargelegt, dass letztere Summe aus

$$1 + \frac{5}{4}\,\frac{z}{r}$$

bei Poisson herrührt und zwar von einer ganz anderen Stelle seines Werkes. Dagegen für das Barometer, § 621 u. f., verwendet Poisson richtiger das ganz einfache Gravitationsgesetz, indem er die Gleichung

$$dp = -g'\varrho\,dz,$$

wo

$$g' = g\left(\frac{r}{r+z}\right)^2$$

und

$$p = k\,\varrho\,(1 + \alpha\theta).$$

integrirt und findet

$$\log \text{nat} \frac{p_0}{p} = \frac{g r z}{k(1+\alpha\theta)(r+z)}, \text{ im § 626 }^{3}).$$

Aber im § 628 (627 handelt vom Luftballon) setzt Poisson

$$p_0 = m g b_0, \ p = m g' b = m g \left(\frac{r}{r+z}\right)^2 b,$$

wobei m die Masse der Gewichtseinheit des Quecksilbers vorstellt, so dass er (und nach ihm Duhamel in seiner Mechanik)

$$H = \frac{k(1+\alpha\theta)}{g \cdot 0{,}434\,..} \left[\log_{10} \frac{b_0}{b} + 2 \log_{10} \left(1 + \frac{z}{r}\right)\right] \left(1 + \frac{z}{r}\right)$$

findet, also mit zwei Correcturstellen wegen der Meereshöhe.

Und wegen der Breitencorrection centralisirt er wieder für Paris, wie ich schon in meiner vorausgehenden Mittheilung über die Constante (k) des Gasgesetzes auseinandergesetzt habe, so dass ich ihn jetzt verlasse und wieder zu F. Neumann's „Einleitung in die theoretische Physik" übergehe.

Daselbst ist im § 43 („Barometrische Höhenmessung") mit der gemäss dem Vorigen abgeänderten Bezeichnung

$$dp = -g' \varrho\, dz, \quad p = m g' b, \quad dp = m g'\, db,$$

$$\varrho = \frac{1}{773{,}27} \cdot \frac{b}{76} \cdot \frac{1 - \frac{1}{400} \cos 2\varphi}{1 + \alpha t} \left(1 - 2\frac{z}{r}\right) \text{ für trockene Luft}^{4}).$$

Hieraus folgt

$$m\, db = -\varrho\, dz \text{ und}$$

$$\frac{773 \cdot m \cdot 76}{1 - \frac{1}{400} \cos 2\varphi} \cdot (1 + \alpha t) \cdot \frac{db}{b} = -\left(1 - 2\frac{z}{r}\right) dz,$$

und durch Integration zwischen den Grenzen $b_o\, b_u\, z_o\, z_u$

$$\frac{773 \cdot m \cdot 76}{1 - \frac{1}{400} \cos 2\varphi} \cdot (1 + \alpha t) \log \text{nat} \frac{b_u}{b_o} = \left(1 - \frac{z_o + z_u}{r}\right)(z_o - z_u).$$

Für m setze ich kurzweg 13,6 und dividire noch links mit dem Modul 0,434 ..., um Brigg'sche Logarithmen zu erhalten, alsdann

3) Die naheliegende Annäherung $g' = g\left(1 - 2\frac{z}{r}\right)$ hat Poisson hier nicht benutzt; mit ihr wäre $\log \text{nat} \frac{p_0}{p} = \frac{g(r-z)z}{k(1+\alpha\theta)r}$ geworden.

4) Neumann hat $\frac{1}{384{,}2}$ statt meines $\frac{1}{400}$; dagegen habe ich seine Zahl 773,27 noch abgekürzt in 773. Wegen des obigen letzten Factors vergl. Anm. 3. Wegen z bitte ich zu unterscheiden, dass es weiter oben ausdrücklich als mittlere Meereshöhe, hier aber als allgemeine (variable) Meereshöhe gilt: hernach habe ich jene mittlere Meereshöhe mit Neumann als $\frac{1}{2}(z_o + z_u)$ bezeichnet (z oben und unten).

wird, mit Einführung meiner obigen Zahl 18400, und indem ich die corrigirenden Factoren (wegen der Temperatur, Breite und Höhe) in erlaubter Weise auf die rechte Seite anordne,

$$z_o - z_u = 18400 \log \frac{b_u}{b_o} \cdot (1 + \alpha t)\left(1 + \frac{1}{400}\cos 2\varphi\right)\left(1 + \frac{z_o + z_u}{r}\right) \text{ Meter,}$$

was mit (Gl. 2) verglichen werden möge. Von dort her kommt noch die Correctur wegen der Luftfeuchtigkeit mit dem Factor $(1 + \frac{3}{8} k)$ dazu, so dass die endgiltige Formel lautet

$$z_o - z_u = 18400 \log \frac{b_u}{b_o} \cdot \left(1 + \alpha t + \tfrac{3}{8} k + \frac{\cos 2\varphi}{400} + \frac{z_o + z_u}{r}\right) \text{ Meter} \quad . \; . \; (3$$

Elementare Ableitung des Einflusses der Schwere-Variation:

Die vorhergehende Verwendung des Differential- und Integralkalkuls ist nicht nothwendig und geschah nur, um die fehlerhafte Formel Poissons gegenüber der richtigen Entwicklung Neumann's geschichtlich darzulegen. Da die oft gebrauchte Zahl 773 ein Factor derjenigen 18400 ist, so sind auch die Factoren

$$\left(1 + \frac{\cos 2\varphi}{400}\right) \text{ und } \left(1 + \frac{z_o + z_u}{r}\right)$$

mit jener Zahl schon elementar erläutert wie in meiner vorigen Mittheilung über die Constante des Gasgesetzes. Strenger richtig wäre die Neumann'sche Zahl 773,5 für den 45. Parallel und den Meeresspiegel, aber auf diesen Unterschied von $\frac{5}{8}$ pro Mille, welcher bei der Zahl 18400 erst in der Zehnerziffer sich bemerkbar macht, kann es bei dem vorwürfigen Thema gegenüber den unsicheren Annahmen über Temperatur und Feuchtigkeit der Luft nicht mehr ankommen.

Zusatz:

Gemäss Anmerkung 1 schreibe ich nunmehr in meiner Gleichung (7) der ersten Mittheilung den Factor 8000 statt 7900, wobei nur die beiden ersten Ziffern auf Genauigkeit Anspruch machen. Auch Kohlrausch hat 8000; aber die Einführung des mittleren [5]) Barometerstandes unterbleibt wie in der ersten Mittheilung, so dass bis zu rund 800 m Höhe als Annäherung gilt

$$z_o - z_u = 8000 \cdot \frac{b_u - b_o}{b_u} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3'$$

---

5) Dagegen t und k in (Gl. 3) sind Mittelwerthe, wie auch etwa φ und gewiss $\frac{1}{2}(z_o + z_u)$. Das oben besprochene $\alpha = 0{,}004$ statt 0,00367 setzt Poisson (§ 628) pour la commodité du calcul.

Nachtrag.

Soeben (nachdem Vorstehendes mehrere Wochen vollendet in meiner Mappe gelegen) brachte das Repertorium S. 261—311 die „Untersuchungen über das Gesetz der Temperaturabnahme in der Verticalen etc.“ von Dr. Korselt, in welchen ich einstweilen bemerkte: S. 261 für die absolute Temperatur T gesetzt $(1 + \alpha t)$, welches Versehen indes weiterhin keinen Einfluss übte; alsdann Rühlmann's Formel auf S. 274 mit den zwei Correcturen wegen der Höhe, darunter auch das Glied mit $\frac{5}{4}$ u. s. w. (s. oben bei mir Theil B); und S. 275 unter Wüllner's Namen die Formel ohne Höhencorrection mit dem Factor 18405 (s. oben Theil A).

Berichtigung.

Bei der in Heft 5 mitgetheilten Abhandlung des Herrn Dr. L. Grunmach über ein elektrisches Contactthermometer fehlt der Vermerk, dass dieselbe vom Herrn Verf. aus der Zeitschr. f. Instr. 1889 mitgetheilt wurde.

In Heft 6 fehlt auf S. 377, am Ende der Abhandlung von O. Chwolson die Bemerkung: „Schluss folgt“.

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:	Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert & Co., Kommandit-Gesellschaft, Nürnberg. (17/9)	Fabrik elektrischer Maschinen für Beleuchtung, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.
Hartmann & Braun, Bockenheim-Frankfurt a/M.	Elektrische und magnetische Messinstrumente. Vollständige Einrichtungen von Laboratorien

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 10. Heftes.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1890.

DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Ueber die latente Siedewärme und ihre Abhängigkeit von anderen beobachtbaren physikalischen Grössen.

Von

K. Kraïewitsch.

1. Man hat sich öfters bestrebt, den Zusammenhang zwischen dem Wärmeverbrauch beim Sieden und anderen physikalischen Grössen zu ermitteln. Die theoretische Formel von Clapeyron-Thomson kann dabei nicht in Betracht genommen werden, da sie zwei Grössen (die Dichtigkeit des gesättigten Dampfes und den ersten Differentialquotienten der Dampfspannung nach der Temperatur) enthält, deren experimentelle Ermittlung sehr grosse Schwierigkeiten bieten. Als das beste in dieser Richtung muss das Gesetz von Berthelot anerkannt werden, welches sich durch seine Einfachheit auszeichnet, nämlich das Gesetz, wonach das Product der Siedewärme und des Moleculargewichts eine constante Grösse ist. Dieses Gesetz muss aber nur als Annäherungsgesetz betrachtet werden, da das betreffende Product eigentlich nicht constant ist; für Quecksilber ist dieses Product 15400, für Wasser 9700 und für Chloroform nur 6600. Mit Ausnahme des Wassers und des Quecksilbers sind die Zahlen, welche das betreffende Product ergibt, einander so ziemlich nahe, und somit kann das Berthelot'sche Gesetz als die erste Annäherung eines wirklichen Naturgesetzes betrachtet werden. Man kann dieses Gesetz nur insofern anfechten, als darin der Einfluss der Temperatur nicht sichtbar ist und dass mit der Erhöhung des Siedepunctes die latente Wärme sich vermindert. — Schiff[1]) gibt für mehrere Körper der allgemeinen Formel $C_n H_{2n} O_2$ und auch für einige Kohlenwasserstoffe folgendes Gesetz an:

$$\frac{P \cdot r}{T} = \text{const.},$$

wo P das Moleculargewicht, r die Siedewärme und T die absolute Siedetemperatur bedeuten. Diese Formel kann auch nicht als Natur-

1) Liebig's Annalen, 6, 234.

gesetz betrachtet werden, da sie eine Verminderung der Siedewärme mit der Temperaturerhöhung erfordert, während in der Wirklichkeit für alle bis jetzt untersuchten Flüssigkeiten gerade das Gegentheil gilt.

2. Auf Grund theoretischer Betrachtungen habe ich einen verwickelteren Ausdruck für die betreffende Abhängigkeit gefunden, nämlich folgenden:

$$r = A \cdot D \cdot T \cdot \log \frac{1000\,d\,c}{A\,p\,\alpha} + \frac{3}{2} A\,D\,T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1$$

wo r die Siedewärme, unter dem Drucke p (letzteres in kg ausgedrückt) und bei der Temperatur T, auf die absolute Null bezogen, bedeutet; D entspricht demjenigen Zustande des Dampfes, wo letzterer vollständig den Boyle-Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetzen folgt, und in solchem Falle ist bekanntlich $D = \frac{848,7}{P}$, wo P das Moleculargewicht bedeutet. Durch d ist das specifische Gewicht bei 0° bezeichnet, c und α bedeuten die specifische Wärme resp. den cubischen Ausdehnungscoefficienten beim Siedepunkte und das Symbol log den Neper'schen Logarithmus. Die Formel (1) enthält keine willkürlichen Grössen.

Sie kann in eine einfachere Gestalt gebracht werden, indem man anstatt 848,7 die runde Zahl 850 setzt. Alsdann ist

$$A\,D = \frac{2}{P}.$$

Substituirt man ausserdem anstatt $\frac{3}{2}$ die Grösse

$$e^{\log \frac{3}{2}}$$

(wo e die Basis der Neper'schen Logarithmen bedeutet) und verwandelt man die Neper'schen Logarithmen in gewöhnliche, so hat man:

$$r = \frac{2\,T}{P} \cdot M \operatorname{Log} \frac{N\,d\,c}{p\,\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2$$

wo

$$\operatorname{Log} M = 0,36222 \text{ und } \operatorname{Log} N = 6,27983.$$

Dieser Formel zufolge scheint r mit der Siedetemperatur zu wachsen; in der That aber nimmt der logarithmische Coefficient bei T in so bedeutendem Maasse ab, dass die Grösse r im allgemeinen abnimmt. Multiplicirt man die Gleichung mit P, so findet man:

$$P\,r = 2\,T \cdot M \cdot \operatorname{Log} \frac{N\,d\,c}{p\,\alpha},$$

und hieraus

$$\frac{P\,r}{T} = 2\,M \cdot \operatorname{Log} \frac{N\,d\,c}{p\,\alpha};$$

unter diesen beiden Formeln würde erstere mit dem Berthelot'schen Gesetze übereinstimmen, wenn die Grösse

$$2\,T \cdot M \cdot \mathrm{Log}\,\frac{N d c}{p a}$$

constant wäre, und die zweite würde mit der Schiff'schen Formel identisch sein, wenn sich nicht die Grösse

$$2\,M \cdot \mathrm{Log}\,\frac{N d c}{p a}$$

mit wachsender Temperatur verändern möchte. In der That nimmt letztere Grösse ziemlich rasch ab, so dass dieses Gesetz weniger der Natur der Dinge entspricht, als das von Berthelot.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei Capitel: im ersten wird die Anwendung der Formel (2) auf mehrere Flüssigkeiten dargethan, im zweiten dagegen werden die theoretischen Gründe, welche zu ihrer Entwicklung dienten, auseinandergesetzt. Ich schicke den practischen Theil dem theoretischen voraus, da, wie fest die Gründe der theoretischen Auseinandersetzungen auch sein mögen, die letzteren nur insofern beachtenswerth sind, als ihre Schlüsse mit der Beobachtung in Uebereinstimmung stehen.

I.

1. Es muss zunächst bemerkt werden, dass die uns interessirende Formel nicht den genauen Ausdruck vorstellt, sondern die erste Annäherung des genauen Ausdruckes desjenigen Gesetzes, welchem die latente Siedewärme gehorcht. Diese Formel ist weder für grosse Drücke brauchbar, noch für solche Temperaturen, welche der des absoluten Siedens (nach Mendeleïeff) oder der sog. (nach Andrews) kritischen Temperatur nahe sind. Ausserdem ist diese Formel auch für solche Flüssigkeiten unbrauchbar, welche beim Sieden Veränderungen chemischer Natur erleiden. Endlich gilt sie auch für Mischungen verschiedener Flüssigkeiten nicht.

2. Es existieren nur sehr wenig Flüssigkeiten, für welche die nöthigen Grössen bekannt sind, und namentlich die Grössen r und c. Ich habe nur 45 solche Flüssigkeiten auffinden können, aus denen nur 21 in der Tabelle I angeführt sind. Die Daten sind den Werken von Regnault[1]) und anderen Quellen, hauptsächlich den Landolt'schen Tabellen[2]) entnommen. Die in meiner Tabelle vorkommenden Abkürzungen sind folgende: A. — Andrews, K. — Kopp, H. — Hirn, R. — Regnault, M. — Mendeleïeff, Rb. — Riban, T. — Thorpe,

1) Annuaire pour 1886, publié par le Bureau des longitudes.

2) Physik.-chem. Tabellen von Landolt und Börnstein, 1883.

Rs. — Rosetti, Ps. — Pisatti und Patterno, L. — Linnemann, Ld. — Landolt, FS. — Favre und Silbermann, Br. — Brix, B. — Berthelot, P. — Pierre, O. — Ogier, Sch. — Schiff, Pin. — Pinette. Sämmtliche r sind auf 760 mm bezogen und es ist $p = 10333$ kg angenommen. Manche Grössen sind von mehreren Gelehrten ermittelt worden; in solchem Falle ziehe ich die neueren und die von berühmteren Gelehrten ermittelten Grössen vor. Schienen mir verschiedene Zahlen von gleicher Wahrscheinlichkeit zu sein, so nahm ich daraus das arithmetische Mittel. So fanden z. B. Favre und Silbermann für die Siedewärme des Terpentinöls 68,73 und Brix 71,04; in diesem Falle habe ich das arithmetische Mittel beider Zahlen vorgezogen. Für Schwefelkohlenstoff haben wir die Zahlen von Person und von Andrews; ich habe die Zahl des letzteren, als die von einem neueren und zuverlässigeren gefundene vorgezogen. Es ist sehr beachtenswerth, dass sich die von verschiedenen Gelehrten für die Siedewärme ermittelten Daten von einander bedeutend unterscheiden. Es unterscheidet sich z. B. die von Favre und Silbermann ermittelte Zahl für essigsaures Aethyl von der von Andrews ermittelten um 14 %; für Schwefelkohlenstoff unterscheiden sich die Daten derselben Gelehrten sogar um 22 %. Die Dichtigkeit d muss man in der Formel (2) auf die O^0 (für die Flüssigkeit) und auf 4^0 (für das Wasser) beziehen. Daten dieser Art gibt es sehr wenig und die vorhandenen widersprechen einander ziemlich stark; in solchen Fällen ziehe ich die Daten berühmter Gelehrter denjenigen, welche von weniger berühmten herrühren, vor. In der letzten Columne sind die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Daten angegeben.

Für die ersten fünf Flüssigkeiten ist die Differenz nicht grösser als um 2%; diese Uebereinstimmung meiner ungenauen Formel mit den Ergebnissen der Beobachtung scheint mir zu gross zu sein, und ich schreibe sie natürlich nur einem Zufalle zu. Im allgemeinen aber kann man die Formel für die ersten 17 Flüssigkeiten als vollkommen betrachten, weil die betreffende Differenz nicht über 8% steigt. Für drei Alkohole, nämlich für den Methyl-, Aethyl- und Amylalkohol kann man, meiner Ansicht nach, die Resultate nicht für genügend halten. Man muss aber dabei nicht vergessen, dass die Siedewärmebestimmungen von verschiedenen Forschern ausgeführt, sich noch mehr von einander unterscheiden, im oben angeführten Falle sogar um 22 %. Ausserdem stellt, nach Regnault, der gewöhnliche Alkohol solche Unregelmässigkeiten dar, dass man den Bestimmungen der specifischen Wärme und ganz besonders der Siedewärme kein Zutrauen schenken darf. Sind nicht etwa auch dem Methyl- und dem Amylalkohol dieselben Unregelmässigkeiten eigen, welche den Aethylalkohol auszeichnen?

Tabelle I.

Substanz	c	Beobachter	1000 d	Beobachter	$\frac{d\Delta}{dt}$	r beobachtet	Beobachter	r berechnet	Diff. %
Jodaethyl C_2H_5J	0,17341	Regnault	1931	M.	0,00 15169	46,87	A.	46,52	+1
Terpentinöl $C_{10}H_{16}$	0,50679	Regnault	875	Rb.	11781	68,73 74,04	F.S. Br.	70,41	—1,5
Chloroform $CHCl_3$	0,23878	Regnault	1527	T.	14887	60,77	R.	59,90	+1,5
Brom Br_2	0,1071	A.	3120	P.	12522	45,60	A.	44,53	+2
Zinnchlorür $SnCl_4$	0,1402	Regnault	2278,8	T.	16084	30,53	A.	31,06	—2
Aethyläther $C_4H_{10}O$	0,54971	Regnault	736,58	K.	18247	90,17	R.	87,70	+3
Schwefelkohlenstoff CS_2	0,24306	Regnault	1293,1	T.	13927	86,67	A.	89,14	—3
Bromaethyl C_2H_5Br	0,2225	Regnault	1419	M.	15303	61,65	B.	59,85	+3
Chlorkohlenstoff CCl_4	0,20902	Regnault	1629,8	P.	15614	46,35	R.	47,99	—3,5
Phosphorchlor PCl_3	0,1987	Regnault	1612,7	T.	14622	51,42	A.	53,44	—4
Aceton C_3H_6O	0,55109	Regnault	814,40	„	20455	128,7	R.	121,07	+6
Wasser H_2O	1,013	Regnault	999,87	Rs.	07636	536,5	R.	510,66	+5
Benzol C_6H_6	0,43602	Regnault	899	Ps.	15382	93,45	Sch.	96,77	—4
Chloraethyl C_2H_5Cl	0,42760	Regnault	917	L.	16523	89,30	R.	93,81	—5
Aethylenbromid $C_2H_4Br_2$	0,17553	Regnault	2163	P.	13374	43,78	B.	46,44	—6
Essigsaures Aethyl $C_4H_8O_2$	0,60515	Regnault	898	M.	17226	83,1	Sch.	85,96	—3
Quecksilber Hg	0,0335	K.	13596	R.	01967	77,0	B.	81,3	—6
Meta-Xylol C_8H_{10}									
Methylalkohol CH_4O	0,645	K.	796	Ld.	14272	263,7	A.	232,2	+12
Aethylalkohol C_2H_6O	0,71126	H.	806,5	M.	13476	202,4	A.	170,9	+15
Amylalkohol $C_5H_{12}O$	0,69345	R.	814	Ld.	18175	121,37	F.S.	100,54	+17

Tabelle II.

	c	$1000\,d$	$\frac{d\Delta}{dt}$	Beobachtetes r	Berechnetes r	%
$C_4H_8O_2$			0,00			
Propionsaurer Methylester . .	0,5119	937,25	19918	84,1	85,2	—1
Ameisensaurer Propylester . .	0,5129	918,88	18265	85,3	86,0	—1
$C_5H_{10}O_2$						
Isobuttersaurer Methylester . .	0,5228	911,18	18649	75,5	76,5	—1
Ameisensaurer Isobutylester . .	0,5278	885,54	16493	77,0	78,5	—2
Propionsaurer Aethylester . .	0,5281	912,38	17992	77,1	78,1	—1
Essigsaurer Propylester . . .	0,5303	909,09	18727	77,3	78,4	—2
Buttersaurer Methylester . . .	0,5316	919,39	17520	77,3	79,8	—3
$C_6H_{12}O_2$						
Isobuttersaurer Aethylester . .	0,5385	890,87	23517	69,1	69,2	0
Valeriansaurer Methylester . .	0,5443	900,65	18568	70,0	72,0	—3
Essigsaurer Isobutylester . . .	0,5439	892,10	15731	69,9	73,0	—4½
Buttersaurer Aethylester . . .	0,5471	899,57	18224	71,5	72,8	—2
Propionsaurer Propylester . .	0,5491	901,92	17456	71,5	73,5	—3
$C_7H_{14}O_2$						
Isobuttersaurer Propylester . .	0,5594	884,82	18014	63,9	67,4	—5½
Valeriansaurer Aethylester . .	0,5598	885,14	18149	64,7	67,4	—4
Propionsaurer Isobutylester . .	0,5620	887,60	18609	66,0	67,7	—2½
Buttersaurer Aethylester . . .	0,5672	901,65	17700	66,2	69,2	—4½
$C_8H_{16}O_2$						
Isobuttersaurer Isobutylester .	0,5706	874,96	18963	60,0	62,5	—4
Valeriansaurer Propylester . .	0,5788	880,92	18881	61,2	64,0	—4½
Buttersaurer Isobutylester . .	0,5797	881,78	20765	61,9	63,6	—3
$C_9H_{18}O_2$						
Valeriansaurer Isobutylester . .	0,5901	873,60	19939	58,9	59,9	—2

Für essigsaures Methyl und ameisensaures Aethyl sind die spezifischen Wärmen nicht bestimmt worden; da aber diese Stoffe von der allgemeinen Form $C_n H_{2n} O_2$ sind, so habe ich mir erlaubt, ihre spezifischen Wärmen nach der Schiff'schen Formel zu berechnen. Was dagegen das essigsaure Amyl anbelangt, so sind mir alle Daten vom Professor Konowaloff liebenswürdig mitgetheilt worden, in dessen Laboratorium dieses Amyl untersucht worden war, und spreche ich bei dieser Gelegenheit dem Herrn Konowaloff dafür meinen innigsten Dank aus.

Ich habe in meiner Tabelle den Chlorschwefel S_2Cl_2 nicht eingeführt infolge der Veränderlichkeit seiner chemischen Structur; er enthält manchmal zu viel Schwefel, manchmal dagegen zu viel Chlor. Und es unterscheidet sich auch die für diesen Stoff berechnete Siedewärme (65,06) von der beobachteten (49,37) ziemlich stark. Letztere

Zahl hat Ogier[1]) nur an einem Versuche ermittelt, und dabei ist der Druck nicht angegeben. Die in der Tabelle II für 23 Aether (von der Form $C_n H_{2n} O_2$) angegebenen Daten sind den Untersuchungen von Elsässer[2]) und Schiff[3]) entnommen: Elsässer habe ich die Siedepunkte, specifischen Gewichte und Ausdehnungscoefficienten und Schiff die specifischen und Siedewärmen entnommen. Letzterer hat gezeigt, dass die von ihm untersuchten Stoffe von der Form $C_n H_{2n} O_2$ in ihren specifischen Wärmen ziemlich genau der Formel

$$0{,}4416 + 0{,}00088\,t$$

genüge leisten. Diese Formel habe ich bei Berechnung der specifischen Wärmen in der Nähe der Siedepunkte benutzt. Die Differenzen der Tabelle II sind ziemlich klein und deshalb kann man die Formel (2) als bestätigt durch Beobachtung annehmen.

3. Es existiren sehr wenig Daten über die Temperaturen des Siedens sämmtlicher Flüssigkeiten unter verschiedenen Drücken. In dieser Hinsicht untersuchte Flüssigkeiten habe ich nur sieben auffinden können[4]). Ihre specifischen und Siedewärmen habe ich Regnault entnommen. Die ersten drei Flüssigkeiten (Benzol, Chloroform und Aceton) sind, von 0° bis zu einer Temperatur, welche der Temperatur des Siedens nahe war, unter gewöhnlichem Druck, in Betracht gezogen worden. Für höhere Temperaturen gibt es keine Daten für die specifischen Wärmen und Ausdehnungscoefficienten; nur für Wasser, Schwefelkohlenstoff, Aethylester und Chlorkohlenstoff habe ich die nöthigen Zahlen bei Hirn[5]) gefunden; die specifischen Wärmen sind für Wasser Regnault's Arbeiten, die Ausdehnungscoefficienten unter 100° Rosetti's und über 100° Hirn's Arbeiten entnommen. In den nachstehenden Tabellen gibt jede erste horizontale Reihe die Siedetemperaturen an, jede zweite die respectiven Drücke in Millimetern, jede dritte die beobachteten, und jede vierte die berechneten Siedewärmen. In der fünften Zeile jeder Tabelle sind die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Siedewärmen angegeben. Manche Zahlen, welche die berechnete und beobachtete latente Siedewärme in der Nähe des Normaldruckes ausdrücken, stimmen nicht vollkommen mit denjenigen der Tabelle I überein, weil erstere verschiedenen Quellen entnommen, letztere dagegen auf Grund verschiedener Quellen selbstständig berechnet wurden.

1) Compt. R., t. 92, p. 922.
2) Liebig's Annalen, Bd. 218.
3) Liebig's Annalen, Bd. 234.
4) Compt. R., t. 92, p. 922.
5) Annales de chimie et de physique, p. 4, t. X.

Tabelle III (Benzol).

t	0°	20°	40°	60°	80°
h	25,3	75,6	183,6	390,1	751,8
r_1	107,0	105,2	101,1	97,0	92,8
r	100,3	99,1	98,4	97,7	96,9
%	8	6	3	−1	−4

Tabelle IV (Chloroform).

t	0°	20°	40°	60°
h	60,0	160,5	366,4	750,9
r_1	67,0	65,1	63,1	61,1
r	61,3	60,4	59,9	59,5
%	8½	7	5	1

Tabelle V (Aceton).

t	0°	20°	40°	60°
h	52,4	179,6	420,2	860,5
r_1	140,5	136,3	133,4	128,8
r	127,2	123,7	122,4	121,2
%	9½	9	8	6

Tabelle VI (Wasser).

t	20°	40°	60°	80°	100°	120°	140°	160°	180°
h	17,39	54,91	148,79	354,64	760	1491,3	2717,6	4651,6	7546,4
r_1	592,84	578,68	564,52	550,36	536,50	522,04	507,88	493,72	479,56
r	563,38	541,59	528,63	518,94	510,66	501,65	493,99	486,47	475,40
%	7	6½	6½	6	5	4	2½	1½	1

Tabelle VII (Schwefelkohlenstoff).

t	0°	30°	60°	90°	120°	140°
h	127,9	434,6	1164,5	2619,1	5148,8	7604,0
r_1	90,0	87,0	82,9	77,8	70,6	66,9
r	89,6	89,3	88,9	88,1	86,8	85,6
%	½	−3	−7	−13	−23	−29

Tabelle VIII (Aethyläther).

t	0°	30°	60°	90°	120°
h	184,4	634,8	1725,0	3898,3	7719,2
r_1	94,0	89,4	82,6	73,5	62,7
r	90,5	89,3	88,0	86,2	83,6
%	4	1	−6½	−17	−32

Tabelle IX (Chlorkohlenstoff).

t	0°	40°	80°	120°	160°
h	33,0	214,8	843,3	2393,7	5513,1
r_1	52,0	49,6	46,1	41,8	36,6
r	52,8	52,2	52,2	52,4	52,5
%	—1½	—5	—13	—23	—43

Aus diesen Tabellen lässt sich der Schluss ziehen, dass die Formeln (1) und (2) nur begrenzte Giltigkeit besitzen. Es existirt solch eine Siedetemperatur, bei welcher die Resultate der Berechnung mit den Ergebnissen der Beobachtung übereinstimmen. Für das Benzol liegt diese Temperatur zwischen 40° und 60°, für den Schwefelkohlenstoff zwischen 0° und 30°, für den Aethylester zwischen 30° und 60°. Obwohl bei den übrigen Flüssigkeiten die Differenzen sowohl positiv, als negativ ausfallen, so kann man doch auf Grund dieser Differenzen behaupten, dass derartige Temperaturen für das Wasser über 180°, für das Chloroform und das Aceton über 60° und für den Chlorkohlenstoff unter 0° liegen. Auf beiden Seiten derjenigen Temperatur, bei welcher die berechneten Siedewärmen mit den beobachteten übereinstimmen, wachsen die Differenzen und zwar positiv beim Fallen und negativ beim Wachsen der Temperatur. Dieses hängt davon ab, dass die Siedewärme r nach der Formel (2) nicht so stark abnimmt, wie das in der That der Fall ist, und dass sie für Chlorkohlenstoff sogar constant bleibt. Es kann überhaupt angenommen werden, dass innerhalb gewisser und zwar ziemlich weiter Grenzen die Formel (2) den Beobachtungen gut entspricht, für Wasser z. B. von 0° bis 180°, für Aethyläther von 0° bis 60° u. s. w. Ausserhalb dieser Grenzen, nämlich für sehr niedrige Temperaturen gibt es keine Beobachtungen, bei sehr hohen aber, welche sich den kritischen Punkten nähern, gibt die Formel (2) Resultate, welche sich bedeutend von den Resultaten der Beobachtung unterscheiden. In dieser Beziehung ist diese Formel dem Boyle-Mariotte'schen Gesetze ähnlich, da dieses letztere in aller Strenge nur bei einer gewissen, einem jeden Gase entsprechenden Spannung, seine Giltigkeit hat; werden die Gase verdünnt (Mendeleïeff) oder zusammengepresst (Amagat), so verliert bekanntlich das Boyle'sche Gesetz seine Giltigkeit.

II.

4. Die Anzahl der Thatsachen, welche sich auf den Gebieten der Physik und der Chemie anhäufen, ist ungemein gross geworden und wächst immerwährend mehr und mehr, und es ist kaum möglich, allen

Entdeckungen, welche auf diesen Gebieten gemacht werden, zu folgen. Ein Mensch mit solch einem phänomenalen Gedächtnis, welcher dieses zu leisten im Stande wäre, würde Gefahr laufen, von der Masse verschiedenartiger und manchmal in keinem oder nur in einem schematischen Zusammenhange stehender Kenntnisse so zu sagen zermalmt zu werden. Die Bearbeitung des wissenschaftlichen Materials und die Auffindung des Zusammenhanges zwischen den physikalischen und chemischen Grössen sind unentbehrlich geworden. Um aber das Allgemeine in der Unmasse der uns bekannten Thatsachen richtig zu erfassen und eine für alle Naturkräfte giltige Hypothese zu construiren, dazu ist ein genialer Denker oder die Arbeit aller einzelner Gelehrten nöthig. Letzteres findet eben statt zur Zeit, wo ich diese Zeilen schreibe; der Nebel, welcher manche Gebiete der Wissenschaft umhüllt, weicht dem Lichte der wissenschaftlichen Arbeiten; Theorien folgen einander in sehr raschem und natürlichem Tempo, und manchmal ist es ziemlich schwer zu beurtheilen, wem eigentlich die Lösung einer Frage gehört und ob diese Lösung eine selbständige ist, oder nicht. Man muss gestehen, dass die Chemiker mehr als die Physiker in der Frage über die Natur der Materie geleistet haben. Sie haben nicht nur die Moleküle entdeckt, sondern sich auch der Lösung der Frage über die Structur der Moleküle aus Atomen genähert. Die daraus gefundenen Schemen und empirischen Schlüsse dienten zum Leitfaden für weitere Untersuchungen und haben sogar dazu die Mittel gegeben über die Möglichkeit gewisser Atomcomplexe zu urtheilen und die Eigenschaften gewisser Atomcomplexe vorauszusagen. Dabei ist hervorzuheben, dass derartige Schlüsse auch von der Beobachtung glänzend bestätigt worden sind. Es ist deshalb erlaubt, die Hoffnung auszusprechen, dass die gemeinsame Arbeit der Chemiker, Physiker und Mechaniker es ermöglichen werden, noch tiefer in die Atomwelt einzudringen, und vielleicht sind wir nicht zu weit von der Zeit entfernt, wo die Atome der elementaren Stoffe uns ebenso begreiflich sein werden, wie es uns jetzt die sichtbaren Körper sind. Alsdann werden sich alle Zahlencoefficienten — die specifische Wärme, die Ausdehnungscoefficienten, die Dichtigkeit, die elektrische Leitungsfähigkeit, der Brechungsexponent und andere Grössen —, als ganz bestimmte Functionen der individuellen, durch Zahlen ausgedrückten Eigenschaften, herausstellen, da die Ursache aller Erscheinungen ohne Zweifel in der Natur der Atome liegt. Alsdann wird es auch leicht sein, auf Grund der Kenntnisse über die Bestandtheile eines jeden Stoffes eine jede physikalische Grösse zu berechnen. Um diese Functionen zu erforschen, suchen die Gelehrten der Jetztzeit den Zusammenhang zwischen den Wärmeäquivalenten und elektromotorischen Kräften, zwischen der Dampfspannung und der Temperatur,

zwischen der specifischen Wärme und Schmelzwärme, zwischen der Spannung und dem Volum des Dampfes, zwischen dem Elasticitätsmodul und dem Ausdehnungscoefficienten u. s. w. Es sind dabei bekanntlich mehrere empirische Gesetze aufgestellt worden. Beim gegenwärtigen Zustand der Wissenschaft ist dieses der einzige Weg, welcher zur Untersuchung der eigentlichen Natur der Materie führen kann; dieser Weg ist aber sehr schwer und undankbar, da alle Resultate, welche auf diesem Wege gefunden worden, mit der Zeit werden verdrängt werden müssen durch die oben charakterisirten allgemein gefassten und noch zu findenden Functionen allgemeinerer Natur. Da ausserdem die Eigenschaften der natürlichen Körper Functionen von denselben veränderlichen Grössen (den Eigenschaften der Atome) sind, so ist eine jede Eigenschaft des Stoffes eine Function von den anderen Eigenschaften, und es ist deshalb kaum die Hoffnung zu hegen erlaubt, dass sich der Zusammenhang aller Eigenschaften durch eine einfache und auch genaue Formel ausdrücken lassen wird. Und es sind auch in der That alle Naturgesetze, sogar die sog. Fundamentalgesetze, nur unter idealen Bedingungen, welche in der That nie erfüllbar sind, richtig. Bei dem gegenwärtigen Zustand der Physik und der Chemie sind nur solche Gesetze möglich, welche nur als eine gewisse Annäherung der wirklichen Gesetze betrachtet werden können, und es ist deshalb die Bestrebung solche Verhältnisse der uns interessirenden Grössen zu suchen, welche ebenso genau wären, wie es die Gesetze der Bewegung himmlischer Körper sind, eine nutzlose und nichtige.

Bei allen Untersuchungen dieser Art ist es unmöglich Hypothesen zu vermeiden, da wir das Wesen der Materie am Ende doch nicht kennen; es muss aber eine jede Hypothese durch Versuche und Beobachtung und nicht etwa durch andere Hypothesen geprüft und bestätigt werden, denn eine Hypothese kann nur als solche, nur als eine Voraussetzung ziemlich phantastischer Natur betrachtet werden. Ohne den Nutzen der Hypothesen überhaupt zu bezweifeln, kann man jedoch behaupten, dass sie wegen ihrer allzu grossen Anzahl die theoretische Entwicklung der Wissenschaft manchmal auch hemmen, da sie die Freiheit des Denkens eigentlich zu stark begrenzen. Nur ein grosser und talentvoller Denker wäre jetzt im Stande bedeutende und unerwartete allgemeine Gesetze zu finden; um aber grosse Resultate zu erreichen, wäre es ihm unbedingt nöthig, alle existirenden Hypothesen zu verwerfen und seine Schlüsse nur auf bewiesene und zweifellose Daten zu gründen. In der vorliegenden Arbeit habe ich mich auch gezwungen gefühlt, manche Anschauungen zu verwerfen, welche nicht zu den zweifellosen Daten der Wissenschaft gehören, und glaube mich

dazu berechtigt, da es beim jetzigen Zustande der Wissenschaft unbedingt Noth thut, sich allmählich von Vorurtheilen (wenn auch wissenschaftlicher Art) überhaupt zu befreien.

5. Die Cohäsion wird gewöhnlich durch die gegenseitige Anziehung der Moleküle erklärt; diese Erklärung scheint mir aber unrichtig zu sein. Es gibt keinen zureichenden Grund zur Voraussetzung, dass die gegenseitige Anziehung der Moleküle nicht dem Gravitationsgesetze, sondern irgend welchen anderen Gesetzen unterworfen sein müsse, und es ist deshalb anzunehmen, dass die Anziehung zweier Moleküle eigentlich dem Producte ihrer Massen oder dem Producte der Massen der Atome proportional und dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sein muss, d. h. durch die Grösse

$$f \cdot \frac{m\, m'}{d_2}$$

sich ausdrücken lässt, wo m und m' die Massen der betreffenden Moleküle oder Atome, d die Entfernung zweier Punkte, welche innerhalb dieser Moleküle oder Atome liegen, und f einen Coefficienten bedeuten, welcher von der Auswahl der Grösseneinheiten abhängt; ist die Masse eines cubischen cm Wassers bei 4^0 C. als Masseneinheit, und das cm selbst als Längeneinheit angenommen, so wird f in Dynen ausgedrückt. Da wir die Grössen und die Dichtigkeit der Erdkugel kennen und dabei wissen, dass letztere die Masseneinheit auf ihrer Oberfläche, mit der Kraft, welche einem Gramm gleich ist, anzieht, so sind wir im Stande, die Grösse f, d. h. die Kraft zu berechnen, mit welcher zwei Masseneinheiten einander anziehen, wenn sie von einander 1 cm weit entfernt sind. Nach Violle[1]) ist

$$f = 0{,}67 \cdot 10^{-9} \text{ Dyn.}$$

oder ungefähr

$$f = 0{,}66 \cdot 10^{-9} \text{ Mgr.}$$

Diese Grösse ist so klein, dass man sich kaum darüber eine Vorstellung machen kann, und dies ist die Grösse der Anziehungskraft zweier einander berührender Kugeln, deren Diameter 1 cm gross ist und deren Masse je einer Masseneinheit gleich sind. Sind die Radien beider Kugeln je a Einheiten gleich und ist die Dichtigkeit dieser Kugeln ϱ, die Entfernung ihrer Mittelpunkte d, so wird die Anziehungskraft dieser Kugeln durch folgende Grösse ausgedrückt:

$$f \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \varrho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot a^3 \varrho}{d^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3$$

1) Cours de physique, t. I, p. 1, p. 301.

Berühren die Kugeln einander, so ist diese Grösse

$$f \cdot \frac{4\,\pi^2\,a^4\,\varrho^2}{9} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die gegenseitige Anziehung zweier einander berührender Kugeln mit den Radien abnimmt und, bei $a = 0$, selbst gleich Null wird. Ist $d > 2a$, so nimmt die Grösse (3) mit der Abnahme der Grösse d zu und erreicht ihren maximalen Werth bei $d = 2a$. Die weitere Abnahme der Grösse d ist unmöglich, wenn dabei a nicht abnimmt. Es kann folglich die Grösse (1) nicht unendlich gross werden; dieses hätte der Fall sein können, wenn d gleich Null werden könnte; alsdann würde aber auch $a = 0$ sein, d. h. die Kugeln verlieren ihre Masse und die Anziehungskraft würde dann selbst gleich Null werden. Sind die Kugeln sehr klein, etwa wie Moleküle oder Atome, so ist die gegenseitige Anziehung (4) der Kugeln, sogar im Falle ihrer Berührung, sehr klein, da f und a beide sehr klein sind.

Wir wollen jetzt die Kraft berechnen, welche nöthig ist, um einen Stab zu zerreissen, dessen Querschnitt 1 qcm ist. Nehmen wir dabei an, dass die Moleküle die Form von Kugeln haben, deren Radien gleich a sind. Auf 1 qcm werden wir $\frac{1}{(2\,a)^2}$ solcher Kugeln annehmen müssen. Multipliciren wir diesen Bruch mit der Grösse (4), so erhalten wir die Grösse

$$f \cdot \frac{1}{9}\,\pi^2\,a^2\,\varrho^2,$$

welche auch sehr klein ist, Diese Grösse drückt zwar nicht die Grösse der gegenseitigen Anziehung zweier benachbarter Schichten aus, da wir hier nur die Wirkung der sich berührenden Kugeln in Betracht ziehen; es ist aber leicht zu begreifen, dass die gegenseitige Wirkung der übrigen Kugeln nicht gross sein kann, da sie auf einander beinahe normal in Bezug auf die Länge des Stabes wirken. Ausserdem hätte man noch die Einwirkung derjenigen Molekülschichten zu berechnen, welche sich hinter den sich berührenden Schichten befinden; aber auch diese Wirkung übt keinen Einfluss auf das Resultat in qualitativer Hinsicht, da die gegenseitige Anziehung der zu zerreissenden Stücke des Stabes als ungemein klein sich erweisen wird, weil f eine sehr kleine Grösse ist.

Eine genaue Lösung dieser Frage bietet unüberwindliche analytische Schwierigkeiten, meines Wissens wenigstens, ist diese Aufgabe nur für den Fall einer runden Platte und eines Moleküles gelöst, welches auf der Senkrechten zu dieser Platte aus ihrem Centrum erhoben liegt. Ist die Platte unendlich dünn, so hat man für die betreffende

Anziehungskraft folgenden Ausdruck: $f \cdot 2\pi \cdot h \cdot \varrho \cdot m$, wo h die Höhe der Platte, ϱ die Dichtigkeit der letzteren und m die Masse der Moleküle bedeuten. Der Uebergang von diesem einfachen Falle zur Anziehung zweier benachbarter Schichten ist leider unmöglich infolge der Schwierigkeiten, welche in diesem Falle die Integration bietet. Es ist aber kaum zu bezweifeln, dass das Endresultat auch eine verschwindende Grösse sein wird im Vergleich mit der Kraft, welche beim Zerreissen eines Stabes in Wirklichkeit zu verwenden ist; letztere Kraft ist z. B. für den Fall eines kupfernen Stabes, dessen Querschnitt 1 qcm gleich ist, 4000 kg gross.

Es kann somit die Cohäsion in festen und flüssigen Körpern nicht der gegenseitigen Anziehung ihrer Moleküle zugeschrieben werden; man muss folglich offen gestehen, dass die wirkliche Ursache der Cohäsion eigentlich unbekannt ist.

6. Stellen wir uns irgend ein Volum eines vollkommenen Gases vor, d. h. eines Gases, für welches die Gesetze von Boyle-Mariotte und Gay-Lussac völlig gelten, und üben wir, indem seine Temperatur constant bleibt, auf das Gas einen unbedeutenden Druck aus, z. B. den Druck, welcher nöthig ist um das Volum um die Grösse der Ausdehnung bei der Erhöhung der Temperatur auf 1° zu verkleinern. Wir werden dabei eine gewisse Arbeit oder eine andere Energie verwenden müssen. Die zugeführte Energie wird als Wärme in den umgebenden Raum abgegeben werden. Lassen wir nunmehr das Gas, indem wir den Druck abnehmen lassen, sich bis zu seinem früheren Volum ausdehnen und die Temperatur constant bleiben, alsdann wird das Gas unter einem gewissen Wärmeverbrauch aus der Umgebung dieselbe Arbeit leisten müssen. Das Gas selbst ist bekanntlich an und für sich keine Energie, es stellt, wenn man sich so ausdrücken darf, nur eine Maschine, ein Mittel vor, mit dessen Hilfe die Wärmeenergie in eine mechanische verwandelt werden kann. Hieraus folgt, dass bei der Erwärmung eines vollkommenen Gases unter constantem Druck die Wärme zwei Wirkungen ausübt: sie übt eine äussere mechanische Arbeit aus und erhöht die Temperatur. Das Wärmequantum, welches zur Erhöhung der Temperatur nöthig ist, ist die Zunahme der Gasenergie.

Wollen wir jetzt ein sog. „nicht vollkommenes" Gas nehmen (d. h. ein Gas, welches sich stärker comprimiren lässt, als es nach den Gesetzen von Boyle-Mariotte der Fall sein sollte) und comprimiren wir es bei constanter Temperatur. Wir werden dabei auch eine Energie verbrauchen, welche aus dem Gase als Wärmeenergie ausscheiden wird. Da sich aber die innere Energie eines Gases bei seiner Compression vermindert, so wird der Energieüberschuss auch nach aussen als Wärme ausscheiden. Umgekehrt: lassen wir ein

unvollkommenes comprimirtes Gas sich frei, bei constanter Temperatur, ausdehnen, so wird es ein gewisses Wärmequantum in sich aufnehmen, welches letztere auf eine äussere Arbeit und auf die Erhöhung der inneren Energie des Gases verbraucht werden wird. Es übt folglich in solchem Falle die Wärme, bei Erwärmung des Gases, drei Wirkungen aus: sie erzeugt eine äussere Arbeit, sie bewirkt eine Vergrösserung der inneren Energie des Gases und erhöht seine Temperatur. Das Wärmequantum, welches für beide letztere Wirkungen nöthig ist, pflegt man gewöhnlich auf die Zunahme der inneren Gasenergie zu beziehen; es wäre aber höchst nützlich, um die Ideen recht zu fixiren, diesem Quantum eine besondere Benennung zu geben, z. B. sie etwa als Temperaturwärme zu bezeichnen.

Wollen wir jetzt einen festen oder einen flüssigen Körper einem in allen Punkten seiner Oberfläche gleichen und zu dieser Oberfläche in jedem Punkte normalen Drucke unterwerfen; es möge sich dabei das Volumen des Körpers um $V \cdot \alpha$ vermindert haben, wo V das Volumen und α den cubischen Ausdehnungscoefficienten bezeichnet. Wir haben dabei diejenige uns unbekannte Ursache bekämpfen, überwinden müssen, von welcher die Cohäsion abhängt und eine Arbeit verbrauchen, welche als Wärme nach aussen ausscheiden wird. Es wird sich dabei auch die innere Energie vermindern und ein Theil dieser Energie wird sich im äusseren Raum zerstreuen. Umgekehrt: wenn wir den äusseren Druck nach und nach abnehmen lassen werden, so wird der comprimirte Körper, indem er sich ausdehnt, eine äussere Arbeit bewirken; sowohl für diese Wirkung, als für die Zunahme seiner eigenen Energie, wird sich der Körper Wärme aus dem umgebenden Raum holen. Wenn wir, anstatt den Körper zu comprimiren, ihn ausdehnen werden, und zwar mittels solcher Kräfte, welche in jedem Punkte seiner Oberfläche gleich und zur Oberfläche normal sind, und welche eine Volumvergrösserung $V \cdot \alpha$ bewirken werden, so werden wir dabei die Cohäsion überwinden müssen, wozu eine gewisse Arbeit verbraucht werden muss. Bei der Ausdehnung des Körpers nimmt die Energie des Körpers zu und er wird aus dem äusseren Raume ein gewisses Wärmequantum in sich aufnehmen müssen. Denken wir uns jetzt eine Gewichtseinheit festen oder flüssigen Stoffes, welche gar keinem äusseren Drucke oder einem sehr kleinen im Vergleich mit den inneren Kräften unterworfen ist, z. B. dem Drucke einer Atmosphäre; das Wärmequantum, welches nöthig ist, um die Temperatur dieser Gewichtseinheit um 1^{0} wachsen zu lassen, d. h. seine specifische Wärme c, zerfällt in drei Theile: die Wärme q, welche auf die Ueberwindung der Cohäsion, die Wärme q_1, welche auf die Vergrösserung der inneren Energie, und q_2, welche auf die Erhöhung der Temperatur

verbraucht wird. Die Summe $q_1 + q_2$ pflegt man gewöhnlich die Zunahme der inneren Energie zu nennen. Es kann somit angenommen werden, dass

$$c = q + q_1 + q_2,$$

da die äussere Arbeit im Falle nicht sehr grosser Drücke verschwindend klein ist; diese Arbeit hätte man nur in dem Falle zu berücksichtigen, wo die Flüssigkeit einem grossen Drucke und einer hohen Temperatur unterworfen ist, da in diesem Falle die Ausdehnungscoefficienten der Flüssigkeit manchmal sehr gross sind. Die Grösse q entspricht eben derjenigen mechanischen Arbeit, welche zur Vergrösserung des Volums V um $V \cdot \alpha$ nöthig ist. Um uns eine Idee über den Werth dieser Grösse zu machen, wenden wir Gesagtes auf einen Cubikcentimeter Kupfer an; sodann ist $V = 1$, $\alpha = 0{,}00005022$ und $c = 0{,}0095$. Setzen wir die Dichtigkeit des Kupfers 8,85 gleich, so finden wir, dass zur Erwärmung dieses Körpers

$$0{,}095 \times 8{,}85 = 0{,}841 \text{ Calorien}$$

nöthig sind. Nach Everett[1]) ist der Compressions- oder Ausdehnungsmodul L des Kupfers in absoluten Einheiten ausgedrückt $1{,}684 \cdot 10^{12}$ gleich. Um also einen Cubikcentimeter um x zu vergrössern, muss man auf jede Seite des Würfels eine Kraft $L \cdot x$ anwenden. Wollen wir jetzt den Würfel allmählig ausdehnen und jedesmal um die unendlich kleine Grösse dx vergrössern; wir werden sodann für die Elementararbeit $L x\, dx$ und für die dazu nöthige Arbeit den Bruch $\frac{Lx \cdot dx}{J}$, wo $J = 4,\ 2 \cdot 10^7$ erhalten. Wenn wir den betr. Cubus so lange ausdehnen werden, bis er sich um α vergrössert haben wird, so wird sich die dazu nöthige Wärmemenge durch

$$\int_0^\alpha \frac{L x\, dx}{J} = \frac{L}{J} \cdot \frac{\alpha^2}{2}$$

ausdrücken lassen. Ist α der Ausdehnungscoefficient des Kupfers, so drückt letztere Zahl die Wärmemenge aus, welche zur Ueberwindung der Cohäsion im Cubikcentimeter Kupfer nöthig ist, und zwar bei solch einer Zunahme des Volums, welche seiner Zunahme bei der Erwärmung auf 1° gleich ist. Substituirt man anstatt α und L ihre Zahlenwerthe, so erhält man die Grösse

$$\frac{1{,}684 \cdot 10^{12} \cdot (0{,}00005022)^2}{2 \cdot 4{,}2 \cdot 10^7} = 0{,}00005056 \text{ Calorien.}$$

Andrerseits sind aber 0,841 Cal. nöthig, um einen Cubikcentimeter Kupfer auf 1° zu erwärmen; vergleicht man diese Zahlen mit einander,

1) Everett, Unités et constantes physiques (franz. Uebersetzung, 1883), p. 58.

so muss man zum Schluss kommen, dass zur Ueberwindung der Cohäsion des Kupfers bei seinem Erwärmen nur eine äusserst geringe Wärmemenge verbraucht wird im Vergleich mit der ganzen, dem Körper zugeführten Wärmemenge. Derselbe Schluss ist auch für alle anderen festen Körper richtig, da sämmtliche feste Körper sich durch sehr kleine Ausdehnungscoefficienten auszeichnen.

Wollen wir jetzt dieselbe Rechnung für Wasser und Schwefelkohlenstoff ausführen. Bei Everett finden wir, dass für Wasser bei 53°,

$$L = 2{,}3 \cdot 10^{10} \text{ und } \alpha = 4{,}76 \cdot 10^{-4}.$$

Hieraus lässt sich leicht berechnen, dass bei der Erwärmung des Wassers auf die Ueberwindung der Cohäsion nur 0,000062 der dem Wasser zugeführten Wärme verbraucht wird. Ebenso leicht ist es zu berechnen, dass für Schwefelkohlenstoff bei 14° auf dasselbe nur 0,00085 der zugeführten Wärme verbraucht wird. Wächst die Temperatur, so wachsen sowohl α, als auch wahrscheinlich L und mit der Zunahme dieser Grössen auch die Grösse q. Die Grösse c nimmt aber gleichfalls (wenn auch langsamer) zu, und es ist deshalb erlaubt anzunehmen, dass das Verhältnis $\frac{q}{c}$ sehr klein bleibt. Es ist folglich auch erlaubt, anzunehmen, dass

$$c = q_1 + q_2,$$

d. h., dass bei der Erwärmung eines festen oder flüssigen Körpers die Wärme beinahe vollständig zur Erhöhung der Temperatur und auf die Vergrösserung der inneren Energie verbraucht wird.

7. Von der Ansicht über die Cohäsion hängt die Lösung der Frage ab, worauf eigentlich die Wärme bei der Erwärmung, und auch beim Schmelzen und Sieden der Körper verbraucht wird.

Da beim Erwärmen die zur Ueberwindung der Cohäsion und des äusseren Druckes zu verbrauchende Wärme äusserst klein ist, so wird die Wärme nur zur Vergrösserung der lebendigen Kraft der Moleküle und Atome verbraucht. Um aber die Frage zu lösen über die Vertheilung der Wärme zwischen den Molekülen und den Atomen, muss man irgend welche dazu passenden Hypothesen benutzen.

Ich benutze die Hirn'sche Formel:

$$(p + s) \cdot (v - \psi) = D\,T. \quad \ldots \ldots \quad (5$$

hier ist D eine dem gegebenen Stoffe im gasförmigen Zustande entsprechende Grösse, welche unter die Form

$$D = \frac{848{,}7}{P} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6$$

(P das Molekülgewicht) gebracht werden kann; T ist die absolute Temperatur, welche $271 + t$ gleich ist; p und v sind der Druck resp.

das specifische Volum; s und ψ sind beliebige Functionen von p und v. Sämmtliche Grössen sind dabei in Metern resp. Kilogrammen ausgedrückt. Es enthält aber in diesem Falle die Formel (5) gar keine Hypothese, da die Functionen s und ψ arbiträr sind, und man der betreffenden Formel immer genüge leisten kann.

Die Beobachtung belehrt uns, dass in festen und flüssigen Körpern irgend welche Kräfte wirken, deren Existenz durch die Cohäsion, latente Wärme des Schmelzens und Siedens und durch den Unterschied zwischen den latenten Wärmen und zwischen den Ausdehnungscoefficienten in verschiedenen Aggregatzuständen bewiesen wird. Vertauschen wir die inneren Kräfte durch einen äusseren Druck, welchen wir mit der beliebigen Function s bezeichnen wollen; wir setzen somit voraus, dass sämmtliche innere Kräfte verschwanden, und der äussere Druck gleich $p + s$ geworden ist. Nehmen wir ausserdem an, dass ψ das absolute Volum der Moleküle bedeutet, so dass $v - \psi$ den zwischenmolecularen Raum bedeutet. Aus der Formel (5) schliesse ich, dass je grösser s wird, desto kleiner $v - \psi$ wird. Es ist folglich in den Gasen $v - \psi$ gross und s klein; in festen und flüssigen Körpern ist umgekehrt $v - \psi$ sehr klein und s gross. Es ist aber unmöglich sich einen Begriff über die Functionen s und ψ zu machen, solange man nicht noch einen Zusammenhang (eine Gleichung) zwischen denselben Grössen ermittelt haben wird.

In der vorliegenden Arbeit werde ich nur Flüssigkeiten betrachten, um den Zusammenhang der Siedewärme von anderen beobachtbaren Grössen zu erforschen.

8. Auf Grund der dynamischen Hypothese hängen die Spannung und die Temperatur eines vollkommenen Gases von der Grösse und der Anzahl der Stösse ab, welche die Wände der Gefässe von den Molekülen im Laufe einer Zeiteinheit erleiden.

Ist das Volum der Moleküle ψ im Vergleich mit dem des Gases klein, so ist

$$pv = \tfrac{1}{3} MC^2 \quad \text{. . . . . (7}$$

wo M die Masse eines Kilogramms und C^2 das arithmetische Mittel der Quadrate der Geschwindigkeit der Moleküle in Metern ausgedrückt, bedeuten.

Eine jede Flüssigkeit kann als eine Ansammlung von Molekülen betrachtet werden, welche sich in einer instabilen Bewegung befinden und durch einen äusseren Druck zusammengehalten werden. Schliesst man eine Flüssigkeit in einen begrenzten leeren Raum ein, so bilden sich sofort Dämpfe und es tritt ein Gleichgewicht ein, sobald die Dämpfe eine gewisse Spannung erhalten haben werden, welche der gegebenen Flüssigkeit und der gegebenen Temperatur entsprechen. Jede Flüssig-

keit bestrebt sich immerwährend die Dampfform anzunehmen, wenn es nur der Raum erlaubt und wenn ihr die zur Vergrösserung der molecularen und Atombewegungen nöthige Wärme zugeführt wird. Mit der Zunahme der Temperatur, nehmen die inneren Kräfte ab, und es muss demgemäss der äussere Druck vergrössert werden. Es hängt die Temperatur und die Spannung des Gases nur von Bewegungen der Moleküle ab; dasselbe ist auch wohl für die Flüssigkeiten als wahrscheinlich anzunehmen. Der Raum aber, wo sich die Moleküle der Flüssigkeit bewegen, ist sehr klein; es wird deshalb das Molekül einer Flüssigkeit bei der Geschwindigkeit C mehr Stösse im Laufe einer Secunde auf die Wände der Hülle und auf die Oberfläche der Flüssigkeit ausüben müssen, als es im Falle des gasartigen Zustandes der Fall wäre. Es müssen sich folglich, bei derselben Temperatur und unter demselben Drucke, die Moleküle einer Flüssigkeit bedeutend langsamer bewegen, als die eines Gases. Hieraus folgt, dass beim Erwärmen einer Flüssigkeit beinahe die ganze Wärmemenge auf die Vergrösserung der Atomenergie verbraucht werden muss.

9. Dehnt sich die Flüssigkeit beim Erwärmen aus, so muss die Kraft $p+z$ überwunden werden. Bezeichnen wir die specifische Wärme einer Flüssigkeit durch c, ihr specifisches Volum durch w, die Volumvergrösserung bei unendlich kleinem Zuwachs dt der Temperatur t durch dw; sodann erhalten wir, dass es zum Ueberwinden der Kraft $p+z$ nöthig ist $A\cdot(p+z)\cdot dw$ Wärmeeinheiten zu verbrauchen und dass dieses Wärmequantum gleich cdt sein wird. Es ist folglich

$$A\cdot(p+z)\cdot dw = cdt.$$

Ermittelt man hieraus die Grösse $p+z$ und substituirt man sie in die Hirn'sche Formel (5), so erhält man:

$$w-\psi = \frac{A\cdot D\cdot T\frac{dw}{dt}}{c} \quad \ldots\ldots\ldots (8$$

Setze ich $w = w_0(1+\varDelta)$, wo w_0 das specifische Volum der Flüssigkeit bei 0^0, und $\varDelta$ den Zuwachs einer Volumeinheit beim Erwärmen auf t^0 bedeuten, so erhalte ich

$$\frac{dw}{dt} = w_0\frac{d\varDelta}{dt} = \frac{w\frac{d\varDelta}{dt}}{1+\varDelta}.$$

Vergleicht man beide letzteren Gleichungen, so hat man

$$\frac{w-\psi}{w} = \frac{ADT\cdot\frac{d\varDelta}{dt}}{c(1+\varDelta)} \quad \ldots\ldots\ldots (9$$

Nach dieser Formel habe ich für einige Flüssigkeiten den Werth des Verhältnisses $\frac{w-\psi}{w}$ bei den Siedepunkten der Flüssigkeiten berechnet.

Tabelle 1.

Wasser	Schwefelkohlenstoff	Äthyläther	Chloroform	Chlorkohlenstoff	Aceton	Benzol	Terpentinöl	Bromäthyl
0,0271	0,0471	0,0269	0,0342	0,0332	0,0410	0,0311	0,0142	0,0387

Hieraus sieht man, dass die Zwischenmolecularräume bei den Flüssigkeiten sehr klein sind.

Ausserdem habe ich die Werthe der Grössen

$$\frac{w-\psi}{w},\quad \frac{\psi}{w} \text{ und } \frac{\psi}{w_0}$$

für einige Flüssigkeiten unter verschiedenen Temperaturen berechnet, und es erwies sich beim Wasser folgendes:

Tabelle 2.

	20°	40°	60°	80°	100°
$\frac{w-\psi}{w}$	0,00671	0,01345	0,01788	0,02246	0,02708
$\frac{\psi}{w}$	0,99329	0,98655	0,98212	0,97754	0,97292
$\frac{\psi}{w_0}$	0,99490	0,99403	0,99860	1,0056	1,0384

Der zwischenmoleculare Raum wächst mit dem Steigen der Temperatur, das Verhältnis aber des absoluten Volums der Moleküle zum sichtbaren Volum $\left(\frac{\psi}{w}\right)$ nimmt ab, und das Verhältnis desselben Volums (ψ) zum Volum der Flüssigkeit w_0 (bei der 0°) nimmt zu. Es nimmt folglich das Volum des Moleküls (ψ) beim Steigen der Temperatur zu aber nicht in dem Maasse wie es das Volum der Flüssigkeit thut. Dasselbe gilt auch für andere Flüssigkeiten, deren specifische Wärmen und specifischen Volume bei verschiedenen Temperaturen mir zur Verfügung standen. Aus allen diesen Rechnungen folgt, dass im allgemeinen die Grösse ψ nicht als constant betrachtet werden kann.

10. Ueberhaupt hat man gar keine Gründe, welche dazu verhelfen könnten, irgend einen Schluss darüber zu ziehen, was eigentlich die inneren Kräfte sind. Eins ist unzweifelhaft: dass bei der Ausdehnung des Körpers infolge seiner Erwärmung und seines, in diesem Falle, Ueberganges in einen anderen Aggregatzustand, die lebendige Kraft der Atome zunimmt. Die von uns fingirte Kraft s ist der Art, dass man, um sie zu überwinden, ebensoviel Wärme verbrauchen muss, wie

zur Vergrösserung der lebendigen Kraft der Atombewegungen. Weder die Cohäsion, noch die gegenseitige Anziehung der Moleküle und der Atome spielen dabei aber eine Rolle; sie üben dabei (richtiger gesagt) einen höchst geringen Einfluss aus.

Die Siedewärme wird auf dreierlei Wirkungen verbraucht. Zunächst wird die Kraft z überwunden, d. h. es vergrössert sich die innere Energie der Atome. Bezeichnet man den unendlich kleinen Volumzuwachs durch dv, so findet man, dass die dazu nöthige Wärmemenge $Az\,dv$ gleich ist. Ausserdem (das ist die zweite Wirkung der Siedewärme) wird ein Theil der Wärme auf die Ausübung reiner äusserer Arbeit verbraucht, welche $Ap\,dv$ gleich ist. Die Summe dieser beiden Wärmemengen ist $A(p+z)\cdot dv$. Bezeichnet man durch w das Volum der Flüssigkeit und durch v das Volum des sich dabei entwickelten Dampfes, so findet man für diejenige Wärmemenge, welche zur Vergrösserung der Energie der Atome und zur Ausübung der genannten äusseren Arbeit nöthig ist, den Ausdruck

$$A\cdot\int_w^v (p+z)\cdot dv$$

oder (indem man die Formel 5 berücksichtigt)

$$ADT\int_w^v \frac{dv}{v-\psi}.$$

Da ψ eine uns unbekannte Function von v und p ist, so kann diese Integration nicht genau ausgeführt werden. Wenn man aber berücksichtigt, dass der gesättigte Dampf den Gesetzen von Boyle-Mariotte und Gay-Lussac beinahe gehorcht, so kann man annehmen, dass sich das Volumen ψ nur sehr wenig bei einer grossen Veränderung des Volumens zwischen den Grenzen w und v ändert. Nimmt man an, dass ψ constant ist, so erhält man, dass der betreffende Ausdruck sich in

$$ADT\log\frac{v-\psi}{w-\psi} \quad \ldots\ldots\ldots (10$$

verwandelt — ein Ausdruck, welcher von Hirn schon vor 30 Jahren gegeben worden ist.

Oben (8) haben wir gefunden dass

$$w-\psi=\frac{ADT\frac{dw}{dt}}{c}$$

oder

$$w-\psi=\frac{ADTw_0\frac{d\Delta}{dt}}{c}.$$

Da aber, infolge der von uns angenommenen Einheiten

$$w_0 = \frac{1}{1000\, d},$$

wo d das specifische Gewicht der Flüssigkeit bei 0° ist, so ist folglich

$$w - \psi = \frac{ADT\frac{d\Delta}{dt}}{1000\, dc}$$

und hieraus folgt, dass

$$\frac{v-\psi}{w-\psi} = \frac{(v-\psi)\cdot 1000\, dc}{ADT\cdot\frac{d\Delta}{dt}}.$$

Ist die Temperatur T weit von der des absoluten Siedens entfernt, so lassen sich in diesem Ausdrucke viele Vereinfachungen vollziehen. Da ψ im Vergleich mit v verschwindend klein ist, so erhalten wir aus der Formel (10), indem wir ψ verschwinden lassen,

$$ADT \log \frac{v\cdot 1000\, dc}{ADT\frac{d\Delta}{dt}}.$$

Ausserdem kann man annehmen, dass $pv = DT$; bezeichnet man der Kürze halber den Differentialquotienten $\frac{d\Delta}{dt}$ durch α, so wird der Ausdruck (10) folgende Form annehmen:

$$ADT \log \frac{1000\, dc}{Ap\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11$$

Die Moleküle der Flüssigkeit, wie es oben auseinandergesetzt worden, besitzen eine sehr geringe Geschwindigkeit; bei der Verwandlung der Flüssigkeit in Dampf müssen sie mit einem Mal eine relativ grosse Geschwindigkeit erwerben; darauf muss auch eine gewisse Wärmemenge verbraucht werden. Auf Grund der dynamischen Theorie haben wir für ein vollkommenes Gas folgende Formel (7):

$$pv = \tfrac{1}{3} MC^2 = DT.$$

Hieraus folgern wir, dass die Molecularwärme gleich $\frac{3}{2}\, ADT$ ist. Nehmen wir an, dass der Dampf ein vollkommenes Gas ist, so erhalten wir endlich für die Siedewärme r folgende Formel

$$r = ADT \log \frac{1000\, dc}{Ap\alpha} + \tfrac{3}{2}\, ADT,$$

welche ich im Anfange dieser Arbeit aufgestellt habe.

Schluss. Die Cohäsion, d. h. diejenige Kraft, welche der Formveränderung jeder Art (der Compression, dem Ausdehnen, Zusammendrehen etc.) entgegenwirkt, kann nicht durch die gegenseitige

Anziehung der Moleküle erklärt werden; ihre Ursache ist vielmehr unbekannt.

Die Cohäsion nimmt an den Wärmeerscheinungen keinen Antheil; oder richtiger gesagt: diejenige Wärmemenge, welche zum Ueberwinden der Cohäsion verbraucht wird, ist, im Vergleich mit der Wärmemenge, welche einem Körper zugeführt wird, um ihn aus einem Zustande in einen anderen zu überführen, äusserst gering.

Bei festen und bei flüssigen Körpern wird beinahe alle Wärme auf die Ueberwindung der Kraft s verwendet, deren Wesen uns völlig unbekannt ist. Da aber die dem Körper zugeführte Wärme die Energie des Körpers vergrössert, so muss man annehmen, dass bei der Erwärmung eines Körpers die Geschwindigkeit der Atombewegungen in dem Moleküle zunimmt. Stellt man sich vor, dass sich die Atome und die Moleküle um solche Axen drehen, welche durch ihre Trägheitsmittelpunkte gehen, so werden sie als widerstandsfähig gegen jede Ursache, welche die Richtung dieser Axen zu verändern bestrebt ist, erklärt werden müssen. Und es wird vielleicht dieser Standpunkt zur Richtschnur bei der Erklärung der Cohäsion dienen können.

Die Ungenauigkeit der Formel (1) hat folgende Ursachen:

Das absolute Volum (ψ) der Moleküle ist als constant und ausserdem im Vergleich mit dem Volumen des Dampfes als verschwindend klein angenommen worden. Der daraus entspringende Fehler ist um desto erheblicher, je grösser das specifische Gewicht des Dampfes ist; so dass in der Nähe der Temperatur des absoluten Siedens die oben charakterisirte Voraussetzung gar nicht der Wirklichkeit entspricht.

Indem die Dämpfe bei kleinen Drücken beinahe den Gesetzen von Boyle-Mariotte und Gay-Lussac gehorchen, thun sie das nicht im mindesten bei sehr grossen Drücken.

Die äussere Arbeit, welche bei der Erwärmung der Flüssigkeit ausgeführt wird, ist sehr klein und lässt sich vernachlässigen, wenn sich die Temperatur noch nicht der des Siedens genähert hat und im Falle eines normalen Druckes; dagegen kann sie sehr gross werden, sobald die Temperatur sehr hoch ist und bei grösserem Drucke, da in diesen Fällen der Ausdehnungscoefficient sehr stark wächst.

Ueber den Einfluss des elektrischen Funkens auf die Entladung in Gasen.

Von

P. Bachmetjew.

Professor Hertz in Karlsruhe machte die wichtige Entdeckung, dass die ultravioletten Strahlen die Entladung eines negativ geladenen Körpers beschleunigen. Kurz nach Bekanntmachung dieser Entdeckung wurden auch von mehreren Physikern zahlreiche Untersuchungen in dieser Richtung angestellt, so dass wir jetzt darüber ein ziemlich erschöpfendes Material besitzen. Eine besondere Beachtung verdienen die interessanten Untersuchungen von A. Naccari[1]), Secretär der Akademie der Wissenschaften in Turin. Er fand, dass ein elektrisch geladener Körper sogar unter dem Einflusse der kleinsten elektrischen Funken seine Ladung verliert. Anfangs glaubte er, dass diese Erscheinung als eine Folge der Wirkung der ultravioletten Strahlen der elektrischen Funken zu betrachten sei. Spätere Untersuchungen zeigten aber, dass die Entladung immer stattfindet, gleichviel ob der Körper positiv oder negativ elektrisch geladen war. In einigen Fällen bemerkte er sogar, dass die positive Elektricität sich etwas schneller als die negative entladet, — eine Erscheinung die mit der von Hertz nicht übereinstimmt, da Hertz bei seinen Untersuchungen das Gegentheil gefunden hatte. Auch wurde die Meinung, dass hier die Luft unter dem Einflusse der Beleuchtung zu einem Leiter gemacht werden kann, gänzlich ausgeschlossen (Entdeckung von Arrhenius). Sobald zwischen dem elektrisch geladenen Körper und der Funkenstrecke eine Gypsplatte oder sonst irgend eine Substanz, wenn auch eine durchsichtige, gestellt wurde, konnte die Erscheinung der Entladung nicht constatirt werden. Es wurde nur vermuthet, dass die Luft unter dem Einflusse der elektrischen Funken selbst zu einem Leiter wird. Die in dieser Richtung angestellten Versuche zeigten, dass, sobald die

1) A. Naccari, Atti. d. R. Acc. Scien. di Torino 24. p. 195. 1889.

Funkenstrecke sich ziemlich weit von dem geladenen Körper befand, eine Entladung nicht beobachtet werden konnte; wurde aber die in der Nähe der Funken sich befindliche Luft in der Richtung des geladenen Körpers hingeblasen, so konnte eine Entladung sofort bemerkt werden. Dieselbe unterblieb aber auch unter diesen Umständen, sobald die Erregung der Funken aufgehört hatte. Die Luft wird somit unter dem Einflusse der elektrischen Funken zu einem Leiter. Diese Leitungsfähigkeit dauert aber nur während der Erregung der Funken, und sie wird fast zu Null, sobald die Funken nicht mehr erregt werden.

Auf Grund des Gesagten konnte man mit so ziemlich grosser Wahrscheinlichkeit die Vermuthung aufstellen, dass in der Luft unter dem Einflusse der elektrischen Funken sich irgend eine chemische Verbindung oder allotropische Modification eines der „elementaren" Gase bilden würde, welche die Luft zusammensetzen, und die dann einen kleineren Widerstand als die Luft selbst besitzen. Zu gleicher Zeit soll die Verbindung nicht für die Länge existenzfähig sein, und nach dem Aufhören der Funken sofort in Zersetzung übergehen. In Anbetracht dessen, dass alle Verbindungen des Sauerstoffs und Stickstoffs die letzte Bedingung nicht erfüllen, so müssen wir nothwendigerweise die Annahme machen, dass wir hier mit einer Allotropie des Sauerstoffs oder Stickstoffs zu thun haben. Obwohl nun dabei die allotropische Modification des Sauerstoffs-Ozon erhalten werden musste, so kann trotzdem die Erscheinung von Naccari nicht erklärt werden, da das Ozon, wie bekannt, ein nicht leicht zersetzbarer Körper ist, und erst bei hoher Temperatur in Sauerstoff zerfällt. Da einige Thatsachen dafür sprechen, dass drei Sauerstoffatome in einem Ozonmolekül mit einander in der Richtung ihrer Längsaxen verbunden wären, und dass andere Thatsachen wiederum dafür sprechen, dass die Atome mit einander in einem Moleküle in der Richtung ihrer Queraxe verbunden sein könnten [1]), so müssen wir aus diesen Thatsachen auf eine zweite Modification des Sauerstoffs schliessen. Die Frage über die Existenz des längst gesuchten Antozons musste nun wieder in Erwägung gezogen werden. Dem Chemiker ist gut genug bekannt, was für ein Schicksal schon dem Antozon zu Theil geworden ist. Die kaum entdeckte zweite Modification des Sauerstoffs hat sich ganz einfach als Wasserstoffsuperoxyd erwiesen, und seither ist Antozon in Vergessenheit geraten. Wenn wir aber seine Existenz mit der erwähnten Molekularstruktur zulassen, so lässt sich dann die Erscheinung von Naccari sehr leicht erklären, da sich nun Antozon unter dem Einflusse der elektrischen Funken bildet und einen kleineren Widerstand als die Luft

1) P. Bachmetjew, „Elektricität" Nr. 18 S. 139. 1885 (russisch).

selbst besitzt, so müsste das Antozon die Entladung des in seiner Nähe befindlichen Körpers beschleunigen, sobald aber die Funken aufhören, so zersetzt sich sofort das Antozon und die Luft wird wieder ein Nichtleiter. Sobald wir eine beliebige Platte zwischen dem Körper und der Funkenstrecke placiren, verhindern wir dadurch das Zukommen des Antozons zu dem elektrischen Körper und die Entladung kann auf die Art nicht stattfinden.

Für die Existenz des Antozons spricht ferner noch folgender Umstand. Es ist eine bekannte Thatsache, dass wenn wir durch den Sauerstoff elektrische Funken passiren lassen, wir denselben niemals vollständig in Ozon verwandeln können. In den bekannten Ozonröhren von Siemens, Babo etc., worin der Sauerstoff mittels einer stillen Entladung ozonirt wird, können wir auch nicht mehr als höchstens

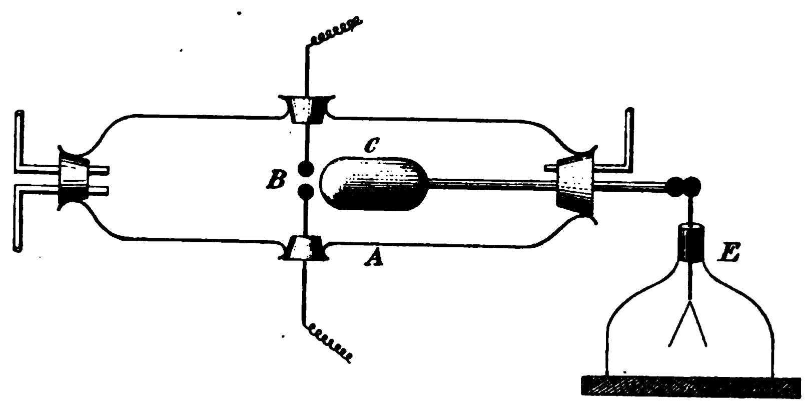


Fig. 1.

40 % Ozon erhalten. Wie kann man diese Erscheinung, wenn auch nur hypothetisch, erklären? Die Annahme der Existenz des Antozons ermöglicht uns die Erklärung dieser Erscheinung. In der That, unter dem Einflusse der stillen Entladung verwandelt sich der Sauerstoff gleichzeitig in Ozon und in Antozon; eine fortgesetzte Entladung der Elektricität kann die Quantität des Ozons nicht mehr vermehren und nach dem Aufhören der stillen Entladung verwandelt sich das Antozon als ein leicht zersetzbarer Körper wiederum in Sauerstoff.

Das ist in kurzen Zügen der Gedankengang, den ich nach dem Durchlesen der interessanten Arbeit des Naccari verfolgte.

Zur Bekräftigung meiner hier ausgesprochenen Ansichten, sowie der aufgestellten Hypothese, habe ich mir die Aufgabe gestellt, die Untersuchung der Erscheinung von Naccari nicht nur in der Luft, sondern auch in anderen Gasen vorzunehmen. Sollte nun bei diesen Erscheinungen die Hauptrolle dem Antozon zufallen, so könnte dann

die Erscheinung von Naccari in den anderen Gasen, wo das Antozon sich nicht bilden kann, nicht mehr beobachtet werden.

Die von mir untersuchten Gase waren: Luft, Kohlendioxyd, Wasserstoff, Sauerstoff und Leuchtgas. Das zu untersuchende Gas, welches vorher mittels Schwefelsäure getrocknet war, wurde in einem Glasballon A (13 cm Länge, 3,5 cm Breite) eingeschlossen. Ausserdem wurde der Ballon vor dem Einfüllen mit dem Gase erwärmt, um die etwa vorhandene Feuchtigkeit auf den Wänden desselben zu entfernen. Die Zuleitungsröhren waren durch Glasstöpsel zugemacht und alle Korke bestanden aus Kautschuk. Die Funken wurden von einer Ruhmkorff'schen Spirale erhalten, die durch zwei Elemente (Daniell) in Thätigkeit gesetzt wurde und die zwischen kleinen Kupferkügelchen bei B übersprangen. Die Kupferkügelchen waren nur 1,5 mm von einander entfernt, obwohl die erzeugten Funken eine Länge von ungefähr 3 mm haben konnten. In der Nähe von B (1 cm entfernt) befand sich ein ellipsoidalförmiger Messingkörper. Ein Kupferdraht, welcher zur Ladung des Körpers dienen sollte, wurde mit dem Messingkörper und einem Elektroskope E leitend verbunden. Die Ladung geschah mittels einer Holtz'schen Elektrisirmaschine und der Körper wurde abwechselnd mit positiver und negativer Elektricität geladen. Um den Verlust der Elektricität durch Feuchtigkeit zu vermeiden, musste man ziemlich oft, sowohl den Ballon, als auch das Elektroskop erwärmen. Zuerst wurden die Versuche von Naccari und zwar mit einem mit Luft angefüllten Ballone wiederholt. Dabei zeigte sich, dass die Funken die Entladung unzweifelhaft beschleunigen, jedoch für die beiden Arten der Elektricität ungleich stark. In der gewöhnlichen Luft wurde die negative Elektricität dreimal schneller als die positive entladet (Naccari's Versuche zeigen das umgekehrte). Die Versuche wurden auch ohne Gefäss angestellt, wobei diesmal die Kugel des Elektroskopes selbst geladen wurde und in deren Nähe Funken von 1,5 mm Länge bei einer Entfernung von 1 cm von der Kugel erregt wurden. Die Entladung erfolgte jetzt für die beiden Arten der Elektricität fast mit gleicher Schnelligkeit (etwa zehnmal schneller als ohne Funken). Als ich zwischen der Kugel und der Funkenstrecke eine Glimmerplatte placirte, konnte ich anfangs trotz meiner sorgfältigsten Beobachtungen keine Beschleunigung der Entladung bemerken; späterhin war es mir dennoch möglich, eine Wirkung der Funken, wenn auch eine schwache, zu beobachten.

Jetzt wurde mit einem mit trockener Luft angefüllten Ballone experimentirt und dabei folgende unerwartete Erscheinung beobachtet. Nachdem ich den Körper C mit negativer Elektricität geladen und die Funken erregt hatte, erhielt ich eine fast momentane Entladung;

bei weiterer Erregung der Funken jedoch zeigte sich, dass der Körper von sich selbst immer stärker und stärker zu laden anfing und zwar so lange, bis seine Ladung eine bestimmte maximale Grösse erreicht hatte. Diese Ladung war positiv. Nachdem der Körper dann positiv geladen und die Funken neuerdings erregt wurden, konnte ich seine vollständige Entladung nicht mehr erhalten; es war auf dem Körper noch immer eine gewisse Quantität positiver Elektricität, welche annähernd der im ersten Falle selbst erzeugten gleich war, übrig geblieben.

Die weiteren Untersuchungen haben die Ursache dieser Nebenerscheinung ermittelt.

War die Entfernung zwischen den Kügelchen (bei B) zu gross, so dass die Funken nicht mehr überspringen konnten, so war eine Divergenz der Blättchen am Elektroskope nicht zu constatiren. Dieselbe Erscheinung zeigte sich auch dann, als die Funken eine normale Länge von 1,5 mm hatten. Wurde aber eine der Elektroden (im letzten Falle) mit der Erde verbunden, so hatten sich in diesem Falle die Blättchen von sich selbst geladen. In einigen, übrigens sehr seltenen Fällen wurden die Blättchen auch dann positiv geladen, wenn auch keine der Elektroden mit der Erde verbunden war. Es wurde ferner bemerkt, dass die Erregung der Funken nicht ganz regelmässig, sondern nur stossweise vor sich ging. Die Ursache dieser Erscheinung war, wie es sich herausgestellt hat, entweder eine zu grosse Entfernung der Kügelchen bei B oder kein vollständiger Contact beim Unterbrecher. Um diese störende Wirkung zu beseitigen, gebrauchte ich bei allen weiteren Untersuchungen stets zwei Elemente und erzeugte Funken von nur 0,5 mm in der Länge. Auf diese Weise wurden ununterbrochen nur dichte Funken erhalten. Die in trockener Luft vorgenommenen Versuche bestätigten mir nochmals die einmal bereits constatirte Thatsache, dass die Entladung unter dem Einflusse der elektrischen Funken viel schneller vor sich geht als bei Abwesenheit der Funken. Die grösste Schnelligkeit wurde am Anfange beobachtet und zwar in dem Momente, als der Körper noch so ziemlich stark geladen war, dann aber wurde der Einfluss der Funken mit der fortschreitenden Entladung immer kleiner und kleiner. Beide Elektricitätsarten entladen sich fast gleich schnell (die positive jedoch etwas langsamer).

Die Versuche mit dem Wasserstoff haben Folgendes ergeben: Der Körper C wurde positiv geladen; die Entladung ohne Funken geschah in vier Minuten und mit den Funken in zehn Secunden, wobei nachher das Elektroskop von sich selbst negativ geladen hatte (mittlere Ladung).

Der Körper wurde negativ geladen und die Entladung geschah ohne Rest in drei Minuten.

Auf die Art wird der Wasserstoff unter dem Einflusse der elektrischen Funken negativ elektrisch. Dass dabei eine Aenderung des Widerstandes stattfindet, wird mit folgendem Versuche nachgewiesen. Die Funken wurden nicht erregt; der Körper war negativ elektrisch geladen; es wurde fast keine Entladung beobachtet. Der Körper war positiv geladen; sofort war die ganze Ladung verschwunden (in 15 Secunden).

Daraus folgt, dass der durch die elektrischen Funken modificirte Wasserstoff die positive Elektricität sehr gut, dagegen die negative gar nicht leitet.

Die Funken im Wasserstoffgase waren röthlich. Somit ist ersichtlich, dass die Natur eines Gases auf die Entladung der elektrisch geladenen Körper unter dem Einflusse der elektrischen Funken eine sehr grosse Rolle spielt.

Wir wollen nun jetzt die Erscheinungen, die in den anderen Gasen vor sich gehen, constatiren.

Der Ballon wurde mit trockenem Kohlendioxyd angefüllt. Als der Körper C positiv geladen wurde, so geschah die Entladung unter dem Einflusse der Funken sehr rasch (viermal schneller); wurde aber der Körper negativ geladen, so war in diesem Falle die Schnelligkeit der Entladung fast dieselbe geblieben, wie bei der ohne Funken. Eine restirende Ladung konnte infolge schlechten Wetters nicht wahrgenommen werden.

Der Ballon wurde mit trockenem Leuchtgase angefüllt. Der Körper war positiv geladen und die Entladung unter dem Einflusse der Funken geschah sehr rasch. Wurde aber der Körper negativ geladen, so übten in diesem Falle die Funken fast gar keine Wirkung auf die Entladung. Der Versuch wurde einige Male wiederholt und jedesmal war der Unterschied zwischen dem Verhalten beider Elektricitätsarten ein sehr scharfer. Die Funken waren grün.

Zum Schlusse sind auch Versuche mit reinem Sauerstoffe angestellt worden. Die Entladung des Körpers unter dem Einflusse der Funken geschah schneller als ohne Funken, gleichviel ob derselbe positiv oder negativ geladen war. Es muss aber hier noch bemerkt werden, dass nach der Entladung der positiven Elektricität die Blättchen immer schwach positiv geladen geblieben waren; woraus folgt, dass die positive Elektricität dennoch etwas langsamer entladen wurde als die negative. Die Funken waren schwach rosaroth.

Ausserdem wurden noch Versuche mit der Luft, die sich unter kleinem Drucke befand, ausgeführt. Mit der Abnahme des Druckes

geschah die Entladung beider Elektricitätsarten unter dem Einflusse der Funken immer schneller und schneller. Als aber die Funken nicht mehr erregt wurden, so übte in diesem Falle die Verminderung des Druckes keinen merklichen Einfluss auf die Ladung. Die Luft wurde aus dem Ballone mittels einer Wasserpumpe entfernt, wobei der kleinste Druck 320 mm betrug.

Mit diesen Untersuchungen scheint es mir, nun nachgewiesen zu haben, dass die elektrischen Funken die Entladung der elektrisirten Körper beschleunigen, jedoch in verschiedenen Gasen für jede Elektricitätsart in verschiedenem Grade und zwar:

In der Luft schneller die negative
„ CO_2 „ „ positive
„ H „ „ positive
„ O „ „ negative
„ Leuchtgas „ „ positive.

Diese Erscheinung ist freilich die Folgerung verschiedener Umstände und zwar:

1. Spielen hier eine gewisse Rolle die ultravioletten Strahlen (Entdeckung von Hertz), unter deren Einfluss die Entladung der negativen Elektricität geschieht, was auch hier bei der Luft und dem Sauerstoff in der That beobachtet wurde (obwohl in sehr schwachem Grade), wobei die Funken entweder schwach rosaroth oder violett waren.

2. Die Wirkung der Beleuchtung auf den Widerstand des Gases (Entdeckung von Arrhenius) kann kaum in Betracht gezogen werden, da dieselbe nur in einem sehr schwachen Grade beobachtet werden konnte.

3. Die Wirkung des elektrischen Funkens selbst (Entdeckung von Naccari), die von ihm auf die Aenderung des Widerstandes des umgebenden Mediums reducirt wird.

Der Umstand, dass im Wasserstoffe unter dem Einflusse der elektrischen Funken eine dauernde Aenderung des Widerstandes stattfand, die auch noch nach dem Aufhören der Funken existirte, spricht dafür, dass wir hier mit einer allotropischen Modification des Wasserstoffs zu thun haben. Es ist jedoch eigenthümlich, dass dieser Widerstand nur für die positive Elektricität geändert wurde [1]. Dass eine allotropische Modification des Wasserstoffs

1) Dies könnten wir vielleicht damit erklären, dass der Wasserstoff selbst negativ elektrisch wurde; dann aber sollte der Wasserstoff nach dem Entladen der positiven Elektricität seine Polarität verlieren, und sein Widerstand sollte sowohl für die positive als auch für die negative Elektricität gleich werden, was aber nie beobachtet werden konnte.

existirt, ist schon aus der Thatsache, welche von Berthelot entdeckt wurde, ersichtlich, dass Wasserstoff, dem elektrischen Funken unterworfen, schneller und in grösseren Quantitäten von organischen Substanzen absorbirt wird als ein gewöhnlicher.

Der Widerstand in CO_2 und in dem Leuchtgase vermindert sich nur während der Funkenerregung und nur hauptsächlich für die positive Elektricität. Was nun der Widerstand der Luft und des Sauerstoffes anbetrifft, so vermindert sich derselbe unter dem Einflusse der elektrischen Funken für beide Elektricitätsarten gleich stark, aber auch nur während der Funkenerregung.

Somit kann man auf Grund der vorliegenden Resultate nichts Positives über die Existenz von Antozon sagen, obwohl zwar die Thatsachen, dass die Entladung einer gewissen Elektricitätsart unter dem Einflusse der elektrischen Funken in den anderen Gasen nicht stattfindet und dass in der Luft und Sauerstoff sich beide fast gleich schnell entladen, nur für die am Anfange der vorliegenden Abhandlung aufgestellte Hypothese sprechen.

Es möge mir an dieser Stelle gestattet sein, dem Herrn Professor Dr. A. Kleiner in Zürich für sein freundliches Entgegenkommen, sowie die Bereitwilligkeit, mir die nöthigen Apparate zur Verfügung zu stellen, meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Soeben ist mir noch eine Abhandlung der Herren J. Elster und H. Geitel [1]), welche das Elektrisiren der Leiter durch glühende Körper behandelt, zu Handen gekommen.

Die Experimentatoren stellten als Ergebnis ihrer Untersuchungen folgende Resultate: Ein Leiter, der sich in der Nähe eines glühenden Körpers befindet, wird geladen:

in Luft	positiv	in Wasserdämpfen . .	positiv
„ Sauerstoff	positiv	„ Schwefeldämpfen . .	positiv
„ Wasserstoff	negativ	„ Phosphordämpfen . .	positiv

Die Verfasser untersuchten ferner auch die Leitungsfähigkeit dieser Gase und fanden, dass dieselben eine unipolare Leitung besitzen, d. h. dass bei positiver Elektrisirung vorzugsweise die negative, bei der negativen Elektrisirung dagegen die positive Elektricität entladen wird.

Die von den obigen Experimentatoren erzielten Resultate stimmen mit den meinigen überein, wie es aus folgender Zusammenstellung zu ersehen ist:

1) Sitzb. der Wiener Akademie der Wissenschaften. 97. S. 1175. 1888.



Schneller entladet sich unter dem Einfluss des elektrischen Funkens in:		Ein Leiter, der sich in der Nähe eines glühenden Körpers befindet, wird geladen in:	
Luft	die negative Elektricität	Luft	positiv
CO_2	„ positive „	CO_2	„
H	„ „ „	H	negativ
Leuchtgas	„ „ „	Leuchtgas	„
O	„ negative „	O	positiv

Nach der Veröffentlichung dieser Abhandlung in der russischen Sprache [1]) erschien noch eine diesbezügliche Arbeit von Elster und Geitel[2]). Sie haben u. A. nachgewiesen: 1. dass an den glühenden Metalloberflächen die Ozonbildung stattfindet und 2. dass die den Phosphor umgebende, ozonbildende Luft elektrisch leitend ist.

Nachdem ich Herrn Naccari von meinen Untersuchungen in Kenntnis gesetzt habe, erschien von ihm die zweite Abhandlung: „Sulla dispersione della elettricità per efetto del fosforo e delle scintille elettriche“[3]). Er fand, dass die hellen Dämpfe, welche von einem Stück Phosphor aufsteigen, eine ähnliche Wirkung, wie der elektrische Funken, auf die Zerstreuung der Elektricität besitzen. Directe Versuche mit Ozon lehrten, dass die Erscheinung von der Anwesenheit des Ozons nicht herrühre.

Combinirt man die Resultate von Elster und Geitelmit den Resultaten von A. Naccari, so ersieht man, dass in einem Falle das Ozon (Antozon?) unmittelbar nach seiner Erzeugung die Zerstreuung der Elektricität beschleunigt (Elster und Geitel), während es im anderen Falle gar keine Wirkung ausübt (Naccari). Desshalb scheint es mir berechtigt zu sein, die Frage aufzustellen, ob hier doch (in der O-enthaltenden Atmosphäre) nicht das hypothetische Antozon die Rolle spiele.

Nach der weiter oben ausgesprochenen Hypothese konnte sich in den Versuchen von Elster und Geitel neben dem Ozon auch das Antozon gebildet haben; in den Versuchen von A. Naccari dagegen war das Ozon allein ohne Antozon vorhanden, da nach der Ozonbildung eine geraume Zeit verflossen war und sich folglich das Antozon zersetzte.

Zürich-Sofia, August 1890.

1) Journal der russ. phys.-chem. Gesellsch. 21. S. 207. 1889.
2) Wied. Ann. 39. S. 321. 1890.
3) Atti d. R. Accad. Torino. 25. Febbraio 1890.

Ueber die Schwingungen periodisch erwärmter Luft.

Von

Max Margules [1]).

Die Berechnung der durch periodische Temperaturänderung entstehenden Druckschwankungen der Luft hat einiges Interesse im Zusammenhange mit einem Problem der Meteorologie, welches, wie alle dynamischen Aufgaben auf diesem Gebiete, recht umfangreiche Rechnungen erfordert.

Die von unperiodischen Einflüssen befreite tägliche Schwankung des Barometers kann man beinahe ausreichend durch die Uebereinanderlagerung zweier Wellenzüge darstellen, deren einer den ganzen Tag als Periode hat, der andere den halben. Die ganztägige Welle ist zweifellos eine Wirkung der Temperaturschwankung; sie tritt an heiteren Tagen viel stärker auf als an trüben, sie ist sehr gering auf dem Meere und zeigt auf dem Lande bedeutende örtlich bedingte Ungleichheit. Die halbtägige Welle dagegen ist von einer an meteorologischen Erscheinungen ungewohnten Regelmässigkeit, sie ist in Orten gleicher Breite von nahezu gleichem Betrage und gleicher Phase in Beziehung auf die Ortszeit. Will man auch diese Welle als Folge der Temperaturänderungen ansehen, so scheint der Zusammenhang dunkel.

Der mittlere tägliche Gang der Temperatur, für irgend einen Ort durch eine Curve dargestellt, lässt sich wie jede derartige Curve in eine Reihe von Wellenzügen auflösen, ganztägige, halbtägige, achtstündige, sechsstündige Wellen. Entsteht die ganztägige Druckwelle durch die entsprechende Temperaturwelle, die halbtägige Druckschwankung durch die halbtägige Temperaturschwankung? Warum ist der Betrag der 12 stündigen Druckoscillation so bedeutend im Vergleiche mit der 24 stündigen, während es sich bei der Temperatur umgekehrt verhält, woher die Regelmässigkeit der einen, die örtliche Verschiedenheit der anderen?

---

1) Vom Herrn Verf. mitgetheilt aus Wiener Sitz.-Ber. Bd. 99 (1890).

Diese Fragen sind wiederholt gestellt worden. In einer vor kurzem erschienenen Abhandlung[1]) hat Hann die umfassendste und eingehendste Beschreibung der täglichen Barometeroscillation gegeben, mit Benutzung reichen Beobachtungsmaterials aus allen Ländern und Oceanen zu dem Zwecke, „eine Grundlage zu schaffen für eine spätere mathematisch-physikalische Theorie".

Um dies zu erreichen, müsste man vorerst die Erscheinung unter sehr vereinfachenden Annahmen analytisch behandeln. Ich glaubte, dass einige Rechnungen über die Druckänderungen periodisch erwärmter Luft dem Verständnisse der täglichen Barometeroscillation dienen könnten. Im Verlaufe der Arbeit zeigte sich, dass man die Rechnung, will man sie einigermaassen brauchbar machen, nicht auf die einfachsten Fälle beschränken darf. Dadurch ist die Untersuchung zu etwas grösserem Umfange, als mir erwünscht war, angewachsen.

Den ausführlichen Rechnungen soll die Uebersicht einiger Resultate vorangehen. T_0 und p_0 bezeichnen die absolute Temperatur und den Druck der Luft im Ruhestande, $T_0(1+\tau)$ und $p_0(1+\varepsilon)$ Temperatur und Druck der bewegten Luft. Wenn τ als periodische Funktion der Zeit t und des Ortes gegeben ist, wird auch ε als solche erscheinen.

In einer ebenen Luftschicht, auf welche keine Kräfte wirken, soll eine Temperaturwelle mit constanter Amplitude nach der Richtung $-x$ fortschreiten.

$$\tau = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} + \frac{x}{L}\right).$$

Sie wird eine Druckwelle erzeugen

$$\varepsilon = A \frac{L^2}{L^2 - c^2 \Theta^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} + \frac{x}{L}\right)$$

(c bezeichnet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer freien Schwingung, wenn sie streng isotherm erfolgt; in Luft von der Temperatur 273° ist $c = 280$ m/sec.).

Nimmt man die Wellenlänge gleich dem Umfange des Aequators, für die Schwingungsdauer einen Tag und p_0 in Barometermaass ausgedrückt 760 mm, so bewirkt 1° Temperaturschwankung 4,4 mm Druckschwankung.

Beide Schwingungen haben gleiche Phasen, wenn ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ($V = L/\Theta$) grösser ist, entgegengesetzte Phasen, wenn sie kleiner ist als c. Für $V = c$ wird ε unendlich gross, wie

1) Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers. Denkschriften d. k. Akad. zu Wien Bd. 55, 1889. Die früheren Untersuchungen findet man in dieser Abhandlung angeführt.

es in einem reibungslosen Mittel eintreten muss, wenn die erzwungenen Schwingungen gleiche Periode haben wie die freien.

Anderes Beispiel: In einer ebenen Luftschicht, unter dem Einflusse der constanten Schwerkraft, schreitet eine Temperaturwelle gleich der vorher bezeichneten fort. Die Luft bewegt sich horizontal in der Richtung des Fortschreitens der Wellen und überdies vertical. Die Druckwelle am Boden ist durch eine ähnliche Gleichung wie vordem gegeben, nur ist im Zähler $c^2 \Theta^2$ statt L^2 zu setzen. Für Aequator, Tag und 760 mm gibt eine Temperaturschwankung von 1^0 eine Druckschwankung von 1,3 mm.

Wird aber die Temperaturamplitude nicht nach der ganzen Höhe gleich gross, sondern mit der Höhe abnehmend gesetzt, so dass sie für je 1000 m Erhebung auf den halben Betrag sinkt, so gibt eine Temperaturschwankung von 10^0 am Boden daselbst nur eine Druckschwankung von 2,4 mm.

Mit diesem Resultate könnte man in Betreff der ganztägigen Welle für continentale tropische Gebiete zufrieden sein. Die Uebereinstimmung ist jedoch nur zufällig. Die 12 stündige Druckwelle auf dem Meere bliebe ganz unverständlich. Auch auf dem Lande sollte man erwarten (da ε ungeändert bleibt, wenn man $\frac{1}{2} L$ und $\frac{1}{2} \Theta$ an Stelle von L und Θ setzt), dass die Druckamplituden in der ganztägigen und halbtägigen Welle das gleiche Verhältnis haben, wie die bezüglichen Temperaturamplituden.

Die Rechnung würde für Cylinder von grossem Durchmesser ebenso gelten wie für Ebenen; unter gewissen Einschränkungen auch für ringförmig begrenzte Lufträme. Für die Atmosphäre könnte sie nur Anwendung finden, wenn die Luft durch verticale Scheidewände den Parallelkreisen entlang in eine Anzahl von Zonen getrennt wäre. Diejenigen in der Nähe des 50. Breitegrades hätten enorme Druckschwankungen, und ebendort hätten zwei benachbarte Zonen entgegengesetzte Phasen; die Amplituden würden gegen Pol und Aequator abnehmen.

Aus den grossen Druckdifferenzen, welche man so für verschiedene Zonen erhält, ergibt sich die Nothwendigkeit, die Luft auf der ganzen Kugel ohne Scheidewände der Rechnung zu unterziehen. Ich übergehe hier die Formeln für die ruhende Kugel, um über den Theil der Rechnung zu berichten, welcher ein für das Verständnis der halbtägigen Druckwelle nützliches Resultat zu bieten scheint. Vorerst sollen einige schon von Hann citirte Sätze aus einer Abhandlung Sir W. Thomson's angeführt werden [1]).

1) On the thermo-dynamic acceleration of the earth's rotation Proc. R. S. Edinburgh, Vol. 11, 1882.

Nachdem er das Missverhältnis zwischen ganz- und halbtägiger Temperaturschwankung einerseits, Druckschwankung andererseits betont hat, fährt Thomson fort: „Man muss die Luft als Ganzes betrachten und ihre Schwingungen mit Hilfe eben jener Formeln untersuchen, welche Laplace in der Mécanique Céleste für den Ocean entwickelt hat und welche, wie er zeigt, auch für die Atmosphäre anwendbar sind. Wenn man bei Berechnung der flutherzeugenden Kraft den Temperatureinfluss statt der Anziehung einführt und die dem ganztägigen und und halbtägigen Gliede der Temperaturcurve entsprechenden Oscillationen verfolgt, wird man vermuthlich finden, dass im ersten Falle die Periode der freien Schwingungen viel weniger nahe bei 24 Stunden liegt, als im anderen Falle bei 12 Stunden, dass darum mit verhältnismässig kleinem Betrage der flutherzeugenden Kraft die Schwankung im halbtägigen Gliede grösser wird als in dem ganztägigen."

Diese Voraussagung hat sich vollständig bewährt. Wenn man die Rechnung für die Atmosphäre als rotirende Kugelschale führt, in welcher sich Temperaturwellen von Meridian zu Meridian fortpflanzen, nach der Gleichung

$$\tau = C \sin \omega \sin (nt + \lambda)$$

(ω Polabstand, λ geographische Länge, n Rotationsgeschwindigkeit der Erde), so findet man für $T_0 = 273^\circ$ die Druckwelle:

$$\varepsilon = C \sin (nt + \lambda) [1{,}146 \sin \omega - 0{,}423 \sin^3 \omega - 0{,}370 \sin^5 \omega - \\ - 0{,}106 \sin^7 \omega - 0{,}018 \sin^9 \omega - 0{,}002 \sin^{11} \omega - \ldots].$$

Wenn dagegen an jedem Orte die Welle sich täglich zweimal wiederholt und

$$\tau = C \sin^2 \omega \sin (2nt + 2\lambda)$$

angenommen wird, so folgt

$$\varepsilon = - C \sin (2nt + 2\lambda) [37{,}99 \sin^4 \omega + 23{,}06 \sin^6 \omega + 5{,}75 \sin^8 \omega + \\ + 0{,}81 \sin^{10} \omega + 0{,}07 \sin^{12} \omega + \ldots].$$

Nur der leichteren Rechnung wegen ist das Gesetz, nach welchem die Temperaturamplituden vom Aequator zum Pol abnehmen, in beiden Fällen ungleich angenommen; dies ist von geringem Einflusse auf das allgemeine Resultat, wonach bei gleichen Temperaturschwankungen die Druckschwankungen in der täglich doppelten Welle viel grösser ausfallen, als in der einfachen Welle. Die Coëfficienten der ersten Sinusreihe ändern sich nur sehr langsam mit T_0 (oder mit n, wenn man mit Thomson die Periode als Variable ansieht). Anders in der halbtägigen Welle; hier springt der Factor von $\sin^4 \omega$ in der Nähe des Werthes $T_0 = 268^\circ$ von $-\infty$ zu $+\infty$ über, ganz ähnlich wie in der vorhin betrachteten ebenen Welle, wenn die Fortpflanzungsgeschwin-

digkeit der erzwungenen Schwingung derjenigen freier Schwingungen gleich gemacht wird. Nimmt man die Temperatur der Kugelschale nahe 268° an, so genügen geringe halbtägige Temperaturwellen von kaum merklicher Amplitude, um in reibungsloser Luft grosse Druckwellen zu erzeugen.

Soweit die Rechnung. Ihre Anwendung auf die tägliche Barometerschwankung ist nur in einem Punkte klar. Die halbtägige Druckwelle kann als Folge einer ebensolchen Temperaturwelle von kleiner Amplitude angesehen werden.

Es erklärt sich wohl die relative Grösse, nicht aber die Gleichmässigkeit der halbtägigen Druckschwankung über dem Lande und dem Meere. Diese Gleichheit hat Hann veranlasst, den Ursprung der Erscheinung in der Wärmeabsorption der höheren Luftschichten zu suchen. Die unteren Schichten haben aber auch ein halbtägiges Glied der Temperaturschwankung, und zwar ein örtlich und mit dem Bevölkerungszustande veränderliches. Es fragt sich, ob die davon herrührenden Druckschwankungen neben den regelmässigen so klein sind, dass sie sich in den Mittelwerthen nicht auffällig bemerkbar machen.

Die Vernachlässigung der Reibung und der verticalen Luftbewegung in unserer letzten Rechnung, die Annahme einer in der ganzen Luftmasse constanten Mitteltemperatur und einer in gleichen Breiten gleich grossen Schwankung lassen nur vage Anwendungen zu. Eine vollständigere Rechnung mit Rücksicht auf die Vertheilung von Land und Wasser wäre ebenso schwer zu führen, wie die Berechnung der Ebbe und Fluth für einen unregelmässig gestalteten oder selbst für einen von Meridianen begrenzten Ocean.

1. Bewegung der Luft in verticalen Ebenen.

u horizontale Geschwindigkeit (nach der x-Axe), w verticale (nach der z-Axe, aufwärts), μ Dichte, p Druck, T absolute Temperatur, t Zeit, g Beschleunigung der Schwerkraft, R eine Constante.

Wir denken uns die Erde als unendliche Ebene, über welcher in allen ostwestlichen verticalen Ebenen die Bewegung der Luft in gleicher Weise stattfindet. Bei geringen Geschwindigkeiten, welche in den Bewegungsgleichungen die Glieder zweiten Grades in u, w zu vernachlässigen gestatten, sind diese Gleichungen, ferner die Continuitäts- und Zustandsgleichung der Luft:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} - g \\ &\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial (\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial (\mu w)}{\partial z} = 0 \quad p = R\mu T. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ist die Luft in Ruhe, so haben p, μ, T die Werthe p_0, μ_0, T_0 welche nur Functionen der Höhe sind.

$$\frac{1}{p_0}\frac{dp_0}{dz} = -\frac{g}{RT_0}, \quad \frac{1}{\mu_0}\frac{d\mu_0}{dz} = -\frac{g}{RT_0} - \frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{dz}, \quad p_0 = R\mu_0 T_0 \tag{2}$$

Die Bewegung soll durch kleine Temperaturschwankungen entstehen. Solche werden in der Regel auch nur geringe Schwankungen der Dichte und des Druckes erzeugen. Schreibt man

$$p = p_0(1+\varepsilon), \quad \mu = \mu_0(1+\sigma), \quad T = T_0(1+\tau),$$

so sind ε, σ, τ kleine Zahlen, deren Producte und Quadrate wir vernachlässigen.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = -RT_0\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -RT_0\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + g\tau \\ &\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} - w\left(\frac{g}{RT_0} + \frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{dz}\right) = 0, \quad \varepsilon = \sigma + \tau. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Aus diesen Gleichungen, welche an die Stelle von (1 treten, eliminirt man u, w, σ dadurch, dass man die erste nach x, die zweite nach z, die dritte nach t differentiirt.

Man erhält so die Differentialgleichung, in welcher τ als eine gegebene, ε als die zu bestimmende Function von x, z, t anzusehen ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} = \frac{g}{RT_0}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{RT_0}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{g}{RT_0}\frac{\partial \tau}{\partial z} - \\ - \frac{g}{RT_0}\left(\frac{g}{RT_0} + \frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{dz}\right)\tau - \frac{1}{RT_0}\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Bevor wir die Gleichung für Bewegungen nach zwei Dimensionen behandeln, wollen wir den einfachsten Fall linearer Schwingungen betrachten.

2. Lineare Schwingungen. Wenn $g = 0$, τ und ε nur von t und x abhängen, geht (4 über in

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - RT_0\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \tag{4a}$$

und diese, wenn beständig $\tau = 0$, in die Newton'sche Gleichung der Schallschwingungen der Luft, welche $c = \sqrt{RT_0}$ als Fortpflanzungsgeschwindigkeit gibt.

Will man nicht die Temperaturschwankung, sondern die Wärmezufuhr als bekannt ansehen, so hat man — wobei die Aenderung der kinetischen Energie als Grösse zweiten Grades in u wegzulassen ist — die Relation einzuführen

$$dQ = C_v dT + p\,d\left(\frac{1}{\mu}\right) = C_v T_0 d\tau - R T_0 d\sigma = C_p T_0 d\tau - R T_0 d\varepsilon$$

dQ, die während dt der Luftmasse 1 zugeführte Wärme, C_v specifische Wärme der Luft bei constantem Volumen, C_p ähnlich bei constantem Drucke. $C_p = C_v + R$.

$$\tau = \frac{Q}{C_v T_0} + \frac{R}{C_v}\sigma = \frac{Q}{C_p T_0} + \frac{R}{C_p}\varepsilon.$$

Durch Verbindung der letzten Gleichung mit (4a erhält man

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - R T_0 \frac{C_p}{C_v}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = \frac{1}{C_v T_v}\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}, \qquad (4b$$

welche für $Q = 0$ in die Laplace'sche Gleichung übergeht. In dieser sind die durch adiabatische Verdichtung und Verdünnung bewirkten Temperaturschwankungen der Luft bei raschen Schallschwingungen berücksichtigt, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist danach $c' = \sqrt{R T_0 C_p / C_v}$.

Für unsere Zwecke wird es bequemer sein, die Druckänderungen als Folge der Temperaturschwankungen, nicht der wechselnden Wärmezufuhr, zu betrachten. Wir kehren also zur Gleichung (4a zurück.

3. Eine fortschreitende Temperaturwelle

$$\tau = A \cdot \sin(nt + mx) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} + \frac{x}{L}\right) \qquad (5$$

bewirkt eine in gleicher Richtung fortschreitende Druckwelle

$$\varepsilon = B \cdot \sin(nt + mx), \quad B = \frac{L^2}{L^2 - c^2 \Theta^2} A. \qquad (6$$

$L/\Theta = V$ ist die Geschwindigkeit des Fortschreitens beider Wellen. Je nachdem V grösser oder kleiner ist als c, sind die Phasen der Wellen übereinstimmend oder entgegengesetzt. $V = c$ führt zu unendlich grossen B, ein Resultat, zu welchem man jedesmal kommen muss, wenn in einem reibungslosen Mittel die Periode der erzwungenen Schwingungen mit jener der freien übereinstimmt.

Für Luft ist $R = 10333 \cdot 9{,}806/273 \cdot 1{,}293 = 287{,}0$. Als Einheiten sind hier und im Folgenden Meter, Kilogramm, Secunde und Grad des hunderttheiligen Thermometers, bei Druckangaben gelegentlich Barometermaass angenommen. Für $T_0 = 273^0$ ist $c = 279{,}9$.

$L = 4 \cdot 10^7$ (Umfang des Aequators) $\Theta = 24 \cdot 60 \cdot 60$ (ein Tag) und $T_0 = 273^0$ gibt eine Druckwelle, deren Maximum mit dem Maximum der Temperatur zusammenfällt und $B = 1{,}576\,A$. Eine Temperaturschwankung von 1^0 erzeugt eine Druckschwankung $p_0 \cdot 1{,}576/273$ oder von 4,4 mm Quecksilberhöhe, wenn p_0 in diesem Maasse 760 ist.

Wenn man in einer Schicht von merklicher Höhe, ohne Vernachlässigung der Schwerkraft, rein horizontale Schwingungen erhalten wollte, wäre A, wie man aus den Gleichungen (3 ableitet, als Function der Höhe einzuführen, welche der Bedingung genügt:

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dz} = \frac{g}{c^2}\frac{L^2 - c^2\Theta^2}{L^2}.$$

Für isotherme Schwingungen in einer verticalen Luftsäule ($\tau = 0$ und $\partial\varepsilon/\partial x = 0$) geht (4 über in

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial z^2} - \frac{g}{RT_0}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{RT_0}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} = 0.$$

Diese Gleichung oder die entsprechende Gleichung in w ist von Lord Rayleigh vor kurzem (Phil. Mag. 1890, Febr.) ausführlich discutirt worden.

4. Schwingungen der Luft bei Berücksichtigung der Schwerkraft, wenn eine Temperaturwelle horizontal fortschreitet. Für constantes T_0 und $\tau = A \sin(mx + nt)$ gesetzt, geht die Differentialgleichung (4 über in

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} - \frac{\alpha}{g}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} = -\frac{\alpha}{g}\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2} - \alpha^2\tau, \qquad (4c$$

$$[\alpha = g/RT_0].$$

Die Druckwelle ist zu suchen in der Form

$$\varepsilon = F(z)\sin(mx + nt).$$

$$\frac{d^2F}{dz^2} - \alpha\frac{dF}{dz} + hF = \left(\frac{\alpha}{g}n^2 - \alpha^2\right)A, \quad \left[h = \frac{\alpha}{g}n^2 - m^2\right]$$

$$F(z) - B + K_1 e^{k_1 z} + K_2 e^{k_2 z}, \quad B = \frac{A}{h}\left(\frac{\alpha}{g}n^2 - \alpha^2\right),$$

$$k_1 = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - h}, \qquad k_2 = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - h}.$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten K_1 und K_2, deren Factoren in ε freie Schwingungen darstellen, führen wir ein, dass $w = 0$ für $z = 0$ und für ein sehr grosses $z = Z$, welches einer fictiven oberen Begrenzungsebene der Atmosphäre zugehört. Aus der zweiten der Gleichungen (3 erhält man

$$w = \frac{g}{\alpha n}(K_1 k_1 e^{k_1 z} + K_2 k_2 e^{k_2 z} - \alpha A)\cos(mx + nt).$$

Die Grenzbedingungen geben danach:

$$K_1 k_1 + K_2 k_2 = \alpha A, \qquad K_1 k_1 e^{k_1 Z} + K_2 k_2 e^{k_2 Z} = \alpha A$$

$$K_1 k_1 = \alpha A\frac{e^{k_2 Z} - 1}{e^{k_2 Z} - e^{k_1 Z}}, \qquad K_2 k_2 = \alpha A\frac{1 - e^{k_1 Z}}{e^{k_2 Z} - e^{k_1 Z}}.$$

Ist nun, wie in unserem Beispiel (Wellenlänge, Erdumfang, Periode ein Tag), h sehr klein gegen α^2, so ist k_1 sehr klein, k_2 nahe α.

Demnach K_2 um so kleiner, je grösser Z. Will man die Schlussformel nur auf im Vergleiche mit Z geringe Höhen anwenden, so bleibt auch $K_2 e^{k_2 z}$ verschwindend klein. Mit dieser Einschränkung setzen wir $K_2 = 0$, $K_1 k_1 = \alpha A$.

$$w = A \frac{g}{n} (e^{k_1 z} - 1) \cos (mx + nt)$$

$$\varepsilon = A \left(\frac{\alpha n^2}{gh} - \frac{\alpha^2}{h} + \frac{\alpha}{k_1} e^{k_1 z} \right) \sin (mx + nt).$$

Unter der Annamhe eines kleinen h / α^2 ist

$$k_1 = \alpha \left(\frac{h}{\alpha^2} + \frac{h^2}{\alpha^4} \right), \quad \frac{\alpha}{k_1} - \frac{\alpha^2}{h} - 1$$

und wenn man von der Reihe der Exponentiellen nur die zwei ersten Glieder beibehält

$$\varepsilon = A \left(\frac{m^2}{h} + \alpha z \right) \sin (mx + nt) = A \left(\frac{c^2 \Theta^2}{L^2 - c^2 \Theta^2} + \alpha z \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} + \frac{x}{L} \right).$$

Für $L = 4{,}10^7$, $\Theta = 24 \cdot 60 . 60$ erhält man

$$\varepsilon = A \, (0{,}576 + 0{,}000125 \, z) \sin (mx + nt).$$

Die relative Druckschwankung wächst in der Nähe des Bodens sehr langsam mit der Höhe. Am Boden selbst fällt sie beträchtlich kleiner aus (im Verhältnisse 0,576 / 1,576 kleiner), als in dem Beispiele des dritten Abschnittes, wo rein horizontale Schwingungen stattfanden. Eine tägliche Temperaturschwankung von 1° würde hier eine Druckschwankung von 1,6 (mm) erzeugen. Die Phasen beider Schwingungen fallen zusammen, wenn $L > c\,\Theta$.

5. Aehnliche Rechnung für den Fall, dass die Temperaturschwankung mit der Höhe abnimmt.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{\alpha}{g} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{\alpha}{g} \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \alpha^2 \tau. \tag{4d}$$

Der Annahme $\tau = A e^{-sz} \sin (mx + nt)$ entspricht

$$\varepsilon = (B e^{-sz} + K e^{kz}) \cdot \sin (mx + nt),$$

$$B (s^2 + \alpha s + h) = A \left(\frac{\alpha n^2}{g} - \alpha^2 - \alpha s \right), \quad k = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - h}.$$

h hat die gleiche Bedeutung wie vorhin K steht statt des K_1 und K_2 entfällt unter gleicher Einschränkung wie zuvor.

Aus der Bedingung $w = 0$ für $z = 0$ folgt $Kk = Bs + A\alpha$, demnach

$$\varepsilon = \frac{A}{s^2 + \alpha s + h} \left\{ \left(\frac{\alpha}{g} n^2 - \alpha^2 - \alpha s \right) e^{-sz} + \frac{\alpha}{k} \left(\frac{n^2}{g} s + h \right) e^{kz} \right\} \sin (mx + nt).$$

Ist h/α^2 sehr klein, s von gleicher Grössenordnung wie α oder noch viel grösser, so geht für nicht zu grosse z die letzte Gleichung über in

$$\varepsilon = A\left(\frac{\alpha}{s+\alpha}\frac{m^2}{h} + \alpha z\right)\sin(mx+nt) =$$

$$= A\left(\frac{\alpha}{s+\alpha}\frac{c^2\Theta^2}{L^2 - c^2\Theta^2} + \alpha z\right)\sin 2n\left(\frac{x}{L}+\frac{t}{\Theta}\right).$$

Setzt man $s = 0{,}000693$, so ist die Temperaturschwankung in 1000 m Höhe halb so gross, wie am Boden. Mit diesem Werthe und denselben L, Θ, wie oben, wird

$$\varepsilon = A\,(0{,}153 \cdot 0{,}576 + 0{,}000125\, z)\sin(mx+nt).$$

Bei einer Mitteltemperatur von 273° erzeugt eine tägliche Schwankung von 10° am Boden eine Barometerschwankung von 2,45 (mm).

6. Umwandlung der Differentialgleichungen für Kugelcoordinaten.

Statt der geradlinigen Coordinaten x, y, z werden die Kugelcoordinaten: r Radius, ω Polabstand, λ östliche Länge von einem bestimmten Meridian eingeführt.

$$x = r\sin\omega\cos\lambda,\qquad y = r\sin\omega\sin\lambda,\qquad z = r\cos\omega.$$

Die Bewegungsgleichungen eines Punktes, auf welchen die Kräfte X, Y, Z nach den geradlinigen Axen wirken, $X = d^2x/dt^2, \ldots$ gehen über in

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - r\sin^2\omega\cdot\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 \\ \Omega &= r\frac{d^2\omega}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\omega}{dt} - r\cos\omega\sin\omega\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 \\ A &= r\sin\omega\frac{d^2\lambda}{dt^2} + 2\sin\omega\frac{dr}{dt}\frac{d\lambda}{dt} + 2r\cos\omega\frac{d\omega}{dt}\frac{d\lambda}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (7$$

wo P, Ω, A die Kraftcomponenten nach den Richtungen der Ordinatenelemente dr, $r\,d\omega$, $r\sin\omega\,d\lambda$ bezeichnen. Sind die Geschwindigkeiten so gering, dass man deren Quadrate und Producte vernachlässigen darf, so bleibt auf der rechten Seite jeder Gleichung nur das erste Glied übrig

$$\frac{dr}{dt} = a,\quad r\frac{d\omega}{dt} = b,\quad r\sin\omega\frac{d\lambda}{dt} = c.$$

gesetzt, hat man

$$P = \frac{da}{dt},\quad \Omega = \frac{db}{dt} = b,\quad A = \frac{dc}{dt}.$$

Die Bewegungsgleichungen einer Flüssigkeit, auf welche nur die constante Schwerkraft in der Richtung des abnehmenden Radius wirkt, sind danach:

$$-g-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\partial a}{\partial t}, \quad -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{r\,\partial\omega}=\frac{\partial b}{\partial t}, \quad -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{r\sin\omega\,\partial\lambda}=\frac{\partial c}{\partial t}. \qquad (8$$

Diese Gleichungen sind für die Bewegung auf einer ruhenden Kugel anzuwenden. Um die relative Bewegung auf der rotirenden Erdkugel zu untersuchen, formt man die Gleichung (7 noch um, indem man $\nu t+\lambda$ an Stelle von λ setzt; ν Rotationsgeschwindigkeit der Erde. $\nu+d\lambda/dt$ tritt statt des früheren $d\lambda/dt$ in (7 ein. Setzt man wieder c für das neue $r\sin\omega\, d\lambda/dt$, behält die Producte νa, νb, νc bei, lässt dagegen die Glieder mit ν^2, welche nur eine geringfügige Aenderung der Schwerkraft bedeuten, fallen, so erhält man die Gleichungen für die Bewegung einer Flüssigkeit auf einer rotirenden Kugel. Auf der rechten Seite der Gleichung (8 treten der Reihe nach $-2\nu c\sin\cos\omega$, $-2\nu c\cos\omega$ und $+2\nu a\sin\omega+2\nu b\cos\omega$ hinzu.

Die Continuitätsgleichung hat für die ruhende wie für die rotirende Kugel die gleiche Gestalt

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\frac{\partial(\mu r^2 a)}{r^2\partial r}+\frac{\partial(\mu b\sin\omega)}{r\sin\omega\,\partial\omega}+\frac{\partial(\mu c)}{r\sin\omega\,\partial\lambda}=0. \qquad (9$$

Nach Einführung der oben angewandten Bezeichnungen

$$p=p_0(1+\varepsilon), \qquad T=T(1+\tau)$$

erhält man für die durch kleine Temperaturschwankungen τ auf der rotirenden Kugel eintretenden Bewegungen der Luft folgende Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
g\tau-RT_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}&=\frac{\partial a}{\partial t}-2\nu\sin\omega\cdot c\\
-RT_0\frac{\partial\varepsilon}{r\,\partial\omega}&=\frac{\partial b}{\partial t}-2\nu\cos\omega\cdot c\\
-RT_0\frac{\partial\varepsilon}{r\sin\omega\,\partial\lambda}&=\frac{\partial c}{\partial t}+2\nu\sin\omega\cdot a+2\nu\cos\omega\cdot b\\
\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}-\frac{\partial\tau}{\partial t}+\left(\frac{2}{r}-\frac{g}{RT_0}\right)a+\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{\partial(b\sin\omega)}{r\sin\omega\,\partial\omega}&+\frac{\partial c}{r\sin\omega\,\partial\lambda}=0
\end{aligned}\right\} \qquad (10$$

$\nu=0$ gesetzt, gibt die entsprechenden Gleichungen für die ruhende Kugel.

7. Luft in einer ruhenden Kugelschale. Einfache und doppelte tägliche Wellen. Aehnlich wie bei der ersten Rechnung für die Ebene im zweiten Abschnitte werden nur horizontale Bewegungen angenommen. Ueberdies wird der Radius der Kugel S sehr gross gegen

die Höhe der Luftschicht gesetzt. Führt man S statt r, $a = 0$ und $\nu = 0$ in die Gleichung (10 ein, eliminirt b, c aus den drei letzten, so folgt:

$$\frac{S^2}{RT_0}\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}\sin\omega\right) + \frac{\partial^2\varepsilon}{\sin^2\omega\,\partial\lambda^2} = 0. \tag{11}$$

Die Temperaturwelle $\tau = A \sin\omega \sin(nt + \lambda)$ erzeugt eine Druckwelle $\varepsilon = B \sin\omega \sin(nt + \lambda)$

$$B\left(\frac{n^2 S^2}{RT_0} - 2\right) = A\,\frac{n^2 S^2}{RT_0}.$$

Mit $T_0 = 273°$, $n = 2\pi/(24 \cdot 60 \cdot 60)$, S Erdradius und $p_0 =$ 760 mm gibt eine Temperaturschwankung von 1° am Aequator daselbst eine Druckschwankung von 10,4 mm. B wird ebenso gross wie bei einer ebenen Welle gleicher Periode, wenn man als Wellenlänge im letzteren Falle den Umfang des Parallelkreises in 45° Breite nimmt.

Für $\tau = A \cdot \sin^2\omega\,(2nt + 2\lambda)$ erhält man die Druckwelle $\varepsilon = B$ $\sin^2\omega \cdot \sin\,(2nt + 2\lambda)$

$$B\left(\frac{4n^2 S^2}{RT_0} - 6\right) = A\,\frac{4n^2 S^2}{RT_0}.$$

Mit denselben Constanten gibt 1° Temperaturschwankung am Aequator 6,2 mm Druckschwankung.

Dass die particulären Integrale, welche wir als Lösung der Differentialgleichung (11 in beiden Fällen gegeben haben, die vollständige Lösung für die ganze Kugelschale enthalten, wird noch bei Gelegenheit der Rechnung für die rotirende Kugel zu erörtern sein.

Nennt man Θ_1 die Schwingungsdauer, für welche bei der einfachen Welle B unendlich gross wird, ähnlich Θ_2 für die doppelte Welle, so ist

$$\Theta_1 = \frac{2\pi}{n_1} = \frac{2\pi S}{\sqrt{2RT_0}}, \qquad \Theta_2 = \frac{2\pi}{2n_2} = \frac{2\pi S}{\sqrt{6RT_0}}.$$

Das sind die Werthe für die Perioden freier Schwingungen einer Kugelschale. Lord Rayleigh (l. c.) untersuchte nur solche und findet, indem er statt $\sqrt{RT_0}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{RT_0\,C_p/C_v}$ einführt, für die Atmosphäre auf der ruhenden Erde $\Theta_1 = 23{,}8$ Stunden, $\Theta_2 = 13{,}7$ Stunden, also die erste viel näher bei 24, als die zweite bei 12 Stunden. Er bemerkt jedoch, es sei zweifelhaft, ob man für Schwingungen von so langer Dauer die Laplace'sche Fortpflanzungsgeschwindigkeit annehmen dürfe. Immerhin bleibe die relative Grösse der halbtägigen Barometerschwankung ein Räthsel. Das gilt jedoch nur, so lange man die Rechnung auf die ruhende Kugel beschränkt.

8. Rechnung für die rotirende Kugel. Ganztägige Welle. Auch in diesem Falle wird die Rechnung nur für Luft in einer Kugelschale geführt, deren Dicke gering ist im Vergleiche mit dem Radius der Kugel S; ferner unter der Annahme horizontaler Bewegungen, $a = 0$. [Diese Annahme und das Weglassen der ersten der Gleichung (10 sind durchaus nicht tadellos; sie sind dem analogen Verfahren in der Theorie der Gezeiten nachgeahmt.] Der Unterschied zwischen Sterntag und Sonnentag wird nicht berücksichtigt und $\nu = n$ gesetzt.

$$\left.\begin{aligned} -\frac{RT_0}{S}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} &= \frac{\partial b}{\partial t} - 2n\cos\omega\cdot c, \\ -\frac{RT_0}{S}\frac{\partial\varepsilon}{\sin\omega\,\partial\lambda} &= \frac{\partial c}{\partial t} + 2n\cos\omega\cdot b \\ S\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial\tau}{\partial t}\right) + \frac{1}{\sin\omega}&\left\{\frac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega} + \frac{\partial c}{\partial\lambda}\right\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

Wenn $\tau = A\;(\omega)\cdot\sin\;(nt + \lambda)$, so sind ε, b, c in folgender Form zu suchen:

$$\varepsilon = E(\omega)\;\sin(nt + \lambda),\quad b = \varphi(\omega)\cdot\cos(nt + \lambda),\quad c = \psi(\omega)\cdot\sin(nt + \lambda),$$

wodurch die letzte der Gleichungen $10a$) übergeht in:

$$nS(E - A) + \frac{1}{\sin\omega}\left\{\frac{d\,(\varphi\sin\omega)}{\partial\omega} + \psi\right\} = 0,$$

während die zwei ersten geben:

$$\varphi = \frac{RT_0}{nS}\cdot\frac{\dfrac{dE}{d\omega} + E\cdot\dfrac{2\cos\omega}{\sin\omega}}{1 - 4\cos^2\omega},\qquad \psi = -\frac{RT_0}{nS}\frac{\dfrac{dE}{d\omega}2\cos\omega + \dfrac{E}{\sin\omega}}{1 - 4\cos^2\omega}.$$

Diese Werthe, in die vorhergehende Gleichung eingesetzt, führen zu einer Beziehung zwischen E und A allein oder zwischen ε und τ. Für die weitere Rechnung ist es bequem, eine Hilfsfunction $\Phi\;(\omega)$ zu benutzen:

$$\Phi(\omega) = \frac{nS}{RT_0}\varphi(\omega)\cdot\sin\omega,\quad (1 - 4\cos^2\omega)\,\Phi = \frac{1}{\sin\omega}\cdot\frac{d\,(E\sin^2\omega)}{d\omega}$$

$$E = \frac{1}{\sin^2\omega}\int\Phi(\omega)\cdot\sin\omega\cdot(4\sin^2\omega - 3)\,d\omega$$

$$\frac{n^2S^2}{RT_0}(E - A) + \frac{1}{\sin\omega}\left\{\frac{d\Phi}{d\omega} - \Phi\frac{2\cos\omega}{\sin\omega} - \frac{E}{\sin\omega}\right\} = 0.$$

Nimmt man Φ in folgender Form an:

$$\Phi(\omega) = \cos\omega\,(a_1\sin\omega + a_3\sin^3\omega + a_5\,\omega\sin^5 + \ldots),$$

so folgt:

$$E(\omega) = b_1 \sin\omega + b_3 \sin^3\omega + b_5 \sin^5\omega + \dots$$

$$b_1 = -a_1, \quad b_3 = \frac{4a_1 - 3a_3}{5}, \quad b_5 = \frac{4a_3 - 3a_5}{7}, \dots$$

Wenn man die Temperaturamplitude vom Aequator zum Pol nach dem Cosinus der Breite abnehmen lässt,

$$A(\omega) = C \cdot \sin\omega$$

und zur Abkürzung $k = n^2 S^2 / RT_0$ setzt, so erhält man zur Bestimmung der Constanten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\left(1 + \frac{3}{5}\right) a_3 - \left(k + \frac{4}{5}\right) a_1 - kC = 0 \\
\left(3 + \frac{3}{7}\right) a_5 - \left(\frac{3}{5} k + \frac{4}{7} + 2\right) a_3 + \frac{4}{5} k a_1 = 0 \\
\left(i - 2 + \frac{3}{i+2}\right) a_i - \left(\frac{3}{i} k + \frac{4}{i+2} + i - 3\right) a_{i-2} + \frac{4}{i} k a_{i-4} = 0 \\
i = 5, 7, 9, \dots
\end{aligned}\right\} (11a$$

a_1 bleibt scheinbar unbestimmt. Zur Berechnung der anderen schreibt man nach dem Vorgange von Laplace

$$\frac{a_{i-2}}{a_{i-4}} = \frac{4k(i+2)}{3k(i+2) + (i-2)\,i\,(i+2) - (i-1)\,i\,(i+1)\,\frac{a_i}{a_{i-2}}}.$$

Indem man nun durch Vertauschung von i mit $i + 2$ einen ähnlichen Ausdruck für a_i / a_{i-2} bildet, dann ebenso für a_{i+2}/a_i u. s. f. und diese Werthe in die obige Gleichung einsetzt, erhält man einen unendlichen, sehr rasch convergirenden Kettenbruch.

$$q_3 = \frac{a_5}{a_3} = \frac{4k \cdot 9}{N_3 - \frac{Z_5}{N_5 - \frac{Z_7}{N_7 - \dots}}} \qquad q_5 = \frac{a_7}{a_5} = \frac{4k \cdot 11}{N_5 - \frac{Z_7}{N_7 - \frac{Z_9}{N_9 - \dots}}}$$

$$N_1 = 3k \cdot 7 + 3 \cdot 5 \cdot 6, \; N_3 = 3k \cdot 9 + 5 \cdot 7 \cdot 8, \; N_5 = 3k \cdot 11 + 7 \cdot 9 \cdot 10, \dots$$
$$Z_3 = 4k \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9 \qquad Z_5 = 4k \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11, \dots$$

Setzt man nun in die zweite der Gleichungen (11a $a_5 = q_3 a_3$ ein, so ist auch a_3 / a_1 bestimmt, und der Quotient hat den gleichen Werth, als wäre er aus dem Kettenbruche

$$q_1 = \frac{a_3}{a_1} = \frac{4k \cdot 7}{N_1 - \frac{Z_3}{N_3 - \frac{Z_5}{N_5 - \dots}}}$$

gerechnet worden. Durch die erste der Gleichungen (11a bekommt man auch den Werth von a_1, folglich $a_3 = q_1 a_1$, $a_5 = q_1 q_3 a_1$ u. s. f.

Nimmt man bei Berechnnng von q_1 eine genügende Anzahl von Brüchen (bis N_{19} etwa), so hat man damit auch den grössten Theil der numerischen Rechnung für q_3, q_5, q_7 geleistet.

Diese merkwürdige Art der Constantenbestimmung hat Laplace in der Theorie der Ebbe und Fluth angewendet. Ihre wahre Bedeutung erkannte erst wieder Sir W. Thomson, welcher sie gegen Airy vertheidigt hat. (On an alleged error in Laplace's theory of tides, Phil. Mag. (4), Bd. 50, 1875, S. 227.) Ohne den Commentar wäre die Rechnung nicht leicht zu verstehen. In unserem Falle stellt sich die Sache ganz ähnlich dar. Die Differentialgleichung (11 ist, wenn man Φ durch E ersetzt, von der zweiten Ordnung und soll ein Integral mit zwei willkürlichen Constanten haben. Diese könnte man bestimmen, wenn an zwei beliebigen Parallelkreisen Bedingungen zu erfüllen sind, z. B. $\varepsilon = 0$ oder $b = 0$. Eine Constante entfällt, wenn man den einen Parallelkreis mit dem Pol zusammenfallen lässt, die andere wird hier so bestimmt, wie wenn der zweite Kreis der Aequator selbst wäre. Am Aequator muss nämlich der Symmetrie wegen $b = 0$ sein. Seine Ebene ist wie eine feste Scheidewand anzusehen.

(Die Rechnung hat zur Voraussetzung, dass a_i / a_{i-2} mit wachsendem i gegen Null convergirt. Nimmt man für a_1 nicht den Werth, welcher sich aus der Kettenbruchrechnung ergibt, sondern einen beliebigen andern und rechnet damit a_3, a_5, ... aus (11 a, so erhält man eine Reihe, welche für $\sin\omega = 1$ divergirt.)

Ich habe die Constanten mit zwei Werthen von k berechnet. $k = 2{,}5$, d. i. bei $n = 2\pi / (24 \cdot 60 \cdot 60)$, $S = 4 \cdot 10^7 / (2\pi)$ und $R = 287{,}0$ für $T_0 = 298{,}7^\circ$ und für $k = 2{,}7352$ oder $T_0 = 273^\circ$. Wenn man noch $\alpha_1 C, \alpha_3 C, \ldots$ statt $a_1, a_3, \ldots$ und $\beta_1 C, \beta_3 C, \ldots$ statt b_1, $b_3, \ldots$ schreibt, findet man:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= C \sin\omega \cdot \sin(nt + \lambda), \quad \Phi = C \cos\omega\,(\alpha_1 \sin\omega + \alpha_3 \sin^3\omega + \ldots) \\ \varepsilon &= C \sin(nt + \lambda) \cdot [\beta_1 \sin\omega + \beta_3 \sin^3\omega + \beta_5 \sin^5\omega + \ldots] \end{aligned}\right\} \quad (12$$

	α_1	α_3	α_5	α_7	α_9
$k = 2{,}5$	$-1{,}119$	$-0{,}745$	$-0{,}232$	$-0{,}040$	$-0{,}004$
$k = 2{,}7352$	$-1{,}146$	$-0{,}823$	$-0{,}279$	$-0{,}053$	$-0{,}006$

	β_1	β_3	β_5	β_7	β_9
$k = 2{,}5$	$1{,}119$	$-0{,}448$	$-0{,}326$	$-0{,}090$	$-0{,}113$
$k = 2{,}7352$	$1{,}146$	$-0{,}423$	$-0{,}370$	$-0{,}106$	$-0{,}018$

Mit dem Werthe $k = 2{,}7352$ erhält man als Summe der Sinusreihe in ε am Aequator 0,23, in 30° Breite 0,50, in 45° 0,58, in 60° Breite 0,51. Die Druckschwankung hat ein Maximum in der Nähe von 45°, wenn man die Temperaturschwankung dem Cosinus der Breite proportional annimmt. Für $2\,C = 1/273$, d. i. für eine Temperatur-

schwankung von 1° am Aequator ergibt sich die Druckschwankung daselbst 0,64 mm, in 45° dagegen 1,6 mm.

Die Rechnung soll noch für einen anderen Fall durchgeführt werden, um zu untersuchen, wie sich die Resultate ändern, wenn man die Temperaturamplitude vom Aequator zum Pol rascher abnehmen lässt.

$$A(\omega) = C \sin^3 \omega$$

gibt zur Bestimmung der a die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \left(1 + \frac{3}{5}\right) a_3 - \left(k + \frac{4}{5}\right) a_1 &= 0 \\ \left(3 + \frac{3}{7}\right) a_5 - \left(2 + \frac{4}{7} + \frac{3}{5} k\right) a_3 + \frac{4}{5} k a_1 &= kC \\ \left(5 + \frac{3}{9}\right) a_7 - \left(4 + \frac{4}{9} + \frac{3}{7} k\right) a_5 + \frac{4}{7} k a_3 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (11\text{b}$$

Das Verhältnis a_3/a_1 ergibt sich aus der ersten Gleichung, $q_3, q_5 \ldots$ jedoch behalten die gleichen Werthe wie zuvor. Den Werth von a_1 bestimmt die zweite Gleichung.

$$\left.\begin{aligned} \tau &= C \sin^3 \omega \cdot \sin(nt + \lambda) \\ \varepsilon &= C \sin(nt + \lambda)\,[\beta_1 \sin \omega + \beta_3 \sin^3 \omega + \beta_5 \sin^5 \omega + \ldots] \end{aligned}\right\} \quad (12\text{b}$$

$$k = 2{,}7352, \quad \beta_1 = 0{,}601, \quad \beta_3 = 0{,}316, \quad \beta_5 = -0{,}566,$$
$$\beta_7 = -0{,}172, \quad \beta_9 = -0{,}030, \quad \beta_{11} = -0{,}003, \ldots$$

Die Summe der Sinusreihe in ε ist am Aequator 0,15, in 30° Breite 0,38, in 45° 0,42, in 60° 0,32. Wieder findet man ein Minimum am Aequator, das Maximum der Druckamplitude liegt zwischen 30° und 45°, die Abnahme in höheren Breiten ist stärker als im vorigen Beispiel, aber doch langsam im Vergleiche mit der Abnahme der Temperaturamplitude. Grösster Druck und höchste Temperatur sollten den Gleichungen (12 und (12b zufolge gleichzeitig eintreten.

9. Rotirende Kugel: Halbtägige Welle. Setzt man in die Differentialgleichungen (10*a* für die horizontalen Bewegungen auf einer rotirenden Kugel

$$\tau = A(\omega) \cdot \sin(2nt + 2\lambda), \qquad \varepsilon = E(\omega) \sin(2nt + 2\lambda)$$
$$b = \varphi(\omega) \cos(2nt + 2\lambda) \qquad c = \psi(\omega) \sin(2nt + 2\lambda)$$

so folgt:

$$\varphi = \frac{RT_0}{2nS} \frac{\frac{dE}{d\omega} + E \frac{2 \cos \omega}{\sin \omega}}{\sin^2 \omega}, \qquad \psi = -\frac{RT_0}{2nS} \frac{\frac{dE}{d\omega} \cos \omega + \frac{2E}{\sin \omega}}{\sin^2 \omega}$$

$$2nS(E - A) + \frac{1}{\sin \omega}\left\{\frac{d(\varphi \sin \omega)}{d\omega} + 2\psi\right\} = 0.$$

Nach Eliminirung von φ und ψ bleibt, wenn man wieder $n^2 S^2 / (RT_0) = k$ setzt,

$$\frac{d^2E}{d\omega^2}\sin^2\omega - \frac{dE}{d\omega}\sin\omega\cos\omega + E(4k\sin^4\omega + 2\sin^2\omega - 8) = 4k \cdot A(\omega)\cdot\sin^4\omega. \tag{13}$$

Nimmt man noch $A(\omega) = C\sin^2\omega$ an, so hat man es mit der gleichen Aufgabe zu thun, wie bei Berechnung der halbtägigen Ebbe und Fluth in einem Ocean von constanter Tiefe.

$$E(\omega) = a_0 + a_2\sin^2\omega + a_4\sin^4\omega + a_6\sin^6\omega + \dots$$

gesetzt, gibt $a_0 = 0$, $a_2 = 0$, a_4 scheinbar unbestimmt,

$$\left.\begin{aligned}&(4\cdot 6 - 8)\,a_6 - (3\cdot 4 - 2)\,a_4 - 4kC = 0\\ &(i^2 + 6i)\,a_{i+4} - (i^2 + 3i)\,a_{i+2} + 4k\,a_i = 0, \quad i = 4, 6, 8, \dots\end{aligned}\right\}\tag{13a}$$

$$q_i = \frac{a_{i+2}}{a_i} = \frac{4k}{i(i+3) - i(i+6)\dfrac{a_{i+4}}{a_{i+2}}}.$$

Daraus entwickelt man die Kettenbrüche wie vorhin und berechnet die Verhältnisse der Constanten. Dann bleibt auch a_4 nicht unbestimmt, sondern sein Werth ergibt sich gleich $-Cq_2$; demnach $a_6 = -Cq_2q_4$, $a_8 = -Cq_2q_4q_6$, ...

$$\left.\begin{aligned}&\tau = \sin^2\omega\cdot\sin(2nt + 2\lambda)\\ &\varepsilon = C\sin(2nt + 2\lambda)\,[\alpha_4\sin^4\omega + \alpha_6\sin^6\omega + \alpha_8\sin^8\omega + \dots]\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

Für $4k = 40, 10, 5$ hat Laplace die Constanten berechnet. Nur der mittlere Werth ist für unsere Aufgabe von Interesse. Ich habe noch für einige benachbarte Werthe von k die Rechnung ausgeführt.

	$4k = 10$ $T_0 = 298°7$	$4k = 10{,}94$ $T_0 = 273°0$	$4k = 11$ $T_0 = 271°5$	$4k = 11{,}1$ $T_0 = 269°1$	$4k = 11{,}2$ $T_0 = 266°7$	$4k = 12$ $T_0 = 248°9$
α_4	−6,196	−37,99	−55,00	−247,8	101,8	8,270
α_6	−3,247	−23,06	−33,68	−154,2	64,3	5,919
α_8	−0,724	−5,75	−8,46	−39,2	16,5	1,662
α_{10}	−0,092	−0,81	−1,20	−5,6	2,4	0,260
α_{12}	−0,008	−0,07	−0,11	−0,5	0,2	0,026

Diese Zahlen bestätigen Thomson's Vermuthung, dass die Periode freier Schwingungen dieser Art in einer rotirenden Luftkugelschale (von gewöhnlicher Temperatur) sehr nahe bei 12 Stunden liegt. Statt die Rotationsgeschwindigkeit der Erde so zu bestimmen, dass die Periode gerade mit einem halben Tage zusammenfällt, können wir die Temperatur demgemäss wählen. Sie liegt nahe bei 268°. Dort

geht α_4 von $-\infty$ zu $+\infty$ über. In der Nähe dieses Werthes müssen erzwungene Schwingungen zu ungemein grossen Amplituden führen. Es würde danach eine ganz geringe, halbtägige Temperaturwelle genügen, um eine sehr grosse Druckwelle derselben Periode zu erzeugen. Die Phasen beider sind übereinstimmend bei Temperaturen unter 268°, andernfalls entgegengesetzt.

Mit $4k = 10$ oder $T_0 = 298{,}7$ erhält man am Aequator

$$s = -10{,}26\ C. \sin(2nt + 2\lambda).$$

Eine Temperaturamplitude von $0{,}038° = 298{,}7/(760 \cdot 10{,}26)$ würde genügen, um eine Druckamplitude von 1 (mm) zu erzeugen.

Die Vergleichung der Atmosphäre mit einer Kugelschale von der constanten Temperatur 298,7° gibt, wie wir sehen werden, die Mondfluth am Aequator viel grösser, als sie sich aus den Beobachtungen ableiten lässt. Demgemäss müsste man auch entsprechend grössere Temperaturamplituden bei der halbtägigen Welle fordern, um die beobachteten Druckamplituden von 1 (mm) am Aequator zu erzeugen. Den Zahlenwerthen kommt, angesichts der grossen Unvollkommenheit der Voraussetzungen, keine Bedeutung zu. Das einzige, was aus dieser Rechnung folgt, ist, dass zur Erzeugung halbtägiger Druckschwankungen, von gleichem Betrage wie die ganztägigen, viel kleinere Temperaturschwankungen genügen.

10. Ebbe und Fluth der Atmosphäre. Um den Vergleich der in den Abschnitten 8 und 9 behandelten Aufgaben mit den für die Ebbe und Fluth geführten Rechnungen zu erleichtern, erlaube ich mir noch Einiges hinzuzufügen, was nicht eigentlich zum Gegenstande dieser Untersuchung gehört. Die folgenden Formeln unterscheiden sich von den gebräuchlichen nur in der Bezeichnung und darin, dass statt der Verschiebungen die Geschwindigkeiten beibehalten sind. (Man vergleiche z. B. die concise Darstellung von G. H. Darwin in Encycl. Brit. Artikel Tides.)

In der rotirenden Kugelschale vom Radius S und der constanten Temperatur T erzeugt die Anziehung der Sonne Bewegungen, für welche die folgenden aus (7 und (10 abzuleitenden Gleichungen gelten:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial(V - RT\varepsilon)}{S\,\partial\omega} &= \frac{\partial b}{\partial t} - 2n\cos\omega\cdot c \\
\frac{\partial(V - RT\varepsilon)}{S\cdot\sin\omega\cdot\partial\lambda} &= \frac{\partial c}{\partial t} + 2n\cos\omega\cdot b \\
\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{S\sin\omega}\left(\frac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega} + \frac{\partial c}{\partial\lambda}\right) &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (15$$

V bezeichnet das Potential der Sonne im Punkte ω, λ der rotirenden Kugelschale. Wenn die Sonne im Aequator steht, ihre Entfernung von der Erde mit P, ihre Masse mit M, die Attractionsconstante mit $\varkappa$ bezeichnet ist, so hat man für das Potential

$$\varkappa M [P^2 - 2PS \sin\omega \cdot \cos(nt + \lambda) + S^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Entwickelt man nach Potenzen von S/P, so erhält man zunächst Glieder, welchen für die Ebbe und Fluth keine oder nur geringe Bedeutung zukommt; dann solche, die abzuziehen sind, wenn man die Bewegung der Flüssigkeit nur relativ zum Schwerpunkt der Erde betrachtet. Denjenigen Theil des Potentials, welcher die halbtägige Fluth veranlasst, bezeichnen wir mit V, um ihn in die Gleichungen (15 einzuführen.

$$V = \frac{3}{4} \frac{\varkappa M S^2}{P^3} \sin^2\omega \cdot \cos(2nt + 2\lambda) = H(\omega) \cdot \cos(2nt + 2\lambda).$$

Setzt man noch

$$\varepsilon = E(\omega) \cdot \cos(2nt + 2\lambda), \quad b = \varphi(\omega) \cdot \sin(\quad), \quad c = \psi(\omega) \cdot \cos(\quad),$$

ferner $H - RT \cdot E = G(\omega)$, und eliminirt φ, ψ aus den Gleichungen (15, so erhält man:

$$\frac{d^2 G}{d\omega^2} \sin^2\omega - \frac{dG}{d\omega} \sin\omega \cos\omega + G(4k \cdot \sin^4\omega + 2\sin^2\omega - 8)$$
$$= 4k \cdot H \cdot \sin^4\omega. \qquad (16$$

Das ist die Gleichung (13 des vorigen Abschnittes, nur steht G statt E und H statt $A(\omega)$.

$$G = \frac{3}{4} \frac{\varkappa M S^2}{P^3} (\alpha_4 \sin^4\omega + \alpha_6 \sin^6\omega + \ldots)$$

$$E = \frac{1}{RT} \cdot \frac{3\varkappa M S^2}{4 P^3} (\sin^2\omega - \alpha_4 \sin^4\omega - \alpha_6 \sin^6\omega - \ldots). \qquad (17$$

α_4, α_6, ... sind für einen gegebenen Werth von T die gleichen Constanten wie im 9. Abschnitte.

m Masse der Erde; $\varkappa m / S^2 = g$: $M = 355\,000\,m$, $P = 24\,000\,S$.

$$\frac{3\varkappa M S^2}{4 P^3} = 1 \cdot 203.$$

Ueber dem Aequator hätte man danach, wenn $4k = 10$ oder $T = 298{,}7$

$$760\,\varepsilon = \frac{760}{287 \cdot 298{,}7} \cdot 1{,}203 \cdot 11{,}26 \cdot \cos(2nt + 2\lambda) =$$
$$= 0{,}12\,(\text{mm}) \cos(2nt + 2\lambda).$$

Durch die Sonne würde eine halbtägige Barometerschwankung von 0,24 (mm) am Aequator entstehen, durch den Mond eine dreimal grössere, etwa 0,7 mm.

(Laplace berechnet, Méc. Cél. livre IV, ch. 5, die atmosphärische Fluth mit dem gleichen Werth von k, jedoch für die Atmosphäre über einem Ocean von constanter Tiefe, dessen Gezeiten diejenigen der Luft beeinflussen, während hier nur die Atmosphäre über einer starren Erde betrachtet wird. Für unsern Fall gelten dieselben Formeln, wie für ein Meer von überall gleicher Tiefe l. In den Gleichungen (15 u. f. ist nur gl statt RT und gy statt $RT\varepsilon$ zu setzen, wenn y die Erhebung der Meeresoberfläche über das mittlere Niveau bezeichnet.)

Die aus der Gleichung (17 mit irgend einem zulässigen T berechneten Mondfluthen sind im Vergleich mit den aus Barometerbeobachtungen abgeleiteten viel zu gross.[1]) Man kann sich darüber kaum wundern, wenn man bedenkt, dass alle in die Rechnung eingeführten Annahmen: die Vernachlässigung der verticalen Bewegung, der Reibung, endlich des Unterschiedes zwischen einem Tage und dem Intervall zweier Mondculminationen zur Vergrösserung der berechneten Fluth beitragen. Mit Beziehung auf den letztgenannten Unterschied möchte ich noch bemerken, dass er sich leicht in die Rechnung einführen lässt. Das von Laplace angenommene Verhältnis 3 : 1 zwischen Mondfluth und Sonnenfluth gilt nur, so lange der Werth $4k$ in welchen die Tiefe des Oceans, beziehungsweise die Temperatur der

---

1) Ausser den in der Méc. Cél., livre XIII, erwähnten Beobachtungen Bouvard's, welche, nach Syzygien und Quadraturen geordnet, kaum einen Unterschied der täglichen Barometerschwankung erkennen liessen (nur die Beobtungen von 9h Früh und 3h Nachmittags wurden verwendet), liegen aus späterer Zeit Bearbeitungen stündlicher Beobachtungsreihen von einigen tropischen Stationen vor, welche mir Herr Professor Hann bezeichnet hat.

Barometerschwankung durch Mondfluth.

Singapore (1° 11′ Breite) 0,16 mm. Elliot, Fortschr. d. Ph. 1852, S. 703;

Batavia (6° 11′ Breite) 0,115 mm. Bergsma, Amsterdamer Akad. 1870 und van der Stock: Batavia Obs. Bd. VI, 1885, 16 Jahre ganz übereinstimmend;

St. Helena (15° 57′ Breite, 540 m Höhe) 0,10 mm. Sabine Fortschr. d. Ph. 1848, S. 402.

Die Resultate von Singapore und St Helena sind dadurch merkwürdig, dass die Maxima genau zur Zeit der Mondculminationen eintreten; in Batavia verspätet sich die Fluth um 50 Minuten.

Luft eingeht) weit entfernt ist von einem kritischen Betrage, wie er zwischen 11,1 und 11,2 eintritt.

Mit $4k = 10$ wird das erwähnte Verhältnis schon 2,2 : 1, mit $4k = 11,1$ wird es jedoch 1 : 5. Die Rechnung führe ich hier nicht an, weil es doch zu gewagt scheint, die Atmosphäre mit einer Kugelschale von ganz bestimmter Temperatur zu vergleichen und unter dieser Annahme die halbtägigen Druckschwankungen als Folge der Sonnenattraction anzusehen. Viel wahrscheinlicher ist es noch, dass sie durch einen regelmässigen Bestandtheil der halbtägigen Temperaturschwankungen entstehen.

Das Pendel als Waage.

Von

K. Fuchs.

Zur genauen Bestimmung kleiner Gewichte eignet sich, wie es scheint, das Pendel. Ein senkrechter Stab W, den man sich 2 dm lang denken mag, hat seinen Drehungspunkt D_1 (Schneiden) etwas unterhalb seines Schwerpunktes s. Sich selbst überlassen, müsste er er also umkippen, wenn er nicht durch Widerlager w_1 w_2, die ihm nur einen kleinen Spielraum gewähren, daran gehindert würde. An einem untern Ende trägt der Stab auf Schneiden eine kleine kurze Waagschale V, auf welche man den zu wägenden Körper und ergänzungsweise noch soviel Gewichte legt, bis der Schwerpunkt etwas unter die Mittelschneide fällt und der Stab möglichst langsam zu schwingen beginnt. Eine Schwingungsdauer von 5—10 Secunden ist sehr leicht erreicht. Aus der beobachteten Schwingungsdauer lässt sich dann leicht das Gewicht des zu wägenden Körpers berechnen, wie gezeigt werden soll.

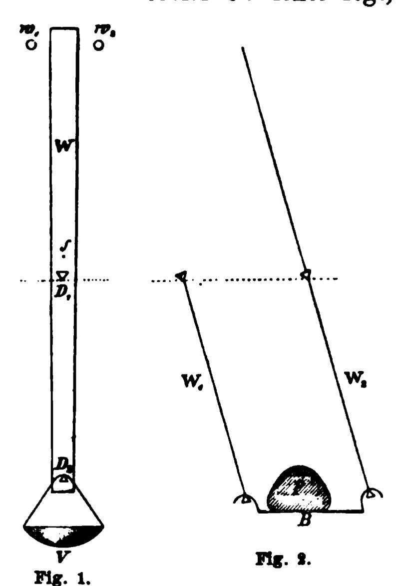


Fig. 1. Fig. 2.

Wenn man kein Vertrauen zum Körbchen als Wagschale hat, kann man auch zwei Stäbe W_1 und W_2 von gleichem Schneidenabstand nehmen und über die beiden unteren Schneiden eine Brücke B legen. Alle Körper P, welche man auf diese Brücke legt, wirken auf das Pendel gerade so, als wenn ihre ganze Masse in der Schneide vereint wäre, nachdem alle Punkte genau dieselben Bewegungen ausführen wie die Schneide. Nun gehen wir auf die Berechnung über.

Ein mathematischer verticaler Stab trägt in seiner Mitte eine horizontale Achse, um die er gedreht werden kann. Im nicht genau bekannten Abstande l über und unter der Achse befindet sich je die Masse $\frac{1}{2} m$, also am ganzen Stabe die Masse m. Auf die untere Masse wirkt eine Kraft p vertical nach unten und versetzt den Stab in pendelnde Schwingungen. Wenn l in Metern, m und p in Kilogramm, die Schwingungsdauer t in Secunden gegeben ist, dann gilt die Gleichung

$$t = \pi \sqrt{\frac{l\,m}{g\,p}}.$$

Unser physikalisches obiges Pendel kann theoretisch auf ein solches mathematisches Pendel reducirt werden, und wir unterziehen daher nur das letztere der Rechnung. Wir können auch schreiben

$$t^2 = \pi^2 \frac{l\,m}{g\,p}$$

oder wenn wir der Einfachheit wegen rechnen

$$t^2 = \tau \qquad \pi^2 \frac{l}{g} = \lambda,$$

dann haben wir

$$\tau = \lambda \frac{m}{p}.$$

Wenn wir nun an die untere Masse (resp. in die Waagschale) noch das bekannte Gewicht x_1 hängen, dann ist die Schwingungsdauer eine andere; wir haben

$$\tau_1 = \lambda \frac{m + x_1}{p + x_1}.$$

Ein zweites Gewicht x_2 und ein drittes Gewicht x_3 geben noch die drei Bestimmungsgleichungen

$$\tau_2 = \lambda \frac{m + x_2}{p + x_2}, \qquad \tau_3 = \lambda \frac{m + x_3}{p + x_3}.$$

Aus diesen drei Bestimmungsgleichungen können wir durch Eliminationen die drei Constanten λ, m und p des Pendels berechnen.

Bei einer concreten Gewichtsbestimmung ist an die untere Masse das Gewicht q gehängt, welches sich aus dem unbekannten, zu bestimmenden Gewichte x und dem bekannten, behufs Verlangsamung der Schwingungen hinzugefügten Gewichte ξ zusammensetzt, so dass gilt

$$q = \xi + x.$$

Für die Schwingungsdauer gilt dann

$$t^2 = \lambda \frac{m+q}{p+q},$$

wobei λ, m und p nunmehr bekannte Constanten sind, t der Beobachtung entnommen wird, q also als Unbekannte ohne weiteres berechnet werden kann. Wir finden

$$q = \frac{\lambda m - p t^2}{t^2 - \lambda},$$

wobei zu bemerken ist, dass p negativ ist, wenn das Pendel, wie wir angenommen haben, ohne Belastung umkippt. Die Grösse λ ist von der Pendellänge l wenig verschieden, und wir wollen sie beispielsweise bei einem gegebenen Pendel gleich 0,1 m setzen. Die Grösse m ist von derselben Grössenordnung, wie das Gesammtgewicht der Waage, und wir können daher $m = 0{,}05$ kg setzen. Die Grösse p ist nicht viel verschieden von der Tragkraft der Waage, und wir wollen $p = -0{,}03$ kg setzen. Die Schwingungsdauer t können wir 5—10 Secunden setzen, so dass t^2 über 25 liegt. Unter solchen Verhältnissen können wir behufs allgemeiner Orientirung λ gegen t^2 vernachlässigen und schreiben

$$q = \frac{\lambda m}{t^2} - p$$

oder

$$q = \frac{0{,}005}{t^2} + 0{,}03.$$

Ein Urtheil über die Genauigkeit des Apparates verschaffen wir uns, wenn wir den Fehler dq berechnen, der einem Fehler dt in der Bestimmung der Schwingungsdauer entspricht. Wir finden

$$dq = -\frac{2\lambda m}{t^3} dt$$

oder

$$dq = \frac{0{,}01}{t^3} dt.$$

Wenn wir die Schwingungsdauer $t = 7$ Secunden nehmen und den Fehler $dt = 0{,}01$ Secunde, dann ist der Fehler in der Gewichtsbestimmung

$$dq = 0{,}0000003 \text{ kg},$$

das ist ein Drittel Milligramm.

Interessant ist noch das Verhältnis des relativen Fehlers dq/q

der Gewichtsbestimmung zum relativen Fehler dt/t der Zeitbestimmung. Wir finden approximativ

$$\frac{dq}{q} = -\frac{2\lambda m}{t^3} \cdot \frac{t^2}{\lambda m - p t^2} dt$$
$$= -\frac{2\lambda m}{\lambda m - p t^2} \cdot \frac{dt}{t}.$$

Wenn wir unsere Zahlenwerte einsetzen, finden wir

$$\frac{dq}{q} = 0{,}001 \frac{dt}{t},$$

d. h. ein sehr grosser Fehler in der Zeitbestimmung verursacht nur einen sehr kleinen Fehler in der Gewichtsbestimmung.

Welchen Vortheil bietet dieser Apparat, da doch die Manipulation nicht so einfach ist, indem sie einerseits ein Secundenpendel beansprucht, andrerseits mit einer wirklichen Rechnung verbunden ist?

Ein Vortheil liegt darin, dass der Gewichtseinsatz, den man benutzt, nicht einmal bis auf das bereits recht schwer genau herstellbare Milligramm herunterzugehen braucht, und man doch bis auf kleine Bruchtheile des Milligramms genau wägen kann.

Ein anderer Vortheil liegt darin, dass der Apparat wenig Raum einnimmt und nach der vorläufigen Einstellung auf langsame Schwingungen nicht weiter berührt zu werden braucht. Er ist also sehr geeignet zu Wägungen unter der Luftpumpe. In Schwingungen versetzen kann man ihn dort durch einen genäherten Magneten, der auf die untere Stahlschneide wirkt.

Der grösste Vortheil liegt aber darin, dass die Gewichtsbestimmung auf eine Zeitbestimmung reducirt ist, Zeitdauern aber ausserordentlich genau bestimmt werden können, so dass man bei genügend langer Beobachtungszeit, bei genauen Methoden und leichtem und kurzem Pendel noch tausendstel Milligramm bestimmen kann, da ein grosser Fehler in der Zeitbestimmung nur einen kleinen Fehler in der Gewichtsbestimmung mit sich bringt. Die natürlichen Grenzen der Pendelwägung liegen also ungleich ferner, als die natürlichen Grenzen der Hebelwägung.

Die Fabrikanten von Präcisionsgewichtseinsätzen könnten aus diesem Apparate grosse Vortheile ziehen, wenn sie für jedes Gewicht ein Specialpendel construiren, für welches die Schwingungsdauer des Standardgewichtes ein für allemal bestimmt wird. Man braucht letzteres dann weiter nicht mehr zu berühren.

Ueber magnetische Astasie und das magnetische Pendel.

Zweite Mittheilung[1]).

Von

A. Kurz.

Die in der Anmerkung angegebenen Mittheilungen meinerseits wurden jüngst in den „Fortschritten der Physik 1883“ von dem mit L. W. zeichnenden Referenten aufgeführt, mit Titel und je zwei Zeilen Inhaltsangabe, in welch letzteren die Worte „bekanntlich“ und „Reproduction“ vorkamen.

Ich habe selbst diese zwei Worte in der einen dieser Abhandlungen gebraucht; aber in einer zweizeiligen Inhaltsangabe erweckt ein solches Wort doch nur die Meinung, als sei das Ganze eine Reproduction, was nach meiner auch heute noch bestehenden Ansicht nicht zutrifft. Zu leichterem Unterscheiden habe ich mich dort auch gesperrter Schrift bedient, und ich will hier nicht weiter darauf zurückkommen[2]).

Ich benutze vielmehr diesen Anlass zu einer didaktisch-kritischen Bemerkung: es möge in meiner ersteren Abhandlung, sowie in der daselbst citirten älteren Notiz von S. 566 des Jahrganges 1882 der Divisor b^2 weggelassen werden, da sich im Zähler das „magnetische Feld“ befindet. Diesen Begriff hatte ich im Jahre 1882 noch nicht angewendet; er empfiehlt sich als Ersparnis für den Unterricht und steht als $m : r^2$ inmitten der Masse und der Kraft $mm' : r^2$.

Als Beispiel dazu diene H, das Erdfeld für eine Horizontalnadel, gewöhnlich noch die Horizontalconstante des Erdmagnetismus genannt;

---

1) Die erste S. 560—563 und bzw. 564—565 des Jahrgangs 1883. S. 562 Z. 5 und 10 streiche daselbst das Wort „Sek.“.

2) Im übrigen widerspricht sich L. W. selbst, wenn er dergleichen in den „Fortschritten der Physik“ aufführt; denn wenn meine kurzen Abhandlungen etwa nur didaktischer Natur waren, so erheben sie gleich einem neuen Lehrbuch der Physik oder einer Neuauflage eines solchen keinen Anspruch auf Berücksichtigung in einem Referatwerke der genannten Art. Es bleibt also die Muthmaassung der Tadelsucht übrig.

letzteres Substantivum ist streng genommen nur qualitativ, zum Unterschiede vom Stabmagnetismus oder von anderen Gebieten des physikalischen Lehrstoffes brauchbar.

Die Kraft Hm, welche die Erde auf den Pol m der Horizontalnadel ausübt, ist gewiss einfacher, als dass man sich dieselbe „ersetzt denken solle durch einen kleinen, (noch dazu) in der zweiten Hauptlage in der Entfernung 1 liegenden Magnet vom Magnetismus H“, wie es in der 9. und 10. Auflage von Henrici (von Beetz) heisst.

Ebenso, gelegentlich bemerkt, ist auch der § 299 „Astatisches System“ des Lehrbuches der Electricität und des Magnetismus von Mascart und Joubert (übersetzt von Levy) undeutlich gefasst. Er behandelt nur das astatische Nadelpaar; wenn dieses „genau realisirt“ wäre, so hätten wir einen Fall des indifferenten Gleichgewichtes vor uns; das „quasi astatische“ System dagegen bietet allerdings ein „stabiles“ Gleichgewicht dar. Aber auch hiebei ist noch zu unterscheiden: Hat man die beiden Momente der einzelnen Nadeln (nach dem Vorgange des Buches) als Strecken gezeichnet und die negativen Pole aufeinandergelegt, so stimmt die stabile Lage nur, wenn beide Strecken gleich und vom gestreckten Winkel abweichen, mit der Mittellinie derselben überein. Wenn dagegen beide Strecken ungleich und etwa den gestreckten Winkel vollends bilden, so ist die stabile Lage diejenige der stärkeren Nadel.

Eingesendete Bücher.

W. Thomson, Gesammelte Abhandlungen zur Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus, deutsch von Dr. Levy und Dr. Weinstein. Berlin bei J. Springer 1890. 572 S. mit 59 Abb. und 3 Tafeln 14 M. Es wäre überflüssig, auf den Inhalt dieses Werkes näher einzugehen, es bildet bekanntlich mit Maxwell's Werk die Grundlage der ganzen jetzigen Elektricitätslehre. Mit Rücksicht auf die oft schwierigen theoretischen Theile des Werkes wird die deutsche Uebersetzung auch dem des Englischen Kundigen willkommen sein. Die Ausstattung ist eine ganz vorzügliche.

J. Frick, Physikalische Technik, 6. Aufl. bearbeitet von Prof. O. Lehmann. I. Bd. Braunschweig bei F. Vieweg & Sohn 1890. 750 S. mit 708 Abb. 15 M. Dieses auf 2 Bände berechnete Werk bildet eine wesentliche Erweiterung der bisherigen Auflagen der „physikalischen Technik", namentlich dadurch, dass in demselben auch ein grosses Gewicht auf die Anleitung zur Herstellung der für Demonstrationen nöthigen Apparate gelegt wird, insofern diese Herstellung im Laboratorium selbst möglich ist. Der erste Band umfasst nebst Angaben über die Einrichtung des Locales im allgemeinen und über das Aufstellen und Repariren von Apparaten die Demonstrationen aus der Mechanik, Hydrostatik, Aërostatik und Wärmelehre. Ausstattung und Abbildungen sind vorzüglich.

Dr. Hovestadt, Lehrbuch der angewandten Potentialtheorie. Stuttgart, Verlag von J. Maier 1890. 316 S. mit 47 Abb. 7 M. Es bildet dieses Werk einen Band der Kleyer'schen Encyklopädie der Naturwissenschaften und ist in der bekannten Weise nach Fragen und Antworten eingerichtet. Es wird darin in klarer und sachkundiger Weise die Anwendung des Potentialbegriffes auf die Gravitation und insbesondere auf die elektrischen Erscheinungen entwickelt, wobei namentlich die zahlreichen praktischen Beispiele und die Berücksichtigung der neuesten Fortschritte der Wissenschaft hervorzuheben sind.

H. Kopé, Die Elektricität als Urkraft. Leipzig Th. Grieben's Verlag 1890. 36 S. 1 M. In diesem Schriftchen wird versucht, alle Erscheinungen der anorganischen sowie der organischen Natur auf die Wirkung der Elektricität als Ursache zurückzuführen.

Dr. F. Umlauft, Das Luftmeer. Grundzüge der Meteorologie und Klimatologie, Hartleben's Verlag. 1. Lieferung. Das Buch erscheint in 15 Lieferungen à 50 Pf. und ist durch zahlreiche und gute Illustrationen ausgezeichnet.

A. v. Urbanitzky und S. Zeisel, Physik und Chemie gemeinverständlich dargestellt in ihren Beziehungen zum praktischen Leben. Hartleben's Verlag 1. und 2. Lieferung. Beide Abtheilungen erscheinen gleichzeitig in ca. 35 Lieferungen à 50 Pf.

Ebbinghaus und König, Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane. Leipzig bei L. Voss. I. Bd. 1. Heft. Je 6 Hefte dieser neuen Zeitschrift werden einen Band à 15 M. bilden. Es werden in demselben nicht nur Originalarbeiten, sondern auch systematische Referate über alle einschlägigen Erscheinungen der Literatur geboten werden.

A. v. Miller-Hauenfels, Der mühelose Segelflug der Vögel und die segelnde Luftschiffahrt. Wien, Verlag von Spielhagen und Schurich, 66 S. 2,40 M. Ein Vortrag, in welchem die Anwendbarkeit des Vogelfluges auf die Luftschiffahrt erörtert wird.

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:	Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert & Co., Kommandit-Gesellschaft, Nürnberg. (17/10)	Fabrik elektrischer Maschinen für Beleuchtung, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.
Hartmann & Braun, Bockenheim-Frankfurt a/M.	Elektrische und magnetische Messinstrumente. Vollständige Einrichtungen von Laboratorien.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.



Verlag von **Friedrich Vieweg & Sohn** in **Braunschweig.**

(Zu beziehen durch jede Buchhandlung.)

Soeben erschien: (22)

Physikalisches Praktikum

mit besonderer Berücksichtigung der physikalisch-chemischen Methoden von

Eilhard Wiedemann und Hermann Ebert.

Mit zahlreichen Holzstichen. gr. 8. geh. **Preis 9 Mark.** In Leinen gebunden **Preis 10 Mark.**



Verlag v. Julius Springer in Berlin N.

Soeben erschien in drei Sprachen — **Deutsch, Englisch, Französisch:**

Reductionstabellen

zur

Gauss-Poggendorff'schen Spiegelablesung.

Von (23)

Dr. Paul Czermak,

Privatdozent und Assistent der Physik an der Universität zu Graz.

Mit 7 in den Text gedruckten Figuren

In Leinwand geb. Preis M. 12,—.

Zu beziehen durch jede Buchhandl.

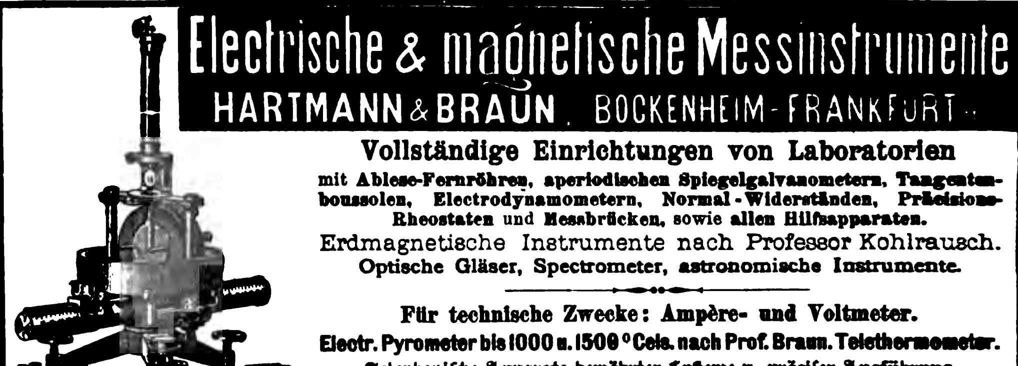
SCHUCKERT & Co.,

Kommandit-Gesellschaft,

Nürnberg.

Elektrische Maschinen für Hand- und Maschinenbetrieb. (16/10)

Anerkannt vortheilhafte Konstruktion für Lehrzwecke.



XXVI. Band. 11. Heft.

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 11. Heftes.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1890.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Kalender für Elektrotechniker
1891.

Herausgegeben
von
F. Uppenborn,
Ingenieur und Chefredacteur der Elektrotechnischen Zeitschrift in Berlin.

Achter Jahrgang.

Hierzu eine Beilage.

Preis des in Brieftaschenform (Leder) geb. Kalenders nebst Beilage M. 4.60.

Der vorliegende Jahrgang ist einer gründlichen Umarbeitung und zum Theil einer Neubearbeitung unterzogen. Im physikalischen Theile ist namentlich das für den Elektrotechniker besonders wichtige Kapitel »Magnetismus und Elektricität« neubearbeitet. Die Tabellen des Abschnittes III »Elektrotechnik« sind gründlich revidirt und zum Theil neu berechnet. Den elektrischen Messmethoden sind eine allgemeine Einleitung, sowie ein Abschnitt über magnetische Messungen vorangestellt worden. Die elektrischen Messmethoden sind hier und da ergänzt, die Methoden zur Messung der gegenseitigen und Selbst-Induktion sind neu aufgenommen. In dem Abschnitt »Elektrische Beleuchtung« sind verschiedene Tabellen über Leitungsmaterialien hinzugefügt worden. Der Abschnitt »Elektrometallurgie« ist entsprechend ergänzt, der über Blitzableiter den neueren Forschungen angepasst. Der Abschnitt über Telegraphie ist ganz neu bearbeitet, derjenige über Telephonie revidirt und ergänzt. Endlich ist auch die Beilage diesmal ganz neu bearbeitet worden. Wenn hierbei dem mathematischen Theile eine grössere Ausdehnung bewilligt worden ist, als mit Rücksicht auf den vorwiegend technischen Charakter des Kalenders begründet erscheinen möchte, so geschah dies deshalb, weil der Kalender erfahrungsgemäss vielfach von Studirenden gebraucht wird, denen eine derartige Zusammenstellung willkommen sein wird. Da die Beilage nicht für die Tasche, sondern für den Schreibtisch bestimmt ist, so sind für denjenigen, welcher den mathematischen Theil nicht benutzt, keine Nachtheile entstanden.

Beim Haupttheil ist auf möglichst sparsame Druckeinrichtung Bedacht genommen. Trotzdem ist der Druck sowohl des Textes wie der Tabellen ganz bedeutend leichter zu lesen, als dies bei manchen anderen Taschenbüchern der Fall ist. Der Kalender würde aber in der gewöhnlichen Schriftgrösse und mit der sonst üblichen weniger ökonomischen Anordnung gedruckt einen ziemlich voluminösen Band ausmachen.

Von der Aufstellung des Elektrotechniker-Verzeichnisses ist wegen zu geringer Betheiligung Abstand genommen worden.



Experimentelle Untersuchungen über den Einfluss der Concentration und der Temperatur einiger wässeriger Salzlösungen auf ihre Oberflächenspannung.

Von

W. Ochsé.

I.

Die hervorragendsten Arbeiten über die Capillaritätsconstanten wässeriger Salzlösungen verfassten Quincke[1]), Volkmann[2]), Rother[3]), und Traube[4]). Dieselben bestimmten den Werth der wirklichen und specifischen Cohäsion bei 15° C. durch Beobachtung der Steighöhe in Capillarröhren, Quincke ausserdem durch Messung von Luftblasen, und stellten Gesetze über den Einfluss der Concentration auf die Cohäsionsconstanten auf. Brunner[5]) Buys-Ballot[6]), Frankenheim[7]), Wolf[8]), Buliginsky[9]), Sondhauss[10]), Schiff[11]) und Timberg[12]) untersuchten den Einfluss der Temperatur auf die Cohäsionsconstanten von Flüssigkeiten, doch zogen die meisten ausser Wasser nur organische Flüssigkeiten in den Bereich ihrer Untersuchungen; — Buys-Ballot, Buliginsky und Timberg beobachteten einige Salzlösungen. Als Beobachtungsmethode wurde meistens die Messung der Steighöhe in Capillarröhren angewandt. Buys-Ballot bestimmte die zum Abreissen

1) Pogg. Ann. Bd. 160. 1877.
2) Wied. Ann. 17. 1882.
3) Wied. Ann. 21. 1884.
4) Journ. f. pract. Chem. N. F. B. 31. 1885.
5) Pogg. Ann. Bd. 70 1847.
6) Pogg. Ann. 71. 1847.
7) Pogg. Ann. 72. 1847.
8) Pogg. Ann. 101, 102. 1857.
9) Pogg. Ann. 134. 1868.
10) Pogg. Ann. Ergb. 8. 1877.
11) Lieb. Ann. d. Chem. 1884.
12) Wied. Ann. 30. 1887.

von Adhäsionsplatten nothwendigen Gewichte, Sondhauss die Tragkraft flüssiger Lamellen, Timberg das Gewicht abgefallener Tropfen und beobachtete ausserdem die Form flacher Luftblasen.

Ueber den gleichzeitigen Einfluss der Concentration und der Temperatur auf die Oberflächenspannung von Salzlösungen sind keine eingehenderen Untersuchungen angestellt worden. Timberg versprach dieselben auszuführen; da jedoch bis jetzt von ihm eine Arbeit über diesen Gegenstand meines Wissens noch nicht erschienen ist, habe ich mir diese Untersuchungen zur Aufgabe gemacht. —

II.

Bei seinen Versuchen, die kleinsten Transversalwellen der Flüssigkeiten betreffend, machte L. Matthiessen[1]) die Beobachtung, dass sich die, auf der Oberfläche verschiedener Flüssigkeiten mittels zweier, an den Enden der Zinken einer Stimmgabel befindlichen Nadeln erregten Wellen bei gleicher Breite nicht mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzten; er suchte diese Erscheinung dadurch zu erklären, dass er eine Abhängigkeit dieser Wellen von der specifischen Cohäsion der Flüssigkeiten annahm. Bald darauf stellte Sir William Thomson[2]) aus hydrokinetischen Betrachtungen ein Gesetz über die Wellenbewegung auf Flüssigkeiten unter dem gleichzeitigen Einfluss der Schwere und Oberflächenspannung auf. — Bezeichnet v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, n die Wellenzahl pro Secunde, λ die Wellenbreite, g die Gravitationsconstante und T die Constante der specifischen Cohäsion in cmgr., so lautet das Thomson'sche Gesetz:

$$v^2 = n^2 \lambda^2 = g \left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda} T \right) \tag{1}$$

Eine ausführlichere Ableitung dieses Gesetzes, als Thomson sie gegeben hat, sowie eine Angabe der einschlägigen Litteratur findet sich bei O. Riess.[3]) Das Thomson'sche Gesetz zerfällt in zwei Theile. Der erste Theil

$$n^2 \lambda = \frac{g}{2\pi} \tag{2}$$

gilt für solche Wellen, welche (für Wasser) eine grössere Breite als 10 cm haben und hauptsächlich unter dem Einflusse der Schwere stehen. Der zweite Theil

$$n^2 \lambda^3 = 2\pi g T. \tag{3}$$

1) Pogg. Ann. 134. 1868.

2) Phil. Mag. (4) 42. S. 371.

3) Exners Repert. d. Phys. 1890.

erstreckt sich auf Wellen, welche (für Wasser) eine geringere Breite als 0,3 cm. haben und vorwiegend dem Einflusse der Oberflächenspannung unterworfen sind. Das ganze Gesetz bezieht sich auf die dazwischen liegenden Wellen. Scott Russel nennt diese Wellenarten: Wellen erster, zweiter und dritter Ordnung, letztere auch Capillarwellen. Thomson stellte seine Gleichung nur für Wasserwellen auf und führte für T nach Versuchen von Gay-Lussac[1]) den Werth 0,074 cmgr. ein.

Das Thomson'sche Gesetz entbehrte lange Zeit einer genauen experimentellen Bestätigung. L. Matthiessen[2]) gab dieselbe nach langen Vorarbeiten im Jahre 1889 und zeigte zu gleicher Zeit, dass dieses Gesetz überhaupt dazu dienen kann, die specifische Cohäsion von Flüssigkeiten zu bestimmen. Er beschäftigte sich hauptsächlich mit Wellen dritter Ordnung, welche er auf der Flüssigkeitsoberfläche mittels Stimmgabeln erregte.[3])

Um etwaigen Einwänden über die Isoperiodicität der Schwingungen der erregenden festen Körper und der Flüssigkeiten von vornherein zu begegnen, musste ausserdem bewiesen werden, dass die Schwingungen der Stimmgabel N und der Moleküle n völlig isoperiodisch seien. Dieses wurde durch die Beobachtung der Wanderung der Interferenzlinien zwischen den Spitzen zweier Stimmgabeln von verschiedener, aber nahezu gleicher Schwingsungzahl nachgewiesen.[4]) Benutzt wurden Stimmgabeln von 128 bis 1024 Schwingungen pro Secunde und durch Messung der Wellenbreiten λ sowohl die Gültigkeit des Thomson'schen Gesetzes bewiesen, als auch die Oberflächenspannung einiger Flüssigkeiten bestimmt.

Da die Grösse T von der Temperatur abhängig ist, gilt das Gesetz nur bei constanter Temperatur. Diese Abhängigkeit wiess O. Riess[5]) nach und brachte eine Korrektion für Wasserwellen an. Gestützt auf die genannten beiden Arbeiten, durch welche die Gültigkeit des Thomson'schen Gesetzes und seine Brauchbarkeit zur Bestimmung der specifischen Cohäsion bewiesen worden war, konnte ich meine Untersuchungen über den Einfluss der Temperatur und der Concentration auf die Oberflächenspannung nach der von Herrn Prof. Dr. L. Matthiessen angegebenen Methode ausführen.

---

1) Laplace, Mécanique céléste. Supplement à tome X.

2) Wied. Ann. 38. 1889.

3) Da ich dieselbe Beobachtungsmethode anwandte, werde ich die Einzelheiten im nächsten Kapitel angeben.

4) L. Matthiessen, Wied. Ann. 38. 1889. vergl. Wied. Ann. 32. 1887.

5) Riess. l. c.

Aus Formel 1 ergibt sich:

$$T = \frac{n^2 \lambda^3}{2 \pi g} - \frac{\lambda^2}{4 \pi^2}. \tag{4}$$

Und aus 3

$$T = \frac{n^2 \lambda^3}{2 \pi g} \tag{5}$$

Bei Wellen, welche mit Stimmgabeln bis 230 Schwingungen erregt werden, ist Gleichung 4. zur Berechnung von T anzuwenden. Hat die Stimmgabel über 230 Schwingungen, so gilt für T Gleichung 5, da man annehmen kann, dass die durch dieselbe erregten Wellen nur unter dem Einflusse der Oberflächenspannung stehen. Der Einfachheit halber werde ich für T, die Constanten der specifischen Cohäsion, in dieser Arbeit die Bezeichnung „Oberflächenspannung" anwenden.

III.

Matthiessen gibt zwei Methoden an, um die durch schwingende Stimmgabeln erregten Wellen zu beobachten.

1) Beobachtung der stehenden Interferenzlinien,

2) Beobachtung der Augenblicksbilder der fortschreitenden primären Wellen.

Da bei der zweiten Methode das Bild der Wellen auf den polierten Zinken der Stimmgabel beobachtet wird, diese sich aber bei höheren Temperaturen leicht beschlagen, so konnte bei meinen Untersuchungen nur die erste Methode in Betracht kommen. Bei dieser werden an beiden Zinken der erregenden Stimmgabel Stifte befestigt. Zwischen den Zinken entstehen auf der Flüssigkeitsoberfläche stehende Wellen, deren Knoten und Bäuche sich durch die Spiegelwirkung gekrümmter Flächen als dunkle und helle Linien abzeichnen.

Ist d der Abstand zweier beliebiger Knotenlinien, m die Anzahl der Linien zwischen denselben, so ist die Wellenbreite:

$$\lambda = \frac{2\, d}{m + 1}.$$

Die Ausführung der Experimente war folgende: Als Stativ für die Stimmgabel diente ein grosses, schweres Holzgestell (Fig. 1), auf welchem zugleich das Gefäss mit der zu untersuchenden Flüssigkeit und die übrigen erforderlichen Instrumente aufgestellt wurden. Der mittlere Balken kann gehoben und gesenkt und in jeder Stellung durch eine Klemmschraube festgehalten werden. Die Stimmgabel wird in eine Höhlung an dem unteren Ende dieses Balkens gesteckt und daselbst durch eine Schraube festgeklemmt. Sie darf nicht auf dem

Holze selbst aufliegen, da sie sonst beim Anschlagen ins Schwanken gerät, sondern muss in einem Futter von nachgiebigem Material stecken. Ich benutzte hierzu harten Kork. Da die Gültigkeit des Thomson'schen Gesetzes von Matthiessen für Stimmgabeln von 8 bis 1024 Schwingungen bewiesen ist, konnte ich mich auf Anwendung einer Stimmgabel beschränken und wählte zur Vereinfachung der Rechnung eine bereits von Matthiessen benutzte, von Appunn in Hanau verfertigte Stimmgabel von 256 Schwingungen pro Secunde.

Die Stimmgabel wurde mittels eines Filzhammers mit Fischbeinstiel angeschlagen, und zwar zur Vermeidung von Obertönen am unteren Ende. Dieser einfachen Erregungsweise möchte ich vor der elektromagnetischen, welche einen sehr komplizirten Apparat, vor allem aber vollständigen Isochronismus der erregenden und erregten Stimmgabel erfordert, den Vorzug geben. Die zur Beobachtung günstigste Amplitude zu erzielen, gelingt nach einiger Uebung leicht.

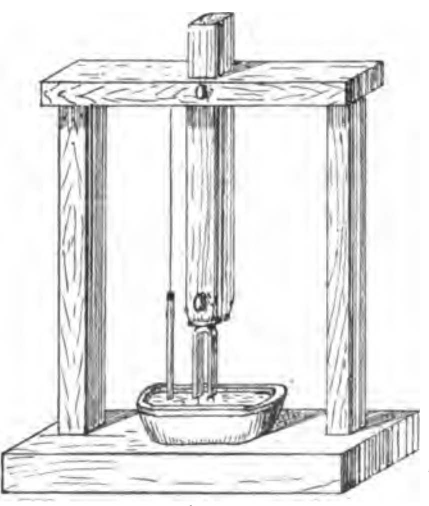


Fig. 1.

An beide Zinken der Stimmgabel wurden mittels Klebwachs, einem Gemenge von Wachs und Terpentin, feine Stahlnadeln befestigt. Reines Wachs hält nicht gut, und springen namentlich in der Kälte die Stifte leicht ab. Die von Riess vorgeschlagenen Stifte aus Aluminium, welche den Zweck haben, den Abstand der Erregungscentra zu vergrössern, benutzte ich aus zwei Gründen nicht. Erstens erhält ein solches System leicht Eigenbewegung, welche die zur Schwingungszahl der Stimmgabel gehörende Wellenbreite verändert; zweitens werden durch die an den Streben befestigten Platten die Wellen in der Richtung der Wellenbewegung fortgeschoben und hierdurch die Interferenzlinien auf einer grösseren Strecke undeutlich. Die Zinken meiner Stimmgabel hatten einen äuseren Abstand von 22,5 mm, welcher zur Beobachtung hinreichend genügte.

Die Messung der Knotenlinien der stehenden Interferenzwellen wurde stets an der Oberfläche der Flüssigkeit vorgenommen. Als Messinstrument benutzte ich ein gewöhnliches mit Nonius versehenes Pachymeter, an dem ich zwei lange Spitzen anbrachte. Diese wurden auf zwei beliebige Knotenlinien eingestellt, die zwischenliegenden dunklen

Linien gezählt und aus dem Abstande der Spitzen und der Anzahl der Linien die Wellenbreiten berechnet. Matthiessen und Riess fixierten die Knotenlinien mittels eines Zirkels; der Abstand der beiden Zirkelspitzen wurde nach jeder Einstellung auf einem Maassstabe abgestochen. Dem gegenüber bietet die Einführung des Pachymeters als Messinstrument wesentliche Vorteile. Sie erleichtert die überaus schwierige Zählung der Knotenlinien, erlaubt grössere Genauigkeit der Messung und gestattet ein schnelleres Arbeiten, welches namentlich bei höheren Temperaturen notwendig ist. Das Pachymeter war in einer Korkführung verschiebbar in einem Stativ festgeklemmt. Zuerst wurde die feste Spitze auf eine Knotenlinie eingestellt, dann das Pachymeter im Stativ durch Anziehen einer Schraube in dieser Stellung festgehalten und die bewegliche Spitze auf verschiedene Knotenlinien gestellt. Die Entfernung der beiden Spitzen konnte am Nonius direkt bis auf 0,1 mm abgelesen und bis 0,05 mm geschätzt werden; die Anzahl der zwischenliegenden Knotenlinien differierte von 5 bis 16. Nach 2 bis 3 Messungen wurde auch die feste Spitze wieder anders eingestellt. Bei der Messung der Knotenlinien ist noch folgendes zu beachten:

1) Die Spitzen an der Stimmgabel und am Pachymeter müssen genau in einer Ebene stehen. Die Knotenlinien, welche durch Interferenz zweier fortschreitenden Kreiswellensysteme entstehen, haben bekanntlich hyperbolische Form.[1]) Der Abstand der einzelnen Knotenlinien von einander ist daher nur in der Verbindungslinie der beiden Erregungscentra gleich gross, und müssen darum die Messungen in dieser Linie stattfinden.

2) Die Pachymeterspitzen müssen genau gleichen, möglichst geringen Abstand von der Flüssigkeitsoberfläche haben, da sonst grössere Fehler in Folge einer Parallaxe eintreten.

3) Da in der Nähe der Stimmgabelspitzen die Flüssigkeit in der Richtung der Bewegung fortgeschoben wird, erscheinen die ersten Wellen vergrössert; sie dürfen nicht mitgemessen werden.

4) Es empfiehlt sich, die Spitzen so wenig wie möglich in die Flüssigkeit einzutauchen; je geringer die Berührung beider ist, um so schmaler erscheinen die Knotenlinien und desto sicherer ist die Einstellung der Pachymeterspitzen.

Bemerkenswert ist die Einwirkung des direkten Sonnenlichtes auf die Interferenzerscheinungen. Bei direkter Bestrahlung erscheinen die Knotenlinien als breite, matte Streifen, die Bäuche als feine glitzernde Linien. Eine genaue Fixierung der Knotenlinien an der Oberfläche der Flüssigkeit ist deshalb unmöglich, jedoch erscheinen die Schatten

[1]) Die Abbildung findet sich Wied. Ann. 32. 1887.

der Knotenlinien scharf ausgeprägt auf dem Boden des Gefässes. Abgesehen von der sehr schädlichen Einwirkung des Sonnenlichtes auf die Augen ist die Messung auf dem Boden des Gefässes nicht thunlich, weil in Folge der Erwärmung durch die Sonne die Wellen verkleinert werden. Ueberhaupt erschwert allzuhelle Beleuchtung die Beobachtung sehr; am besten eignet sich als Beobachtungsraum ein helles, gegen Norden gelegenes Zimmer.

Die zu untersuchende Flüssigkeit wurde in ein grosses Gefäss aus weissem Porzellan gegossen. Dieses muss hinreichende Breite und Tiefe haben, damit nicht durch Reflexion der Wellen an den Wänden und Reibung am Boden Fehler eintreten. Die Flüssigkeit wurde in der gewünschten Temperatur in das Gefäss gebracht und die Temperatur durch Vermischen mit kälterer resp. wärmerer Flüssigkeit konstant gehalten. — Bis zu 6 ° C. bietet diese Methode einige Schwierigkeit und habe ich mir hier auf eine andere Weise geholfen, welche ich an entsprechender Stelle beschreiben werde. Die mittleren Temperaturen bis 35 ° C. lassen sich durch Mischen ganz genau darstellen und halten sich, wenn man die Zimmertemperatur demgemäss reguliert, hinreichende Zeit, um mehrere Ablesungen zu machen. Die höheren Temperaturen kann man nach einiger Uebung bis auf + 0,5 ° C. erreichen resp. die Flüssigkeit unter fortwährendem Umrühren bis in die Nähe des gewünschten Grades erkalten lassen. Ich setzte meine Versuche ebensoweit unterhalb der Temperatur, bei der ich beobachten wollte, fort, als ich oberhalb zu messen begonnen hatte. Dieses Intervall betrug im Maximum $\pm$ 0,3 ° C., und habe ich diesen Unterschied bei der Berechnung vernachlässigt. Die Temperaturen wurden mit einem Thermometer abgelesen, welches 0,2 ° C. anzeigte; dasselbe wurde in einiger Entfernung von der Stimmgabel in die Flüssigkeit gehängt. Da nach je 2 bis 3 Ablesungen die Flüssigkeit durchgerührt wurde, konnte ich während der kurzen Beobachtungszeit die Wärme der ganzen Flüssigkeit wohl als konstant annehmen.

IV.

Die von mir angewandte, von Herrn Prof. Dr. L. Matthiessen angegebene Methode zur Ermittelung der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten bietet den andern bisher benutzten Methoden gegenüber bedeutende Vortheile. Vor allem ist die Einfachheit der nothwendigen Apparate hervorzuheben. Eine gute Stimmgabel, das Haupterforderniss, kann leicht mit jeder gewünschten Schwingungszahl erhalten werden, und bestehen bekanntlich viele akustische und graphische Methoden, um diese zu controlliren. Zugleich lässt sich die Messung der Wellenbreiten mit jeder Genauigkeit ausführen, soweit unsere

heutigen Messinstrumente es erlauben. Die Reinhaltung der die Flüssigkeit enthaltenden Gefässe, welche bei allen übrigen Methoden die grösste Schwierigkeit bietet und Veranlassung zu den meisten Fehlern gibt, ist bei dieser Methode sehr leicht. Es genügt, das vorher mit verdünnter Salzsäure und Fliesspapier gereinigte Gefäss mit destillirtem Wasser auszuspülen und zu trocknen. Ferner kann die Oberflächenhaut jederzeit erneuert werden. Diese Erneuerung ist höchst nothwendig; in Folge des Einflusses der Luft tritt bei längerem Stehen der Flüssigkeit eine Verunreinigung der Oberfläche ein, welche ein Sinken der Wellenbreite veranlasst. Diese Erscheinung ist oftmals beobachtet worden. Ich führte sie absichtlich herbei, indem ich sowohl luftfreie, wie lufterfüllte Flüssigkeit bei constanter Temperatur von 15° C. längere Zeit ohne umzurühren stehen liess und nur von 10 zu 10 Minuten eine Ablesung machte. Ein sehr bemerkbares Sinken der Oberflächenspannung, welches vielleicht eine Folge der Stäubchen und Mikroorganismen in der Luft ist, trat in gleicher Weise bei lufterfüllten und durch vorheriges Kochen von Luft befreiten Flüssigkeiten ein. Nach Erneuerung der Oberflächenhaut erhob sich die Wellenbreite bei beiden wieder zur erst beobachteten Höhe[1]). Diese Untersuchungen wurden angestellt, bevor ich zu dem eigentlichen Thema meiner Arbeit überging. Bei meinen späteren Untersuchungen habe ich, wie auch Volkmann, nur mit lufterfüllten Flüssigkeiten gearbeitet, da der Einfluss des Luftgehaltes noch nicht bekannt ist und ich ausserdem ein Mischen mit Luft nicht hätte verhindern können. Während bei andern Methoden diese Erneuerung der Oberflächenhaut während des Versuches nicht möglich ist, konnte ich dieselbe durch Umrühren und Umgiessen nach Belieben vollziehen und habe sie während meiner Untersuchungen nie unterlassen.

Neben diesen Vortheilen haften der Methode auch einige Nachtheile an, von denen jedoch die meisten allen Methoden gemeinsam sind. Zur Untersuchung sind mindestens 2 l Flüssigkeit nothwendig, während bei andern Methoden einige Cubikcentimeter hinreichen. Flüssigkeiten von grosser Viscosität können nicht untersucht werden, da die Wellen auf ihnen sich nicht erregen lassen resp. nicht bemerkbar werden. Bei steigender Temperatur wird die Beobachtung durch die aufsteigenden Dämpfe sehr erschwert und bei ungefähr 70—80° C. fast unmöglich. Der Untersuchungsbereich ist also ziemlich beschränkt.

---

[1]) Es ist wahrscheinlich, dass die Annahme von Hagen (Abh. der kgl. Akad. d. Wissenschaften, Berlin 1845) und Riess, luftfreies Wasser habe eine geringere Oberflächenspannung als lufterfülltes, dadurch hervorgerufen worden ist, dass sich die Oberfläche des ausgekochten Wassers während des Abkühlens verunreinigte.

Von diesen Nachtheilen abgesehen, kann ich wohl behaupten, dass diese Art der Untersuchung für die Bestimmung der Oberflächenspannung wässeriger Salzlösungen die geeignetste und sicherste ist.

V.

A. Destillirtes Wasser.

Ueber den Werth meiner Methode musste die Untersuchung von destillirtem Wasser entscheiden. Matthiessen hatte folgende Constanten gefunden:

Flüssigkeit	t^0 C.	T [cmgr]
Quecksilber	15°—20°	0,0366
Destillirtes Wasser . . .	15°—20°	0,074
Absoluter Alkohol (99%) .	15°—20°	0,0366
Absoluter Schwefeläther .	12°	0,0302
Schwefelkohlenstoff . . .	12°	0,0334

Von diesen Werthen stimmt nur der für Wasser mit den durch andere Methoden erhaltenen überein, namentlich weicht die Bestimmung der Oberflächenspannung von Quecksilber von den früheren bedeutend ab. Zeigte sich nun keine Aehnlichkeit zwischen der Abnahme der durch Bestimmung von λ sich ergebenden Werte von Wasser in Folge der Temperatur mit den von andern Beobachtern auf verschiedene Weise gefundenen gleichen Gesetzen, so musste die Methode zur Bestimmung der Oberflächenspannung verworfen werden.

Ich benutzte lufterfülltes destillirtes Wasser, welches ich aus der hiesigen Universitätsapotheke von Dr. Brunnengräber bezog. Es kostete grosse Mühe, absolut reines Wasser zu erhalten, und musste ich nach zweimonatlichem Arbeiten die erhaltenen Resultate verwerfen, als ich bei einer neuen Menge Wasser viel höhere Werthe als vorher fand. Ob dieses Wasser absolut rein war, konnte ich nicht entscheiden; ich habe mit demselben die Untersuchung über den Einfluss der Temperatur auf die Oberflächenspannung durchgeführt und gebe in untenstehender Tabelle die gefundenen Werthe an.

Da die Messungen im Winter vollzogen wurden, war es mir leicht, beim Gefrierpunkte und bei niedrigen Temperaturen zu untersuchen. Um das Wasser beständig auf dem Gefrierpunkte zu halten, benutzte ich folgenden Kunstgriff; ich liess destillirtes Wasser in einer Porzellanschüssel gefrieren, entfernte dann einen Theil der oberen Eisdecke und untersuchte so gleichsam in einer Schüssel aufs Eis. Von Zeit zu Zeit wurde durch Umrühren die Oberflächenhaut erneuert. Die Unter-

suchungen wurden theils im Freien, theils im ungeheizten Zimmer ausgeführt. Bei den Messungen der höheren und mittleren Temperaturen arbeitete ich in einem geheizten Zimmer von 15—25° C. Die graphische Darstellung zeigt, dafs bei 8° C. die Kurve der Aenderung von T ungefähr in eine Gerade übergeht. Ich stelle deshalb mit den aus $T = \frac{256^2 \lambda^3}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 981{,}4}$ berechneten Werthen die aus $T^1 = T_0 - bt$ berechneten zusammen. Die Constante b bezeichne ich in meiner Arbeit als Temperaturcoefficienten.

I. Aqua destillata.

t° C.	λ cm	T emgr	T^1	Δ
0	0,1975	0,0823	—	—
4	0,1952	0,0791	—	—
8	0,1934	0,0769	0,0769	0,0000
15	0,1912	0,0744	0,0745	— 0,0001
25	0,1889	0,0716	0,0712	+ 0,0004
40	0,1833	0,0655	0,0662	— 0,0007
55	0,1795	0,0615	0,0612	+ 0,0003

Zur Berechnung der Werthe von 0—8° C. ergibt sich die Formel:

$$T = 0{,}0823 - 0{,}000915\,t + 0{,}00003\,t^2,$$

für die Werthe von 8—55° C.:

$$T = 0{,}07953 - 0{,}000333\,t.$$

Trage ich in einem Coordinatensystem die Temperatur als Abscisse, die Werthe von T als Ordinaten auf, so erhalte ich eine Curve, deren Neigung gegen die Abscissenaxe von 0—15° C. abnimmt und die zwischen 8 und 15° C. in eine Gerade übergeht, da die Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung bald positiv, bald negativ sind. Die graphische Darstellung ergibt, dass die Oberflächenspannung von Wasser ihren grössten Werth bei 0° C. erreicht und nicht bei 4° C., dem Maximum der Dichte. Oberhalb und unterhalb der Nähe des Dichtemaximums findet eine stärkere Abnahme der Oberflächenspannung statt, als bei höheren Temperaturen; über 8° C. erfolgt die Abnahme nicht im Verhältniss der Dichte, sondern der Zunahme der Temperatur. Ich erhalte also durch meine Methode genau dieselben Gesetze, welche Brunner und Wolf durch Messung der Steighöhe in Capillarröhren gefunden haben.

Vergleiche ich die von früheren Beobachtern gefundenen Werthe[1]) mit meinen Resultaten, so stimmen nur die für 15° C. erhaltenen Zahlen einigermaassen überein. Der für 0° gefundene Werth ist beträchtlich höher als der durch Capillarröhren erhaltene, stimmt aber annähernd überein mit den durch das Gewicht abgefallener Tropfen und Beobachtung von Luftblasen gefundenen Werthen. Obwohl ich nun dieselben Gesetze gefunden habe, wie sie nach andern Methoden sich ergaben, ist eine Uebereinstimmung der einzelnen, für gleiche Temperaturen erhaltenen Werthe nicht vorhanden, sogar der Temperaturcoefficient ist verschieden. Wie die Zusammenstellung der bis jetzt gefundenen Werthe für T_0 und b bei Timberg zeigt, sind nicht einmal nach derselben Methode gleiche Resultate erzielt worden, geschweige denn nach verschiedenen. Ich werde auf diesen Punkt am Schlusse meiner Arbeit zurückkommen.

B. Wässerige Salzlösungen.

Bei der Auswahl der Salze, deren Lösungen ich untersuchen wollte, beschränkte ich mich auf die Chloride von Calium, Natrium, Ammonium, Calcium, Barium, Strontium und Magnesium. Von jedem Salze untersuchte ich vier Lösungen, die je 5, 10, 15 und 20 g wasserfreies Salz auf 100 cbcm Wasser enthielten. Die Salze waren als chemisch rein von Dr. Brunnengräber in Rostock bezogen. Da das specifische Gewicht in dem Thomson'schen Gesetze nicht vorkommt, wandte ich keine besondere Mühe auf die Bestimmung desselben und bestimmte es mit der Mohr'schen Wage; als Einheit gilt Wasser bei 15° C. Bei Chlormagnesium konnte ich wegen der hygroskopischen Eigenschaft des Salzes den Procentgehalt nicht genau feststellen und musste mich damit begnügen, die Lösungen in dem Verhältnisse 1 : 2 : 3 : 4 darzustellen. —

Grosse Schwierigkeit bot die Untersuchung von Chlorammonium. So lange Metalltheile mit der Flüssigkeit in Berührung kamen, war keine Constanz der Wellenbreite zu bemerken. Fast nach jedem Umrühren ergaben sich andere Resultate; mehrfach kam es vor, dass eine Lösung bei höherer Temperatur grössere Werthe zeigte als bei niederer. Zu gleicher Zeit bemerkte ich, dass sich die Stimmgabel mit einem braungrünen Ueberzug bedeckte und durch die aufsteigenden Dämpfe so heftig angegriffen wurde, dass sich nach dem Reinigen an den beschlagenen Stellen kleine Vertiefungen zeigten. Ich schloss hieraus, dass eine Zersetzung der Lösung vielleicht in Folge eines galvanischen Stromes stattfände. Um diese zu verhindern und meine

1) Vgl. Traube, Journ. f. prakt. Chemie N. F. B. 31, 1885 und Timberg, Wied. Ann. 30, 1887.

Annahme zu prüfen, versah ich Stimmgabel und Pachymeter mit Hornspitzen und vermied jede Berührung von Metall und Flüssigkeit. Bei den mit diesen Instrumenten gemachten Messungen zeigten sich die vorerwähnten Erscheinungen nicht mehr. Inwieweit sonst die Substanz der Spitzen einen Einfluss auf die Flüssigkeit ausübt, kann ich nicht bestimmen, doch habe ich ausser bei Chlorammonium einen solchen nicht bemerkt. Die Temperatur der Salzlösungen wurde durch Mischen konstant gehalten. Bei niederen Temperaturen stellte ich in die Porzellanschüssel ein dünnwandiges mit Eis gefülltes Gefäss. Da ich nach Beendigung der Untersuchungen über destillirtes Wasser gezwungen war, meine Arbeiten einer Augenkrankheit wegen längere Zeit zu unterbrechen, konnte ich diese Untersuchungen, die in wärmerer Jahreszeit ausgeführt wurden, nicht bis zum Gefrierpunkte der einzelnen Salzlösungen ausdehnen und deshalb nicht genau untersuchen, ob dieselben ein ähnliches Verhalten wie Wasser zeigen. Bei einzelnen Salzlösungen fand ich jedoch bei der graphischen Darstellung so grosse Abweichungen der für die niederen Temperaturgrade gefundenen Werthe von T von einer Geraden, dass ich bei diesen eine solche Annahme machen zu dürfen glaubte. Weitere Untersuchungen müssen hierüber Klarheit zu schaffen.

Ich führe jetzt die Resultate meiner Messungen an. t bedeutet die Temperatur, gemessen nach Celsius, λ die beobachtete Wellenlänge in Centimeter, T die aus der Formel $T = \frac{256^2 \lambda^3}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 981{,}4}$, T' die aus $T = T_0 - bt$ nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten Werthe der Oberflächenspannung in Centimetergrammen; Δ ist die Differenz zwischen beiden. Der Werth von λ ist bei jeder Temperatur das Mittel aus 40—60 Einzelbeobachtungen.

II. Chlorkalium.

1. Lösung.

5 g in 100 cbcm Wasser. $SG = 1{,}0300$.

t	λ	T	T^1	Δ
6	0,1814	0,0635	0,0629	+ 0,0006
15	0,1800	0,0620	0,0616	+ 0,0004
25	0,1783	0,0603	0,0601	+ 0,0002
35	0,1764	0,0584	0,0587	— 0,0003
45	0,1749	0,0569	0,0572	— 0,0003
55	0,1731	0,0552	0,0557	— 0,0005

$T_0 = 0{,}06379$ · — · $b = 0{,}000146$.

2. Lösung.

10 g in 100 cbcm Wasser — $SG = 1{,}0590$

t	λ	T	T^1	Δ
4	0,1788	0,0608	0,0609	— 0,0001
15	0,1775	0,0595	0,0594	+ 0,0001
25	0,1761	0,0581	0,0580	+ 0,0001
35	0,1746	0,0566	0,0566	0,0000
45	0,1731	0,0551	0,0552	— 0,0001
55	0,1718	0,0539	0,0539	0,0000

$T_0 = 0{,}06143$ · — · $b = 0{,}000137$.

3. Lösung.

15 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1{,}0904$.

	λ	T	T¹	Δ
4	0,1771	0,0591	—	—
9	0,1744	0,0563	0,0560	+ 0,0003
15	0,1733	0,0553	0,0556	— 0,0003
26	0,1727	0,0547	0,0548	— 0,0001
40	0,1716	0,0537	0,0538	— 0,0001
55	0,1708	0,0530	0,0528	+ 0,0002

$T_0 = 0{,}05665 \quad b = 0{,}00070.$

4. Lösung.

20 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1{,}1250$.

t	λ	T	T¹	Δ
5	0,1712	0,0533	0,0531	+ 0,0002
10	0,1710	0,0532	0,0529	+ 0,0003
15	0,1702	0,0524	0,0526	— 0,0002
25	0,1696	0,0519	0,0522	— 0,0003
40	0,1692	0,0515	0,0515	0,0000
55	0,1687	0,0510	0,0508	+ 0,0002

$T_0 = 0{,}05339$ · — · $b = 0{,}000046$

III. Chlornatrium.

1. Lösung.

5 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1{,}0342$.

t	λ	T	T¹	Δ
3,5	0,1875	0,0701	—	—
10	0,1848	0,0671	—	—
15,5	0,1823	0,0644	0,0645	— 0,0001
25	0,1803	0,0623	0,0622	+ 0,0001
40	0,1766	0,0586	0,0586	0,0000
55	0,1729	0,0549	0,0549	0,0000

Für 0—15° C ist $T = 0{,}07167 - 0{,}000437\, t$
für 15—55° C $T_0 = 0{,}06822$; $b = 0{,}000241$

2. Lösung.

10 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1{,}0790$

t	λ	T	T¹	Δ
4	0,1794	0,0614	—	—
15	0,1764	0,0584	0,0583	+ 0,0001
25	0,1749	0,0568	0,0569	— 0,0001
35	0,1732	0,0553	0,0552	+ 0,0001
45	0,1721	0,0542	0,0541	+ 0,0001
55	0,1706	0,0527	0,0527	0,0000

$T_0 = 0{,}06037$ — · - $b = 0{,}000139.$

3. Lösung.

15 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1{,}0908$.

t	λ	T	T¹	Δ
3,5	0,1747	0,0567	—	—
15	0,1721	0,0542	0,0543	— 0,0001
26	0,1716	0,0537	0,0537	0,0000
35	0,1709	0,0531	0,0532	— 0,0001
45	0,1704	0,0526	0,0526	0,0000
55	0,1698	0,0521	0,0521	0,0000

$T_0 = 0{,}05507$ — · — $b = 0{,}000054$

4. Lösung.

20 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1{,}1353$.

t	λ	T	T¹	Δ
4	0,1698	0,0521	0,0522	— 0,0001
15	0,1694	0,0517	0,0517	0,0000
25	0,1691	0,0514	0,0512	+ 0,0002
35	0,1684	0,0508	0,0508	0,0000
45	0,1679	0,0504	0,0504	0,0000
55	0,1673	0,0498	0,0499	— 0,0001

$T_0 = 0{,}05235$ — · — $b = 0{,}000044.$

IV. Chlorammonium.

1. Lösung.

5 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1{,}0146$.

t	λ	T	T^1	Δ
4,5	0,1870	0,0696	0,0694	+ 0,0002
15	0,1847	0,0670	0,0669	+ 0,0001
25	0,1824	0,0645	0,0645	0,0000
35	0,1799	0,0619	0,0622	— 0,0003
45	0,1778	0,0597	0,0597	0,0000
55	0,1758	0,0577	0,0574	+ 0,0003

$T_0 = 0{,}07044 - \cdot - b = 0{,}000237$

2. Lösung.

10 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1{,}0290$

t	λ	T	T^1	Δ
7,5	0,1850	0,0673	0,0672	+ 0,0001
15	0,1836	0,0658	0,0658	0,0000
25	0,1818	0,0639	0,0639	0,0000
35	0,1800	0,0621	0,0620	+ 0,0001
45	0,1783	0,0602	0,0602	0,0000
55	0,1764	0,0583	0,0583	0,0000

$T_0 = 0{,}06862 - \cdot - b = 0{,}000187.$

3. Lösung.

15 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1{,}0420$.

t	λ	T	T^1	Δ
4	0,1857	0,0681	0,0680	+ 0,0001
15	0,1847	0,0670	0,0670	0,0000
25	0,1838	0,0660	0,0660	0,0000
35	0,1827	0,0648	0,0649	— 0,000 1
45	0,1818	0,0639	0,0639	0,0000
55	0,1811	0,0632	0,0630	+ 0,0002

$T_0 = 0{,}06849 - \cdot - b = 0{,}000100.$

4. Lösung.

20 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1{,}0536$.

t	λ	T	T^1	Δ
4	0,1841	0,0664	0,0663	+ 0,0001
15	0,1833	0,0655	0,0655	0,0000
25	0,1826	0,0647	0,0648	— 0,0001
35	0,1819	0,0640	0,0640	0,0000
45	0,1813	0,0634	0,0633	+ 0,0001
55	0,1804	0,0624	0,0626	— 0,0002

$T_0 = 0{,}06664 - \cdot - b = 0{,}000074.$

V. Chlorcalcium.

1. Lösung.

5 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1{,}0283$.

t	λ	T	T^1	Δ
5	0,1831	0,0653	0,0659	— 0,0006
15	0,1818	0,0639	0,0638	+ 0,0001
25	0,1801	0,0621	0,0617	+ 0,0004
35	0,1784	0,0603	0,0595	+ 0,0008
45	0,1753	0,0573	0,0574	— 0,0001
55	0,1726	0,0547	0,0553	— 0,0006

$T_0 = 0{,}06700 - \cdot - b = 0{,}000213.$

2. Lösung.

10 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1{,}0571$.

t	λ	T	T^1	Δ
5	0,1800	0,0620	0,0621	— 0,0001
15	0,1780	0,0600	0,0602	— 0,0002
25	0,1768	0,0588	0,0584	+ 0,0004
35	0,1748	0,0568	0,0565	+ 0,0003
45	0,1722	0,0543	0,0546	— 0,0003
55	0,1705	0,0527	0,0527	0,0000

$T_0 = 0{,}06305 - \cdot - b = 0{,}000187.$

3. Lösung.

15 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1,0934$.

t	λ	T	T^1	Δ
3,6	0,1771	0,0591	0,0591	0,0000
15	0,1753	0,0573	0,0573	0,0000
25	0,1735	0,0555	0,0556	— 0,0001
35	0,1718	0,0539	0,0539	0,0000
45	0,1699	0,0522	0,0522	0,0000
55	0,1686	0,0510	0,0506	+ 0,0004

$T_0 = 0,05979$ — · — $b = 0,000168$.

4. Lösung.

20 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1,1152$.

t	λ	T	T^1	Δ
3,6	0,1742	0,0562	0,0564	— 0,0002
15	0,1729	0,0553	0,0548	+ 0,0005
25	0,1711	0,0533	0,0533	0,0000
35	0,1691	0,0514	0,0517	— 0,0003
45	0,1676	0,0500	0,0502	— 0,0002
55	0,1665	0,0491	0,0488	+ 0,0003

$T_0 = 0,05702$ — · — $b = 0,000149$.

VI. Chlorbarium.

1. Lösung.

5 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1,0372$.

t	λ	T	T^1	Δ
5	0,1810	0,0630	0,0630	0,0000
15	0,1792	0,0612	0,0612	0,0000
25	0,1775	0,0595	0,0593	+ 0,0002
35	0,1752	0,0572	0,0574	— 0,0002
45	0,1730	0,0551	0,0555	— 0,0004
55	0,1718	0,0540	0,0536	+ 0,0004

$T_0 = 0,06399$ — · — $b = 0,000189$.

2. Lösung.

10 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1,0772$.

t	γ	T	T'	Δ
6	0,1752	0,0572	0,0573	— 0,0001
16	0,1745	0,0564	0,0559	+ 0,0005
25	0,1720	0,0541	0,0544	— 0,0003
35	0,1700	0,0522	0,0528	— 0,0006
45	0,1689	0,0512	0,0512	0,0000
55	0,1676	0,0500	0,0497	+ 0,0003

$T_0 = 0,05828$ — · — $b = 0,000156$.

3. Lösung.

15 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1,1110$.

t	λ	T	T^1	Δ
6	0,1727	0,0548	0,0547	+ 0,0001
17	0,1716	0,0537	0,0537	0,0000
25	0,1705	0,0527	0,0529	— 0,0002
35	0,1696	0,0519	0,0520	— 0,0001
45	0,1688	0,0511	0,0511	0,0000
55	0,1670	0,0503	0,0502	— 0,0001

$T_0 = 0,05521$ — · — $b = 0,000090$.

4. Lösung.

20 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1,1509$.

t	λ	T	T^1	Δ
5,5	0,1696	0,0520	0,0520	0,0000
15	0,1687	0,0510	0,0512	— 0,0002
25	0,1677	0,0502	0,0503	— 0,0001
35	0,1671	0,[illegible]496	0,0495	+ 0,0001
45	0,1660	0,0486	0,0486	0,0000
55	0,1651	0,0478	0,0477	+ 0,0001

$T_0 = 0,05250$ — · — $b = 0,000086$.

VII. Chlormagnesium.

1. Lösung.
5 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1{,}0175$.

t	λ	T	T_1	$\varDelta$
3,7	0,1849	0,0672	0,0669	+ 0,0003
15	0,1814	0,0639	0,0640	— 0,0001
25	0,1790	0,0610	0,0613	— 0,0003
35	0,1765	0,0585	0,0586	— 0,0001
45	0,1739	0,0560	0,0559	+ 0,0001
55	0,1711	0,0533	0,0532	+ 0,0001

$T_0 = 0{,}06802$ — · — $b = 0{,}000270$.

2. Lösung.
10 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1{,}0365$.

t	λ	T	T^1	$\varDelta$
6	0,1836	0,0658	0,0652	+ 0,0006
15	0,1804	0,0625	0,0630	— 0,0005
25	0,1784	0,0602	0,0605	— 0,0003
35	0,1760	0,0580	0,0580	0,0000
45	0,1736	0,0556	0,0556	0,0000
55	0,1713	0,0535	0,0532	+ 0,0003

$T_0 = 0{,}06667$ — · — $b = 0{,}000245$.

3. Lösung.
15 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1{,}0510$.

t	λ	T	T^1	$\varDelta$
4,3	0,1806	0,0626	0,0627	— 0,0001
15	0,1785	0,0605	0,0603	+ 0,0002
25	0,1761	0,0581	0,0580	+ 0,0001
35	0,1735	0,0556	0,0558	— 0,0002
45	0,1713	0,0535	0,0536	— 0,0001
55	0,1693	0,0516	0,0514	+ 0,0002

$T_0 = 0{,}06359$ — · — $b = 0{,}000222$.

4. Lösung.
20 g in 100 ccm Wasser. $SG = 1{,}0630$.

t	λ	T	T^1	$\varDelta$
4	0,1781	0,0601	0,0600	+ 0,0001
15	0,1768	0,0588	0,0589	— 0,0001
25	0,1758	0,0577	0,0578	— 0,0001
35	0,1749	0,0569	0,0567	+ 0,0002
45	0,1736	0,0557	0,0557	0,0000
55	0,1725	0,0546	0,0546	0,0000

$T_0 = 0{,}06045$ — · — $b = 0{,}000106$.

VI.

Ich gehe zur Discussion meiner Messungen über. Um die Resultate besser übersehen zu können, stelle ich hier nochmals das Nothwendigste zusammen. In den untenstehenden Tabellen bedeutet S den Salzgehalt der Lösung in Procenten auf 100, S' das specifische Gewicht bezogen auf Wasser von 15° C., T_0 und b die aus der Gleichung $T = T_0 - bt$ berechneten Werthe der Oberflächenspannung und des Temperaturcoefficienten. Wie ein Ueberblick der unter $\varDelta$ aufgeführten Differenz zwischen T und T' zeigt, lassen sich die Aenderungen von T mit steigender Temperatur durch Geraden darstellen. Ich habe diese Geraden in ein Coordinatensystem eingetragen die Temperatur als Abscisse, die Oberflächenspannung als Ordinate. Um die Uebersicht nicht zu verwirren, habe ich für jedes Salz eine Tafel verfertigt; sämmtliche Tafeln haben denselben Maasstab. (Fig. 2—8.)

	S	S bei 15°C.	T_0	b
1. Aqua destillata . .	0	1,0000	0,07953	0,000333
2. Chlorkalium . . .	5	1,0300	0,06379	0,000146
	10	1,0590	0,06143	0,000137
	15	1,0904	0,05665	0,000070
	20	1,1250	0,05339	0,000046
3. Chlornatrium . . .	5	1,0342	0,06822	0,000241
	10	1,0790	0,06037	0,000139
	15	1,0908	0,05507	0,000054
	20	1,1353	0,05235	0,000044
4. Chlorammonium . .	5	1,0146	0,07044	0,000237
	10	1,0290	0,06862	0,000187
	15	1,0420	0,06849	0,000100
	20	1,0536	0,06664	0,000074
5. Chlorcalcium . . .	5	1,0283	0,06700	0,000213
	10	1,0571	0,06305	0,000187
	15	1,0934	0,05979	0,000168
	20	1,1152	0,05702	0,000149
6. Chlorbarium . . .	5	1,0372	0,06399	0,000189
	10	1,0772	0,05828	0,000156
	15	1,1110	0,05521	0,000090
	20	1,1509	0,05250	0,000086
7. Chlormagnesium . .	5	1,0175	0,06802	0,000270
	10	1,0365	0,06667	0,000245
	15	1,0510	0,06359	0,000222
	20	1,0630	0,06045	0,000106

Diesen von mir gefundenen Werten füge ich noch zwei Beobachtungen von Buys-Ballot und Buliginsky hinzu; der erste untersuchte mittels Adhäsionsplatten, dieser mit Capillarröhren. Ich führe die Werthe ohne Reducirung an.

	S	S bei 15°C.	T^0	b
1. Schwefelsaures Natron[1])		1,065	12,86	0,0632
		1,160	9,472	0,0274
2. Destillirtes Wasser . .		0,99918		0,1980
3. Salpetersaures Kali[2]) .	14,68	1,0270		0,185 mm
	7,57	1,0465		0,174 „
	10,40	1,0657		0,171 „
	13,22	1,0862		0,135 „

1) Buys-Ballot, Pogg. Ann. 71, 1847 S. 186.
2) Buliginsky, Pogg. Ann. 134, 1868 S. 449.

Aus diesen Tabellen ergeben sich für die von mir untersuchten Salzlösungen folgende Gesetze:

1. **Mit zunehmender Concentration nimmt die Oberflächenspannung ab, und es ist im allgemeinen bei geringerem Salzgehalt die Abnahme stärker als bei grossem Salzgehalte.**

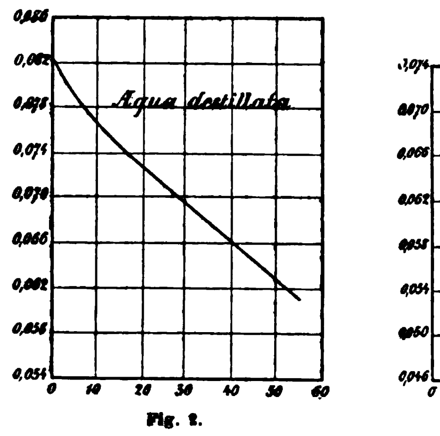


Fig. 2.

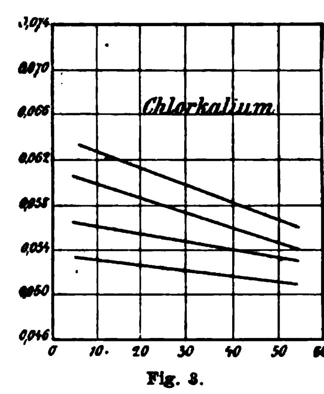


Fig. 3.

2. **Die Oberflächenspannung der Lösung ist stets kleiner als die des Lösungsmittels.**

3. **Mit zunehmender Concentration nimmt der Temperaturcoefficient ab.**

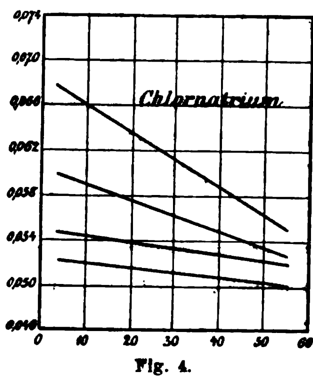


Fig. 4.

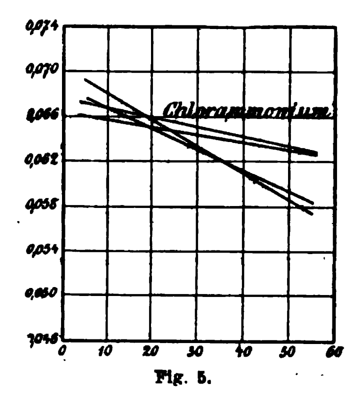


Fig. 5.

4. **Die Abnahme des Temperaturcoefficienten ist bei gleicher Zunahme der Concentration bei Lösungen desselben Salzes verschieden.**

5. **Der Temperaturcoefficient ist bei verschiedenen Salzlösungen gleicher Concentration verschieden.**

6. **Irgend welche Gesetzmässigkeit bei der Abnahme des Temperaturcoefficienten mit steigender Concentration ist nicht zu erkennen.**

Ob sich die unter 3—5 aufgestellten Sätze verallgemeinern und auf alle wässerigen Salzlösungen ausdehnen lassen, müssen fernere Untersuchungen zeigen. Die beiden angeführten Beobachtungen von Buys-Ballot und Buliginsky befolgen diese Gesetze. Weitere für mich brauchbare Resultate konnte ich in der Zahl der vorherigen Beobachtungen nicht finden.

Die von mir unter 1 und 2 aufgestellten Sätze sind bereits von Quincke, Volkmann, Rother und Traube für eine grosse Anzahl von Salzlösungen gefunden worden. Es zeigten sich freilich bei der Temperatur, bei denen sie ihre Untersuchungen anstellten, verschiedene Ausnahmen von diesen Gesetzen; so stiegen bei sehr starker Concentration bei $MgCl_2$ und K_2CO_3 die Werte der Oberflächenspannung für 15° C. wieder. Weit grössere Unregelmässigkeit zeigten bei den

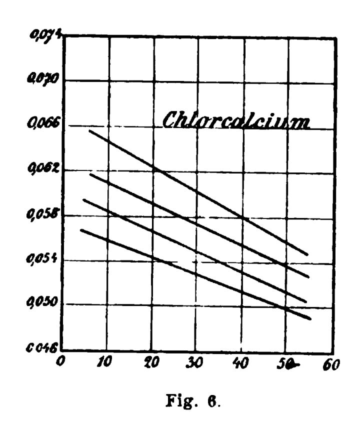


Fig. 6.

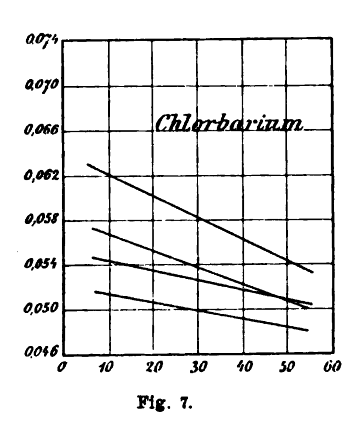


Fig. 7.

Untersuchungen durch Beobachtung der Steighöhe die Lösungen von NH_4Cl; ihre Oberflächenspannung wird sowohl höher als die des Lösungsmittels gefunden, als auch steigt dieselbe durchweg mit zunehmender Concentration. Ich finde weder das eine noch das andere; nach meinen Messungen verhalten sich die Lösungen von NH_4Cl ganz regelmässig. Ebenso sind die Werthe, welche Quincke durch Messung der Form flacher Luftblasen gefunden hat. Wasser $(a^2) = 16{,}83$, Chlorammoniumlösung S. G. = 1,0360, $(a^2) = 16{,}58$ und S. G. = 1,0758 $a^2 = 16{,}56$ völlig in den beiden Gesetzen gegeben.

Die graphische Darstellung zeigt eine höchst merkwürdige Erscheinung. Die Geraden, welche das Abnehmen der Oberflächenspannung mit steigender Temperatur bei Lösungen desselben Salzes darstellen, convergiren und schneiden sich sogar. Durch Satz 1 und 3 ist diese Erscheinung völlig erklärt. Hieraus ergeben sich wichtige Folgerungen. Vor allem geht hieraus hervor, dass

der Einfluss der Temperatur auf die Oberflächenspannung von Flüssigkeiten ein bedeutender ist, viel grösser, als er in der Theorie von Laplace[1]) und Poisson[2]) geschätzt wurde. Diese stellten den Satz auf, dass die Veränderung der Temperatur nur insoweit einen Einfluss auf die Cohäsion der Flüssigkeiten ausübe, als sie eine Veränderung der Dichte bewirke. Diese Annahme ist durch die bisherigen Arbeiten über den Einfluss der Temperatur, namentlich durch die Untersuchungen von Brunner und Wolf über das Verhalten von Wasser innerhalb des Intervalls von 0—8° C. widerlegt worden. Die Experimente haben gezeigt, dass die Capillarhöhe mit Erhöhung der Temperatur viel schneller abnimmt, als der Verminderung der Dichtigkeit entsprechen würde. Ebenso zeigen meine Versuche, dass die Abnahme der Oberflächenspannung mit steigender Temperatur nicht im Verhältnis der Abnahme der Dichte, sondern der Zunahme der Temperatur erfolgt. Laplace und Poisson stellten ihre Theorien auf, als noch keine Untersuchungen über Temperatureinflüsse gemacht worden waren. Ich darf mir nicht erlauben, ein Urtheil über den heutigen Werth dieser Theorien zu fällen, und wage es nicht, aus den wenigen bis jetzt angestellten Versuchen dieselben für ungültig zu erklären. Weitere eingehendere Untersuchungen müssen zeigen, inwieweit die Theorie noch im Stande ist, die Erscheinungen der Oberflächenspannung zu erklären oder wie dieselbe umgeformt werden muss, damit die Resultate der Theorie und der Beobachtung sich decken.

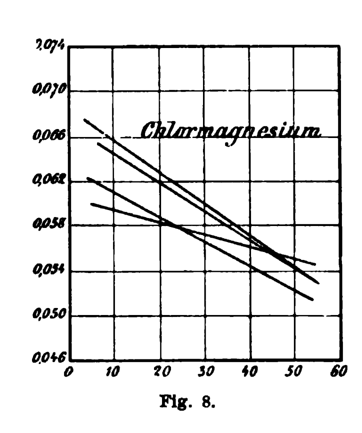


Fig. 8.

Aus meinen Versuchen folgt ferner, dass eine Vergleichung der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten bei 15° C. als Normaltemperatur unstatthaft ist, da bereits, wie die von andern untersuchten Lösungen von $MgCl_2$ und K_2CO_3 beweisen, der Einfluss der Temperatur innerhalb des kleinen Intervalls vom Gefrierpunkte bis 15° C., so gross ist, dass Erscheinungen auftreten, welche die bestehende Gesetzmässigkeit verdunkeln und Ausnahmen zu bilden scheinen, wo solche überhaupt nicht vorhanden sind. Schiff[3]) weist bereits darauf hin, dass eine Vergleichung der Cohäsionsconstanten der verschiedenen

1) Méc. cel. Supplement au X. livre T. IV, 1880.
2) Nouvelle théorie de l'action capillaire p. 106.
3) Lieb. Ann. der Chemie 1884.

Flüssigkeiten bei gleicher Temperatur in Bezug auf unsere Thermometerskala niemals ein befriedigendes Resultat geben könne, weil sich hierbei die Flüssigkeiten nicht in physikalisch vergleichbaren Umständen befänden. Wenn auch innerhalb des von mir untersuchten Temperaturintervalles die Temperaturkurven in Geraden übergehen, so zeigen die Werthe für Wasser und Chlornatriumlösung, dass in der Nähe des Gefrierpunktes die Temperaturkurve keine gerade Linie mehr ist, sondern dass hier mit abnehmender Temperatur ein stärkeres Wachsen der Oberflächenspannung eintritt. In gleicher Weise ist anzunehmen, dass bei sehr hoher Temperatur die Abnahme keine lineare mehr ist. Dieses ergibt sich, wenn man die aus To und b berechnete Temperatur, bei welcher $T = 0$ ist, mit der wirklich gefundenen kritischen Temperatur vergleicht. Da man eine Untersuchung bei der kritischen Temperatur nicht anstellen kann, weil bei dieser $T = 0$ ist, bleiben nur zwei Punkte übrig, bei welchen man vergleichbare Werthe der Oberflächenspannung erhalten kann, der Gefrier- und der Siedepunkt. Schiff untersuchte eine grosse Anzahl organischer Flüssigkeiten bei ihrem Siedepunkte und fand wichtige Gesetze über die Abhängigkeit der Oberflächenspannung von dem Molekülar-Gewicht und der chemischen Constitution. Ob für wässerige Salzlösungen eine Untersuchung beim Siedepunkte zu klaren Gesetzen führen würde, möchte ich in Betracht von Satz 1 und 3 bezweifeln, auch ist eine solche Bestimmung mit den meisten bis jetzt bestehenden Beobachtungsmethoden unmöglich. Leichter ist die Untersuchung der Salzlösungen bei ihrem Gefrierpunkte. Diese lässt sich nach vielen Methoden ausführen und dürfte sich die von mir angewandte hierzu wohl gut eignen. Ausserdem befinden sich die Flüssigkeiten beim Gefrierpunkte ebenso gut in einem physikalisch vergleichbaren Zustande, wie beim Siedepunkte.

Ich komme zu dem letzten Ergebnisse meiner Arbeit. Die meisten bis jetzt nach den verschiedensten Methoden angestellten Versuche haben zu denselben Gesetzen über den Einfluss der Concentration und der Temperatur auf die Oberflächenspannung von Salzlösungen geführt. — Wie steht es dagegen mit den von den einzelnen Forschern als absolute Werthe angegebenen Zahlen? Ein Vergleich ergibt, dass nicht einmal die nach derselben Methode gefundenen Werthe numerisch übereinstimmen, sondern bereits in der zweiten Stelle bedeutende Differenzen aufweisen. Die nach verschiedenen Methoden erhaltenen Resultate weichen noch weit mehr von einander ab. Man hat sich vielfach bemüht, wenigstens die durch Beachtung der Steighöhe in Capillarröhren erhaltenen Werte auf einander zu reduciren; wie jedoch die Unterschiede zwischen den auf dieselbe Einheit reducirten Resul-

taten beweisen, sind alle derartigen Bestrebungen bis jetzt erfolglos geblieben. Versuche, welche mit einer Normalröhre von 1 mm Radius angestellt würden, könnten vielleicht zeigen, in wieweit die Werthe von den Instrumenten abhängen, mit denen sie erhalten worden sind. So lange aber diese Abhängigkeit noch nicht genau bestimmt ist, behält folgende Behauptung von C. Wolf[1]) Gültigkeit. — Die betreffende Stelle lautet: „Ich glaube, bewiesen zu haben, dass das von verschiedenen Beobachtern und besonders von Herrn Brunner gefundene Gesetz für die Abnahme der Capillarhöhe bei steigender Temperatur richtig ist, dass es aber unmöglich ist, dasselbe zu verallgemeinern und anzuwenden auf andere Röhren, als mit welchen die Versuche gemacht wurden". Wolf begnügte sich damit, die relativen Werthe zu vergleichen und aus diesen seine Schlüsse zu ziehen; ich wäre zu denselben Resultaten gekommen, wenn ich nur die für λ gefundenen Werthe mit einander verglichen hätte.

Wie die Versuche von Riess[2]) beweisen, zeigt die von mir angewandte Methode dieselbe Eigenthümlichkeit, wie die Methode der Messung der Steighöhe. Die Werthe, welche ich erhielt, werden sich nur wieder aus Beobachtungen ergeben, die mit einer Stimmgabel von 256 Schwingungen ausgeführt worden sind. Die Anwendung einer Stimmgabel von niederer Schwingungszahl wird zu kleinern, von höherer Schwingungszahl zu grössern Werten führen; für $n = \infty$ wird T ein Maximum. Wie aber immer die einzelnen Zahlen unter einander differiren, die sich aus denselben ergebenden Gesetze werden die gleichen sein. Der von Wolf aufgestellte Satz lässt sich also auf meine und überhaupt auf alle Methoden ausdehnen. — Die nach verschiedenen Methoden und bei gleicher Methode mit verschiedenen Instrumenten angestellten Untersuchungen über die Oberflächenspannung von Flüssigkeiten führen zu denselben allgemeinen Gesetzen; jedoch ist es unmöglich, die auf diese Weise für dieselbe Flüssigkeit als absolute Werthe der Oberflächenspannung erhaltenen Zahlen mit einander zu vergleichen. Vergleichbare absolute Werthe sind uns

1) Pogg. Ann. 102, 1857 S. 594.

2) Exner's Rep. d. Phys. 1890. Während ich die Beobachtungsmethode und die von Riess benutzten Instrumente kannte, erfuhr ich die Resultate seiner Arbeit erst nach Abschluss meiner Versuche. Ich hätte es sonst nicht unterlassen, mehrere Stimmgabeln zu benutzen und seine Angaben zu controlliren, welche mit den Resultaten von Matthiessen, dass für dieselbe Temperatur $n \lambda^{3/2} = \text{const.}$ sei, im Widerspruch zu stehen scheinen.

bis heute noch unbekannt; wir kennen nur für eine willkürlich angenommene Temperatur (15 ° C) das relative Verhältnis der Oberflächenspannung der einzelnen Flüssigkeiten zu einander.

Die experimentellen Untersuchungen, welche dieser Abhandlung zu Grunde liegen, sind im physikalischen Institut der Universität Rostock auf Veranlassung und unter Aufsicht des Herrn Professor Dr. L. Matthiessen ausgeführt worden.

Für die vielfachen Anregungen, welche mir derselbe im Laufe der Untersuchung hat zu Theil werden lassen, sowie für das lebhafte Interesse, das er dem Verlaufe dieser Arbeit schenkte, sei es mir gestattet, an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer den besten Dank auszusprechen.

Ueber theilweise Mischungen.

Von

K. Fuchs.

A. Wright und C. Thompson (Proc. Roy. Soc. London 55, p. 461 — 481, 1889) haben gefunden, dass eine Legierung von Blei, Zink und Zinn bei höherem Zinngehalt homogen bleibt, bei geringerem Zinngehalt aber sich in zwei scharf getrennte Theile sondert, von denen der eine eine gesättigte Lösung von Blei in zinnhaltigem Zink, der andere eine gesättigte Lösung von Zink in zinnhaltigem Blei darstellt.

Derartige Erscheinungen habe ich bereits vor Jahren theoretisch behandelt, wobei ich aber von physiologischen Thatsachen ausging. Ein kleiner Bruchtheil dieser Arbeiten: Die Rechnungen über die theilweise Mischung von nur zwei Flüssigkeiten unter vereinfachenden Bedingungen sind in vorliegendem Exners Rep. vor zwei Jahren erschienen. Die Rechnungen über drei und mehr Flüssigkeiten wagte ich nicht zu veröffentlichen, weil mir keine physikalischen Thatsachen bekannt waren, welche die Verificirung der Resultate gestattet hätten. Nachdem aber nunmehr die Thompson'schen Experimente zeigen, dass meine Folgerungen richtig waren, will ich hiermit wenigstens den Anfang meiner Rechnungen darlegen. Leider überbieten die Formeln an Complicirtheit alles, was mir auf dem Gebiete der theoretischen Physik bekannt ist, nachdem alle Glieder der Gleichungen gleichwerthig sind, also keine Approximationen möglich sind. Ein Blick auf Gleichung 46, der sich auf obige Thompson'sche Erscheinungen bezieht, zeigt dies.

Volumina.

Wir nehmen n Flüssigkeiten $A, B \ldots N$, von denen wir voraussetzen, dass sie sich ohne Contraction und ohne chemische Wechselwirkung mischen. Wir nehmen von ihnen die respectiven Volumina $v_1\, v_2\, v_3 \ldots v_n$, so dass wir das Gesamtvolumen $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ erhalten.

Wenn die Flüssigkeiten nur Cohäsionen und gar keine Adhäsionen besitzen, und es gäbe keine Diffusion, dann würden die Flüssigkeiten wohl in Contact bleiben, aber sich nicht mischen. Wir hätten dann n einfache Medien. Infolge der Diffusion jedoch wird jede Flüssigkeit von jeder andern wenigstens Spuren aufnehmen, und wir erhalten dann n zusammengesetzte Medien. In jedem Medium nennen wir die aufnehmende Flüssigkeit (die ohne Diffusion rein bliebe) den Träger, die aufgenommenen Flüssigkeiten die Tracht des Mediums. Dass zum gegenseitigen Durchdringen, ja zur vollständigen Mischung zweier Flüssigkeiten gar keine Adhäsion zwischen ihnen nöthig ist, habe ich bereits in einem Aufsatze über die Mischungsschicht zweier Flüssigkeiten in Exners Repertorium gezeigt.

Wenn die Flüssigkeiten gegen einander auch wachsende Adhäsionen zeigen, dann wird die Folge sein, dass die Trachten sich vergrössern, dass jede Flüssigkeit von den übrigen Flüssigkeiten immer mehr aufnimmt. Im übrigen bleiben die n Medien gesondert.

Die Zusammensetzung eines Mediums, z. B. des N-Mediums (in welchem N der Träger ist) können wir dadurch charakterisiren, dass wir angeben, welches Volumen von den einzelnen Flüssigkeiten in der Volumeinheit der Mischung enthalten ist. Die betreffenden Volumina nennen wir die Concentrationen der einzelnen Stoffe im in Rede stehenden Medium. Im N-Medium seien die Concentrationen von A, B, C . . . N gleich n_1, n_2, n_3 . . . n_n, d. h. beispielsweise, dass vom Stoffe B das Volumen n_2 in der Volumeinheit des N-Mediums enthalten ist. Natürlich gilt dann die Bedingung

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_n = 1.$$

Für das B-Medium wären dann analog die Concentrationen gleich $b_1, b_2, b_3, b_4 \ldots b_n$.

Das Volumen des A-Mediums bezeichnen wir mit V_1, das des B-Mediums mit V_2 etc. Dann ist das Volumen des Stoffes C, das etwa im Medium B enthalten ist, gleich $V_2 b_3$. Das Gesamtvolumen des in den einzelnen Medien enthaltenen, sagen wir, C muss dann gleich v_3 sein, d. h. es muss gelten

$$V_1 a_3 + V_2 b_3 + V_3 c_3 + V_4 d_3 + \ldots + V_n n_3 = v_3 \qquad (1$$

Analoge Gleichungen gelten für alle anderen Stoffe. Wir erhalten somit n Volumgleichungen. Wenn wir also in einem bestimmten Falle die Mischungsverhältnisse der einzelnen Medien angeben und die Volumina der einzelnen Flüssigkeiten, die zur Mischung genommen worden sind, dann können wir die Volumina der einzelnen Medien berechnen.

Wir nehmen als Beispiel die Mischung von nur zwei Flüssigkeiten A und B, und erhalten die Volumgleichungen

$$\left.\begin{aligned} V_1 a_1 + V_2 b_1 = v_1 \\ V_1 a_2 + V_2 b_2 = v_2 \end{aligned}\right\}, \qquad (1'$$

woraus sich ergibt

$$V_1 = \frac{v_1 b_2 - v_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad V_2 = -\frac{v_1 a_2 - v_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad (2$$

Den Sinn dieser beiden Formeln erkennt man am besten aus einem einfachen Experimente. Wenn man ein bestimmtes Volumen Äther nimmt, z. B. einen Liter, und man thut wenig Wasser hinein, z. B. 1 cm^3, dann wird dieses im Äther vollständig gelöst, und wir haben eine ungesättigte Lösung von Wasser in Äther. Je mehr Wasser wir zuschütten, desto mehr nähert sich die Lösung dem Sättigungspunkt, desto grösser wird ihr Volumen (Contraction nicht vorausgesetzt) und dabei bleibt sie homogen. Am Sättigungspunkt erreicht das Äthermedium sein grösstes Volumen. Wenn man noch 1 cm^3 Wasser zuschüttet, wird das nicht nur nicht mehr aufgenommen, sondern nimmt selber etwas Äther auf, vermindert also das Volumen des Äthermediums und bildet selber das komplementäre gesättigte Wassermedium. Es ist gut, im Gedächtnis zu behalten, dass das Wassermedium nur dann neben dem Äthermedium bestehen kann, wenn das Äthermedium gesättigt ist. Die fortgesetzte Wasserzufuhr ändert am Mischungsverhältnis der beiden Medien nichts, wohl aber wird das Volumen des Äthermediums immer kleiner, das des Wassermediums immer grösser, bis endlich das erstere zwar absorbirt ist, das letztere aber ein Maximalvolumen erhält, insofern es gesättigt ist.

Bei weiterer Wasserzufuhr wird die wässerige Ätherlösung einfach verdünnt. Wenn aber beide complementäre gesättigte Lösungen vorhanden sein sollen, dann müssen die Volumina von Äther und Wasser zwischen zwei Verhältnissen stehen. Diese Gesamtverhältnisse finden wir, wenn wir in die Formeln für V_1 und V_2 die Zähler gleich Null setzen. Wir erhalten

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ und } \frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2} \qquad (3$$

Der Nenner der Brüche für V_1 und V_2 ist immer positiv, da a_1 die Concentration von A als Träger bedeutet, die immer grösser ist, als die Concentration b_1 von A als Tracht, und ein Gleiches gilt für b_2, so dass nothwendig $a_1 b_2 > a_2 b_1$ ist.

Diese Folgerungen, die sich auf nur zwei Stoffe beziehen, können wir leicht auf eine partielle Mischung von n Stoffen übertragen.

Die n Stoffe $A, B \ldots N$ sollen in solchen Mengen gemischt sein, dass sie die n entsprechenden gesättigten Medien $M_a, M_b, M_c, \ldots M_n$ bilden, deren jedes mit jedem andern Stoffe gesättigt ist.

Wenn man von einem der Stoffe, z. B. N, immer neue Mengen zuschüttet, dann wird an der Zusammensetzung der ersteren Medien nichts geändert. Wohl aber vergrössert sich stetig das Volumen des N-Mediums; es nimmt immer neue Mengen der andern Stoffe in sich auf, deren Medien auf immer kleineres Volumen zusammenschrumpfen. Endlich wird ein Medium nach dem andern absorbirt, bis schliesslich nur ein einziges Medium, das N-Medium übrig bleibt.

Nehmen wir zweitens den Fall, dass der Stoff N nicht immer mehr, sondern umgekehrt immer weniger wird. Dann wird das N-Medium immer kleiner werden, die andern Medien aber wachsen, weil die in M_n gelöst gewesenen Stoffe ihnen zu Gute kommen. Endlich ist das N-Medium gänzlich verschwunden, während noch alle andern Medien mit N gesättigt sind. Wird N noch weniger, dann werden die Medien mit N nicht mehr gesättigt sein.

Als dritten Fall nehmen wir an, dass wir in den Complex der N-Medien eine neue Flüssigkeit P langsam einführen. Die erste kleine Menge würde sich ausschliesslich in demjenigen Medium concentriren, von welchem P am stärksten angezogen wird, wenn sie nicht durch die Diffusion in sämmtlichen Medien, wenn auch in ungleichen Concentrationen verteilt würde. Bei neuer Zufuhr werden schliesslich alle Medien gleichzeitig mit P gesättigt sein. Die kleinste neue Zufuhr verursacht, dass das neue P ein neues Medium, das P-Medium bildet, welches sich seinerseits mit den Stoffen $A \ldots N$ sättigt. Dass die Sättigung mit P in allen Medien gleichzeitig erfolgen muss, ist leicht einzusehen. Würde beispielsweise zuerst nur das N-Medium mit P gesättigt, das M-Medium aber nicht, dann würde eine Zufuhr von weiterem P nach M_n die Bildung eines neuen Mediums M_p mit sich bringen. Dieses könnte aber in der Nachbarschaft des ungesättigten M-Mediums nicht bestehen, und das M-Medium würde das eben angeführte P sofort absorbiren. Es muss aber in M und N nothwendig der Sättigungspunkt stets gleichzeitig erreicht werden.

Aus all diesen öden Folgerungen ersehen wir folgende Sätze, welche zum Verständnis der Vieldeutigkeit der zu entwickelnden Formeln notwendig sind:

Wenn man n Flüssigkeiten in bestimmten Mengen mischt, dann kann man je nach Umständen eins, zwei, drei ... n Medien erhalten.

Wenn man aus den n Flüssigkeiten beispielsweise drei Medien M_a, M_b und M_c erhalten hat, dann ist M_a nur

mit B und C, M_b nur mit A und C, M_c nur mit A und B kurz jedes Medium nur mit den Trägern der andern Medien gesättigt. Keines der Medien ist auch nur mit einem der übrigen Stoffe D, E . . . N gesättigt; ihre Concentrationen liegen überall unter dem Sättigungspunkte.

Dynamische Ströme.

Nehmen wir in der x-Axe einen Flüssigkeitsfaden vom Querschnitte gleich Eins. Die Flüssigkeit sei eine gar nicht homogene Mischung der Flüssigkeiten A, B . . . N. In einem bestimmten Punkte seien die Cencentrationen derselben gleich ϱ_1, ϱ_2 . . . ϱ_n, wobei gilt

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_n = 1. \qquad (4$$

Ein Molekül μ_n der Flüssigkeit N wird beispielsweise durch die Flüssigkeit B stärker nach rechts, als nach links gezogen, wenn die Concentration von B nach rechts zu zunimmt, und zwar ist diese Kraft proportional dem Differentialquotienten $\partial\varrho_2/\partial x$, aber unabhängig von der Dichte ϱ_2, wie in der citirten Abhandlung über die Mischungsschicht dargelegt ist. Wir wollen den Quotienten $\partial\varrho_2/\partial x$ kurz mit h_2 bezeichnen. So viel N-Moleküle, als eine Volumeinheit von reinem N bilden würden, sollen von B mit einer Kraft nach rechts gezogen werden, welche wir mit $h_2 nb$ bezeichnen wollen, wobei nb eine Molekularconstante ist, und zwar ein Aequivalent der Adhäsion zwischen N und B. Analog wird die Volumeinheit von N durch die Flüssigkeit C nach rechts mit einer Kraft angezogen, welche wir mit h_3 bezeichnen wollen. Die Gesammtkraft, mit der die Volumeinheit von N nach rechts gezogen wird, ist also

$$k_n = h_1 an + h_2 bn + h_3 cn + \ldots + h_n nn.$$

Nach diesem Muster können wir für alle Flüssigkeiten angeben, mit welcher Kraft in einem gewissen Punkte die Volumeinheit derselben nach rechts gezogen wird. Wir finden:

$$\begin{array}{ll} A: & k_1 = h_1 aa + h_2 ab + h_3 ac + \ldots h_n a_n \\ B: & k_2 = h_1 ba + h_2 bb + h_3 bc + \ldots h_n b_n \\ C: & k_3 = h_1 ca + h_2 cb + \ldots \\ \ldots & \\ N: & k_n = h_1 na + h_2 nb + h_3 nc + \ldots + h_n n_n \end{array} \qquad (5$$

Dabei ist zu bemerken, dass aus der Gleichung (4) auch folgt:

$$h_1 + h_2 + h_3 + \ldots h_n = 0 \qquad (6$$

Nehmen wir nun an, dass die Volumeinheit von A um die Wegeinheit nach rechts verschoben wird, wobei also die Molekularkräfte

die Arbeit $k_1 \times 1 = k_1$ leisten. Wegen der Undurchdringlichkeit der Flüssigkeiten kann diese Verschiebung nur so stattfinden, dass die Volumeinheit von A mit der Volumeinheit von Mischung den Platz tauscht. Diese enthält aber von den Stoffen $A, B \ldots N$ je die Volumina $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots \varrho_n$. Diese Volumina werden also um die Wegeinheit nach links gedrängt. Ganz dasselbe geschieht aber, wenn die Volumeinheit nicht von A, sondern von B um die Wegeinheit nach rechts verschoben wird etc. Wir wollen ein Schema dieser Verschiebungen ansetzen. Links ist angesetzt, von welcher Flüssigkeit, (nicht durch welche Flüssigkeit) die Volumeinheit primär nach rechts um die Wegeinheit verschoben wird. Das Vorzeichen bezieht sich auf die Richtung der Verschiebung.

$$
\begin{array}{l|llll}
A: & +1 & & & \\
 & -\varrho_1 & -\varrho_2 & -\varrho_3 \ldots & -\varrho_n \\
\hline
B: & & +1 & & \\
 & -\varrho_1 & -\varrho_2 & -\varrho_3 \ldots & -\varrho_n \\
\hline
C: & & & +1 & \\
 & -\varrho_1 & -\varrho_2 & -\varrho_3 \ldots & -\varrho_n \\
\hline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\hline
N: & -\varrho_1 & -\varrho_2 & -\varrho_3 \ldots & -\varrho_n
\end{array}
$$

Nun leisten bei jeder einzelnen dieser Verschiebungen die Molekularkräfte eine gewisse Arbeit. Wenn beispielweise von A das Volumen ϱ_1 nach links um die Wegeinheit verschoben wird, leisten die Molekularkräfte die Arbeit $- \varrho_1 k_1$. Wir wollen nun das ganze Schema nochmals schreiben, setzen aber an Stelle jedes Volumens die Arbeit, die durch seine Verschiebung geleistet wird. Wir erhalten

$$
\begin{array}{l|llll}
A: & +k_1 & & & \\
 & -\varrho_1 k_1 & -\varrho_2 k_2 & -\varrho_3 k_3 \ldots & -\varrho_n k_n \\
\hline
B: & & +k_2 & & \\
 & -\varrho_1 k_1 & -\varrho_2 k_2 & -\varrho_3 k_3 \ldots & -\varrho_n k_n \\
\hline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\hline
N: & & & & +k_n \\
 & -\varrho_1 k_1 & -\varrho_2 k_2 & -\varrho_3 h_3 \ldots & -\varrho_n k_n
\end{array}
$$

Wenn wir die Summe

$$\varrho_1 k_1 + \varrho_2 k_2 + \ldots + \varrho_n k_n$$

kurz mit ϱk bezeichnen, dann können wir dieses Schema kürzer schreiben:

$$\left.\begin{array}{ll} A: & k_1 - \varrho k \\ B: & k_2 - \varrho k \\ \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot \\ N: & k_n - \varrho k \end{array}\right\} \qquad (7$$

Das Volumen von A, das in der Zeiteinheit durch die Einheit des Querschnittes strömt, weil die Molekularkräfte die einzelnen Moleküle nach rechts ziehen, ist proportional erstens der Arbeit, welche bei der Verschiebung der Volumeinheit geleistet wird, zweitens der Dichte ϱ_1 von A, weil um so mehr strömt, je mehr vorhanden ist. Wenn wir mit q_1 einen Proportionalitätsfactor bezeichnen, dann können wir die Volumina, die von den einzelnen Flüssigkeiten per Zeiteinheit durch die Einheit des Querschnittes in Folge der Molekularkräfte nach rechts strömen, die primären Ströme folgendermaassen bezeichnen:

$$\left.\begin{array}{ll} A: & \varsigma_1 = q_1 \varrho_1 (k_1 - \varrho k) \\ B: & \varsigma_2 = q_2 \varrho_2 (k_2 - \varrho k) \\ C: & \varsigma_3 = q_3 \varrho_3 (k_3 - \varrho k) \\ \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot \\ N: & \varsigma_n = q_n \varrho_n (k_n - \varrho k) \end{array}\right\} \qquad (8$$

Wir werden bald die Summe

$$\varsigma = \varsigma_1 + \varsigma_2 + \cdots + \varsigma_n$$

dieser Ströme brauchen. Wir finden sofort

$$\left.\begin{array}{l} \varsigma = (q_1 \varrho_1 k_1 + q_2 \varrho_2 k_2 + \cdots + q_n \varrho_n k_n) \\ \quad - \varrho k (q_1 \varrho_1 + q_2 \varrho_2 + \cdots + q_n \varrho_n) \end{array}\right\}. \qquad (9$$

Wenn wir wieder die Summe der indicirten Glieder durch das indexlose Glied bezeichnen, dann haben wir kürzer

$$\varsigma = q \varrho k - \varrho k \cdot q \varrho \qquad (10$$

Wir haben jetzt die primären Ströme bestimmt. Wenn aber beispielsweise von A das Volumen ς_1 durch den Querschnitt 1 nach rechts strömt, dann wird wegen der Undurchdringlichkeit der Materie, wie wir schon oben bemerkt haben, das gleiche Volumen ς_1 von Mischung durch denselben Querschnitt in derselben Zeit nach links gedrängt. Dasselbe enthält aber das Volumen $\varrho_1 \varsigma_1$ von A, $\varrho_2 \varsigma_1$ von B, $\varrho_3 \varsigma_1$ von C . . . $\varrho_n \varsigma_1$ von N. Ein Gleiches gilt, wenn nicht von A, sondern von B das Volumen ς_2 nach rechts strömt etc. Wir stellen wieder das Schema all dieser primären und secundären Ströme auf. Wieder zeigt der links angesetzte Buchstabe, welcher Stoff primär strömt.

A:	$+\varsigma_1$			
	$-\varrho_1\varsigma_1$	$-\varrho_2\varsigma_1$	$-\varrho_3\varsigma_1 \ldots$	$-\varrho_n\varsigma_1$
B:		$+\varsigma_2$		
	$-\varrho_1\varsigma_2$	$-\varrho_2\varsigma_2$	$-\varrho_3\varsigma_2 \ldots$	$-\varrho_n\varsigma_2$
C:			$+\varsigma_3$	
	$-\varrho_1\varsigma_3$	$-\varrho_2\varsigma_3$	$-\varrho_3\varsigma_3 \ldots$	$-\varrho_n\varsigma_3$
. .		. . . .		
N:				$+\varsigma_n$
	$-\varrho_1\varsigma_n$	$-\varrho_2\varsigma_n$	$-\varrho_3\varsigma_n \ldots$	$-\varrho_n\varsigma_n$

Die erste verticale Columne gibt nur an, welche Volumina von A zusammengenommen strömen werden. Die zweite Columne liefert den Gesammtstrom von B etc. Der Gesammtstrom von A ist also

$$+\varsigma_1 - \varrho_1\varsigma_1 - \varrho_1\varsigma_2 \ldots - \varrho_1\varsigma_n$$

oder

$$\varsigma_1 - \varrho_1(\varsigma_1 + \varsigma_2 + \varsigma_3 + \ldots + \varsigma_n)$$

oder

$$s_1 = \varsigma_1 - \varrho_1\varsigma.$$

Demgemäss erhalten wir als Gesammtströme der einzelnen Stoffe:

$$\begin{aligned}
A:&\quad s_1 = \varsigma_1 - \varrho_1\varsigma \\
B:&\quad s_2 = \varsigma_2 - \varrho_2\varsigma \\
C:&\quad s_3 = \varsigma_3 - \varrho_3\varsigma \\
\ldots&\quad \ldots\ldots \\
N:&\quad s_n = \varsigma_n - \varrho_n\varsigma
\end{aligned} \tag{11}$$

Diese Stromformeln sind das Ziel, auf welches wir zusteuerten; die vollen dynamischen Ströme sagen uns aber vorderhand noch gar nichts, da sie nicht entwickelt sind. Wir werden die Symbole entwickeln und nach h ordnen.

Zunächst wollen wir im Interesse der Homogenität die Formeln 8 für $\varsigma_1\varsigma_2\ldots$ so schreiben

$$\begin{aligned}
\varsigma_1 &= q_1\varrho_1(\varrho\cdot k_1 - \varrho k) \\
\varsigma_2 &= q_2\varrho_2(\varrho\cdot k_2 - \varrho k), \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

was allerdings deutlicher so geschrieben wird

$$\begin{aligned}
\varsigma_1 &= q_1\varrho_1(k_1\Sigma\varrho - \Sigma\varrho k) \\
\varsigma_2 &= q_2\varrho_2(k_2\Sigma\varrho - \Sigma\varrho k) \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

wobei $\Sigma\varrho = 1$ ist. Dann sind alle Glieder nach ϱ vom zweiten Grade. Wir wollen gleich weiter entwickeln. Wir haben, wenn wir die Factoren wegdividiren

$$\frac{\varsigma_1}{q_1\varrho_1} = \varrho_1 k_1 + \varrho_2 k_1 + \varrho_3 k_1 \ldots + \varrho_n k_1$$
$$- \varrho_1 k_1 - \varrho_2 k_2 - \varrho_3 k_3 \ldots - \varrho_n k_n$$
$$= \varrho_1 (k_1 - k_1) + \varrho_2 (k_1 - k_2) + \varrho_3 (k_1 - k_3) + \ldots + \varrho_n (k_1 - k_n)$$

Wenn wir eine Differenz, z. B. $(k_3 - k_5)$ kurz mit k_{35} bezeichnen, dann können wir analog auch schreiben, wenn wir auch $\varsigma_2 \ldots$ entwickeln:

$$\frac{\varsigma_1}{q_1\varrho_1} = \varrho_1 k_{11} + \varrho_2 k_{12} + \varrho_3 k_{13} + \ldots + \varrho_n k_{1n}$$

$$\frac{\varsigma_2}{q_2\varrho_2} = \varrho_1 k_{2n} + \varrho_2 k_2 + \varrho_3 k_{23} + \ldots + \varrho_n k_{2n} \qquad (12$$

$$\frac{\varsigma_n}{q_n\varrho_n} = \varrho_1 k_{n1} + \varrho_2 k_{n2} + \varrho_3 k_{n3} + \ldots + \varrho_n k_{nn}$$

Hierbei sind natürlich die Factoren k_{11}, k_{22}, k_{33} alle gleich Null. Wir wollen unsere Stromgleichungen nach den Differentialquotienten $h_1, h_2, \ldots h_n$ ordnen. Zu diesem Zweche ordnen wir zunächst die Differenzen k_{11}, k_{12}, $k_{13} \ldots$ nach h. Nehmen wir z. B. $k_{23} = k_{12} - k_{13}$. Aus den Werthen für k_2 und k_3 in (5) finden wir

$$k_{23} = h_1 (ab - ac) + h_2 (bb - bc) + h_3 (cb - cc) + \ldots + h_n (nb - nc).$$

Die Differenzen können wir durch leicht verständliche Symbole ausdrücken, da immer ein Buchstabe mit b und c, d. h. den zweiten und dritten Buchstaben combinirt ist. Wir schreiben

$$k_{23} = h_1 a_{23} + h_2 b_{23} + h_3 c_{23} + \ldots + h_n n_{23}.$$

Nach Analogie können wir nun auch die Werthe von $\varsigma_1 \varsigma_2 \ldots$ nach h ordnen. Wir haben beispielsweise

$$\frac{\varsigma_2}{q_2\varrho_2} = \varrho_1 (h_1 a_{21} + h_2 b_{21} + h_3 c_{21} + \ldots + h_n n_{21})$$
$$+ \varrho_2 (h_1 a_{22} + h_2 b_{22} + h_3 c_{22} + \ldots + \varrho_n n_{22})$$
$$+ \varrho_3 (h_1 a_{23} + h_2 b_{23} + h_3 c_{23} + \ldots + h_n n_{23})$$
$$\ldots\ldots$$
$$+ \varrho_n (h_1 a_{2n} + h_2 b_{2n} + h_3 c_{2n} + \ldots + h_2 n_{2n})$$

wobei jeder Buchstabe mit zwei gleichen Index gleich Null ist, da beispielsweise $c_{22} = cb - cb$ ist. Nach h geordnet ist das

$$\frac{\varsigma_2}{q_2\varrho_2} = h_1 (\varrho_1 a_{21} + \varrho_2 a_{22} + \varrho_3 a_{23} + \ldots + \varrho_n a_{2n})$$
$$+ h_2 (\varrho_1 b_{21} + \varrho_2 b_{22} + \varrho_3 b_{23} + \ldots + \varrho_n b_{2n})$$
$$+ h_3 (\varrho_1 c_{21} + \varrho_2 c_{22} + \varrho_3 c_{23} + \ldots + \varrho_n c_{2n})$$
$$\ldots\ldots$$
$$+ h_n (\varrho_1 n_{21} + \varrho_2 n_{22} + \varrho_3 n_{23} + \ldots + \varrho_n n_{2n})$$

oder kürzer

$$\frac{\varsigma_2}{q_2 \varrho_2} = h_1 \Sigma_x \varrho_x a_{2x} + h_2 \Sigma_x \varrho_x b_{2x} + h_3' \Sigma_x \varrho_x c_{2x} + \ldots + h_n \Sigma_x \varrho_x n_{2x}$$

wobei die Summen von $x = 1$ bis $x = n$ zu nehmen sind. Allgemein gilt aber

$$\varsigma_s = q_s \varrho_s (h_1 \Sigma_x \varrho_x a_{sx} + h_2 \Sigma_x \varrho_x b_{sx} + h_3 \Sigma_x \varrho_x c_{sx} + \ldots + h_n \Sigma_x \varrho_x n_{sx}) \quad (13$$

Für die Summe $\varsigma = \varsigma_1 + \varsigma_2 + \ldots + \varsigma_n$ resultirt darum der nach h geordnete Ausdruck.

$$\begin{aligned} \varsigma = h_1 & \sum_{s=1}^{s=n} \left[q_s \varrho_s \sum_{x=1}^{x=n} \varrho_x a_{sx} \right] \\ + h_2 & \sum_{s=1}^{s=n} \left[q_s \varrho_s \sum_{x=1}^{x=n} \varrho_x b_{sx} \right] \\ + h_3 & \sum_{s=1}^{s=n} \left[q_s \varrho_s \sum_{x=1}^{x=n} \varrho_x c_{sx} \right] \\ + & \ldots \\ + h_n & \sum_{s=1}^{s=n} \left[q_s c_s \sum_{x=1}^{x=n} \varrho_x n_{sx} \right] \end{aligned} \quad (14$$

Wir gehen nun auf die Zusammenstellung der Ströme $s_1\, s_2 \ldots$ (11) über. Der allgemeine Ausdruck eines solchen dynamischen Stromes ist

$$s_s = \varsigma_s - \varrho_s \sum_{x=1}^{=n} \varsigma_x \quad (15$$

Zuerst eine kleine Bemerkung über die Summe $\Sigma \varsigma_x$, die wir früher einfach mit ς bezeichnet haben. Wir haben früher für ς den Werth gefunden (10):

$$\begin{aligned} \varsigma &= q \varrho k - \varrho k \cdot q \varrho \\ &= \sum_{x=1}^{x=n} q^x \varrho_x k_x - \sum_{x=1}^{x=n} \varrho_x k_x \sum_{x=1}^{x=n} q_x \varrho_x. \end{aligned} \quad (16$$

Wenn in einem speziellen Falle alle q gleich sind, d. h.

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n,$$

dann ist $q\varrho$ gleich

$$q_1 (\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_n),$$

oder weil der Klammerausdruck gleich Eins ist, ist auch $q\varrho = q_1$. Dann haben wir einfacher

$$\begin{aligned} \varsigma &= q_1 \varrho k - q_1 \varrho k \\ &= q_1 (\varrho k - \varrho k) \\ &= o \end{aligned}$$

Die Summe ς der primären Ströme ist dann aber für

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n$$

gleich Null. Die effectiven dynamischen Ströme sind dann aber gleich den primären Strömen, d. h.

$$s_x = \varsigma_x \tag{16'}$$

Dieses Verschwinden von $\varrho_x \Sigma \varsigma_x$ bei $q_1 = q_2 \ldots = q$ ist für die Rechnung ein grosser Vortheil, da alle Glieder von

$$\varrho_x \Sigma \varsigma_x$$

nach ϱ vom dritten Grade sind. Die primären Ströme (13) aber sind nach ϱ vom zweiten Grade.

Nun wollen wir auch den Ausdruck (15) für den dynamischen Strom s_y, d. i. für das Volumen der Flüssigkeit Y, das in Folge des Zusammenspieles der Molekularkräfte, der primären und secundären Ströme per Zeiteinheit durch die Einheit des Querschnittes strömt, nach h ordnen. Wir haben (15)

$$s_y = \varsigma_y - \varrho_y \Sigma_x \varsigma_x \tag{17}$$

Hierin ist aber (13) und (14)

$$\varsigma_y = h_1 q_y \varrho_y \Sigma_x \varrho_x a_{yx} + h_2 q_y \varrho_y \Sigma_x \varrho_x b_{yx} + \ldots \tag{18}$$

$$\Sigma_x \varsigma_x = h_1 \Sigma_x [q_x \varrho_x \Sigma_z \varrho_z a_{xz}] + h_2 \Sigma_x [q_x \varrho_x \Sigma_z \varrho_z b_{xz}] + \ldots \tag{19}$$

Da die Summen nach x sowohl als nach z von 1 bis n zu nehmen sind, so können wir die beiden Ausdrücke auch so symbolisiren

$$\varsigma_y = h_1 q_y \varrho_y \varphi(a) + h_2 q_y \varrho_y \varphi(b) + h_3 q_y c_y \varphi(c) + \ldots$$

$$\Sigma_x \varsigma_x = h_1 f(a) + h_2 f(b) + h_3 f(c) + \ldots$$

so dass wir für den Strom s_y der Flüssigkeit Y erhalten

$$s_y = h_1 \varrho_y [q_y \varphi(a) - f(a)] + h_2 \varrho_y [q_y \varphi(b) - f(b)] + \ldots \tag{20}$$

oder wenn wir ϱ_y hinüberschaffen

$$\frac{s_y}{\varrho_y} = h_1 [q_y \varphi(a) - f(a)] + h_2 [q_y \varphi(b) - f(b)] + \ldots \tag{21}$$

Wenn wir die Functionen $\varphi(a)$, $f(a)$ etc. den Formeln 18 und 19 entnehmen und die Summen entwickeln, dann erhalten wir sehr lange Formeln. Wir nehmen daher Umgang hiervon, umsomehr, als sich zeigen wird, dass in concreten Fällen sich manche Abkürzung ergibt, die geltend zu machen hier nicht am Platze wäre. Die Formeln der primären dynamischen Ströme, $\varsigma_1\ \varsigma_2\ \varsigma_3$ für eine Mischung von drei Flüssigkeiten finden sich im Kapitel über die Hauptgleichung im Beispiele von drei Flüssigkeiten entwickelt. Die Formeln der vollen dynamischen Ströme sind ungleich complicirter.

Diffusionsströme.

Die Ströme, die durch Diffusion erregt werden, müssen wir etwas anders behandeln, als üblich ist. Wenn wir nämlich einfach sagen, dass der Diffusionsstrom, d. h. das Volumen einer Flüssigkeit, das in der Zeiteinheit durch die Einheit des Querschnittes diffundirt, dem Gefälle der Flüssigkeitsconcentration proportional ist, dann müssen wir die Ströme setzen gleich

$$t_1 = -p_1 h_1 \quad t_2 = -p_2 h_2 \quad t_3 = -p_3 h_3 \ldots$$

Wenn wir dann die Summe aller Diffusionsströme nehmen, erhalten wir im Allgemeinen nicht Null, d. h. wir finden, dass nach der einen Richtung mehr Flüssigkeit strömt, als nach der andern, was doch nicht möglich ist. Darum rechnen wir wie bei den dynamischen Strömen mit primären und secundären Verschiebungen.

Der primäre Diffusionsstrom von A sei allerdings

$$t = -p_1 h_1$$

also nach links gerichtet. Da aber die Flüssigkeit undurchdringlich ist, wird hierdurch ein gleiches Volumen der Mischung nach rechts gedrängt, welches von $A, B \ldots N$ die Volumina

$$\varrho_1 p_1 h_1, \varrho_2 p_1 h_1, \varrho_3 p_1 h_1 \ldots$$

enthält. Wir können somit abermals wie bei den dynamischen Strömen ein Schema der primären und der secundären Ströme aufstellen.

Es lautet:

A:	$-p_1 h_1$			
	$+\varrho_1 p_1 h_1$	$+\varrho_2 p_1 h_1$	$+\varrho_3 p_1 h_1 \ldots$	$+\varrho_n p_1 h_1$
B:		$-p_2 h_2$		
	$+\varrho_1 p_2 h_2$	$+\varrho_2 p_2 h_2$	$+c_3 p_2 h_2 \ldots$	$+\varrho_n p_2 h_2$
	. . . . . .			
N:				$-p_n h_n$
	$+\varrho_1 p_n h_n$	$+\varrho_2 p_n h_n$	$+\varrho_3 p_n h_n \ldots$	$+\varrho_n p_n h_n$

Die erste Columne enthält die Theilströme von A, die zweite diejenigen von B etc. Wir erhalten daher als volle Diffusionströme

$$\tau_1 = -p_1 h_1 + \varrho_1 (p_1 h_1 + p_2 h_2 + \ldots + p_n h_n)$$
$$\tau_2 = -p_2 h_2 + \varrho_2 (p_1 h_1 + p_2 h_2 + \ldots + p_n h_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

wofür wir kürzer symbolisiren

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \varrho_1 \Sigma p h - \varrho \cdot p_1 h_1 \\ \tau_2 &= \varrho_2 \Sigma p h - \varrho \cdot p_2 h_2 \\ &\cdots\cdots \\ \tau_n &= \varrho_n \Sigma p h = \varrho \cdot p_n h_n \end{aligned} \tag{22}$$

Wenn wir zur Probe die Summe dieser Diffusionsströme nehmen, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_1 + \tau_2 + \cdot + \tau_n \\ &= (\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n) \Sigma p h - \varrho (p_1 h_1 + p_2 h_2 + \cdots + p_n h_n) \\ &= \Sigma p h - \Sigma p h \\ &= o \end{aligned}$$

wie es auch sein soll.

Wenn wir die Ströme $\tau_1 \tau_2 \ldots$ nach h ordnen wollen dann schreiben wir beispielsweise

$$\begin{aligned} \tau_s = \varrho_s p_1 h_1 + \varrho_s p_2 h_2 + \varrho_s p_3 h_3 + \ldots \\ - p_s h_s \end{aligned} \tag{23}$$

Die Diffusionsströme sind also nach ϱ nur vom ersten Grade.

Für $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ wird einfacher $\tau_s = - p_1 h_s$ (24

Effectiver Strom. Gleichgewicht.

Der effective Strom σ_y der Flüssigkeit Y ist die Summe ihres vollen dynamischen und ihres Diffusionsstromes, d. h. $\sigma_y = s_y + \tau_y$. Durch Combination der Formeln 21 und 23 finden wir leicht

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{\varrho_y} &= h_1 [q_y \varphi(a) - f(a) + p_1] \\ &+ h_2 [q_y \varphi(b) - f(b) + p_2] \\ &+ h_3 [q_y \varphi(c) - f(c) + p_3] \\ &+ \ldots . - h_y \frac{p_y}{\varrho_y} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Wir wollen nun nur drei Flüssigkeiten A, B, C annehmen und den effectiven Strom nur der ersten Flüssigkeit A berechnen, und auch hiervon nur das erste Glied mit h_1. Wir finden den complicirten Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\varrho_1} = & \; q_1 (\varrho_1 a_{11} + \varrho_2 a_{12} + \varrho_3 a_{13}) \\ & - q_1 \varrho_1 (\varrho_1 a_{11} + \varrho_2 a_{12} + \varrho_3 a_{13}) \\ & - q_2 \varrho_2 (\varrho_1 a_{21} + \varrho_2 a_{22} + \varrho_3 a_{23}) \\ & - q_3 \varrho_3 (\varrho_1 a_{31} + \varrho_2 a_{32} + \varrho_3 a_{33}) \\ & + p_1 \end{aligned}\right\} h_1 \tag{26}$$

Wenn wir zur Vereinfachung $q_1 = q_2 = \ldots = q$ und $p_1 = p_2 = \ldots = p$ annehmen, dann verbleibt nach früheren Bemerkungen 16′ und 24 von jedem Coefficienten des h nur das erste Glied, und dann können wir die Stromgleichung für alle drei Flüssigkeiten aufschreiben.

Wir finden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sigma_1}{\varrho_1 q_1} &= h_1 (\varrho_1 a_{11} + \varrho_2 a_{12} + \varrho_3 a_{13}) \\
&\quad + h_2 (\varrho_1 b_{11} + \varrho_2 b_{12} + \varrho_3 b_{13}) - h_1 \frac{p_1}{\varrho_1 q} \\
&\quad + h_3 (\varrho_1 c_{11} + \varrho_2 c_{12} + \varrho_3 c_{13}) \\
\frac{\sigma_2}{\varrho_2 q} &= h_1 (\varrho_1 a_{21} \varrho_2 a_{22} + \varrho_3 a_{23}) \\
&\quad + h_2 (\varrho_1 b_{21} + \varrho_2 b_{22} + \varrho_3 b_{23}) - h_2 \frac{p}{\varrho_2 q} \\
&\quad + h_3 (\varrho_1 c_{21} + \varrho_2 c_{22} + \varrho_3 c_{23}) \\
\frac{\sigma_3}{\varrho_3 q} &= h_1 (\varrho_1 a_{31} + \varrho_2 a_{32} + \varrho_3 a_{33}) \\
&\quad + h_2 (\varrho_1 b_{31} + \varrho_2 b_{32} + \varrho_3 b_{33}) - h_3 \frac{p}{\varrho_3 q} \\
&\quad + h_3 (\varrho_1 c_{31} + \varrho_2 c_{32} + \varrho_3 c_{33})
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Hierbei ist, wie schon erwähnt worden

$$a_{11} = (aa - aa) \qquad a_{12} = (aa - ab) \qquad a_{23} = (ab - ac) \quad \text{etc.}$$

Hieraus ist es klar, dass $a_{11} = o$ ist, und dass jedes Symbol gleich Null ist, das zwei gleiche Index trägt.

In einem bestimmten Punkte der Flüssigkeit herrscht Gleichgewicht, wenn keine Flüssigkeit dort strömt, d. h. wenn gilt

$$\sigma_1 = o \qquad \sigma_2 = o \qquad \sigma_3 = o \ldots \sigma_n = o \tag{27'}$$

Wir erhalten somit für eine Mischung von n Flüssigkeiten auch n Gleichgewichtsgleichungen, deren allgemeiner Ausdruck ist.

$$\left.\begin{aligned}
h_\nu p_\nu = h_1 \varrho_\nu [q_\nu \varphi(a) - f(a) + p_1] \\
+ h_2 \varrho_\nu [q_\nu \varphi(b) - f(b) + p_2] \\
+ h_3 \varrho_\nu [q_\nu \varphi(c) - f(b) + p_3] \\
+ \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Für eine Mischung von drei Flüssigkeiten erhalten wir, wenn wir annehmen

$$p_1 = p_2 + \ldots = p_1 \quad q_1 = q_2 = \ldots = q_1$$

die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{h_1 p}{\varrho_1 q} &= h_1 (\varrho_2 a_{12} + \varrho_3 a_{13}) + h_2 (\varrho_2 b_{12}) + \varrho_3 b_{13}) + h_3 (\varrho_2 c_{12} + \varrho_3 c_{13}) \\
\frac{h_2 p}{\varrho_2 q} &= h_1 (\varrho_1 a_{21} + \varrho_3 a_{23}) + h_2 (\varrho_1 b_{21} + \varrho_3 b_{23}) + h_3 (\varrho_1 c_{21} + \varrho_3 c_{23}) \\
\frac{h_3 p}{\varrho_3 q} &= h_1 (\varrho_1 a_{31} + \varrho_2 a_{32}) + h_2 (\varrho_1 b_{31} + \varrho_2 b_{32}) + h_3 (\varrho_1 c_{31} + \varrho_2 c_{32})
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Die Gleichgewichtsgleichungen gelten für einen bestimmten Punkt der Mischung. Sie sind Funktionen der Molekularconstanten der Flüssigkeiten, der Strömungsconstanten p und q, der Concentrationen $\varrho_1\, \varrho_2 \ldots$ und der Differentialquotienten $d\varrho_1/dx$ etc.

Die Hauptgleichung.

Wenn in einer Mischung von n Flüssigkeiten $A\, B \ldots N$ Gleichgewicht herrschen soll, dann muss, wie wir gefunden haben, in jedem Punkte für jede Flüssigkeit Y der dynamische Strom s_y gleich und entgegengesetzt dem Diffusionsstrom τ_y sein. Wir haben somit n Gleichungen (27')

$$-s_y = \tau_1 \quad -s_2 = \tau_2 \quad -s_3 = \tau_3 \;\ldots\ldots\; -s_n = \tau_n \qquad (30$$

Diese Gleichungen lassen sich alle in gleicher Weise nach dem Differentialquotienten

$$\partial \varrho_y / \partial x = h_y$$

ordnen, wobei ϱ_y die Concentration des Stoffes Y ist. Die Gleichungen haben dann die Form (28) (wenn h_y hinübergebracht ist).

$$\begin{aligned} o &= h_1 A_1 + h_2 A_2 + h_3 A_3 + \ldots + h_n A_n \\ o &= h_1 B_1 + h_2 B_2 + h_3 B_3 + \ldots + h_n B_n \\ &\ldots\ldots \\ o &= h_1 N + h_2 N_2 + h_3 N_3 + \ldots + h_n N_n \end{aligned} \qquad (31$$

Die Coefficienten sind dabei sämmtlich Functionen dritten Grades (bei der bewussten Beschränkung

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q$$

nur zweiten Grades) der Concentrationen.

$$\varrho_1\, \varrho_2 \ldots \varrho_n$$

der Flüssigkeiten und deren Molekularconstanten.

Von diesen n Gleichungen, deren jede besagt, dass eine gewisse Flüssigkeit im Gleichgewicht sei, fällt eine weg; denn wenn alle Flüssigkeiten bis auf eine im Gleichgewichte sind, dann ist natürlich auch die letzte im Gleichgewicht, da alle Flüssigkeitsbewegungen im Platztauschen bestehen. Von den Quotienten h fallen sogar zwei weg; der eine, weil die Bedingung besteht

$$h_1 + h_2 + \ldots h_n = o,$$

der andere aber durch Abstreichen. Wenn man die übrig bleibenden n—2 Quotienten h eliminirt, dann behält man noch eine letzte Gleichung, in welcher nur die Concentrationen und die Molecularconstanten der einzelnen Flüssigkeiten vorkommen. Dies ist die **Hauptgleichung.** In dieser kann man noch ein ϱ_x auf Grund der Gleichung

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_x + \ldots + \varrho_n = 1$$

eliminiren.

Die Hauptgleichung ist somit eine Gleichung von um so höherem Grade, je mehr Flüssigkeiten vorhanden sind. Sie hat somit viele Wurzeln. Gruppen von Wurzeln $\varrho_1', \varrho_2', \varrho_3' \ldots \varrho_n'$, deren Summe gleich 1 ist, und die alle positiv und reell sind, sind das Bild je eines möglichen Mediums, von welchem aber noch nicht gesagt ist, ob in demselben die Flüssigkeiten in stabilem oder labilem Gleichgewichte sein werden. Die Bedingungen, durch welche diese Wurzelgruppen bestimmt werden, wollen wir aber nicht untersuchen; in den zu behandelnden speciellen Fällen werden wir die vorhandenen speciellen Bedingungen in Anwendung bringen.

Die Hauptgleichung kann man in zwei Weisen verwenden. Entweder sucht man aus den gegebenen Molekularconstanten die Concentrationen der einzelnen Flüssigkeiten in den möglichen gesättigten Medien, oder man sucht umgekehrt aus den beobachteten Concentrationen in gesättigten Medien die Molekularconstanten der Flüssigkeiten zu berechnen. Natürlich ist der letztere Fall der einzige practisch wichtige. Leider sind die Formeln nach den Molekularconstanten von nahe eben so hohem Grade, wie nach den Concentrationen, so dass wir schon bei der Behandlung von nur drei Flüssigkeiten auf kaum zu bewältigende Schwierigkeiten stossen.

Wir wollen der Anschaulichkeit wegen die Hauptgleichung für zwei und für drei Flüssigkeiten entwickeln.

Im Falle von zwei Flüssigkeiten haben wir nur die zwei Gleichgewichtsgleichungen (30)

$$o = s_1 + \tau_1 \qquad o = s_2 + \tau_2 \tag{31'}$$

von denen wir nur die erste brauchen. Für s_1 haben wir (15)

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \varsigma_1 - \varrho_1 \Sigma_\alpha \varsigma_x \\ &= \varsigma_1 - \varrho_1 \varsigma_1 - \varrho_\alpha \varsigma_2 \\ &= \varsigma_1 (1 - \varrho_1) - \varrho_1 \varsigma_2 \\ &= \varrho_2 \varsigma_1 - \varrho_1 \varsigma_2 \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Für die darin enthaltenen ς_1 und ς_2 endlich finden wir (18)

$$\left.\begin{aligned} \varsigma_1 &= h_1 q_1 \varrho_1 \Sigma \varrho_x a_{1\alpha} + h_2 q_x \varrho_x \Sigma_x \varrho_\alpha b_{1x} \\ &= h_1 q_1 \varrho_1 (\varrho_1 a_{11} + \varrho_2 a_{12}) + h_2 q_1 \varrho_\alpha (\varrho_1 b_{11} + \varrho_2 b_{12}) \\ &= h_1 q_1 \varrho_1 \varrho_2 a_{12} + h_2 q_1 \varrho_x \varrho_2 b_{12} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

nachdem a_{11} und b_{11} gleich Null sind. Ferner ist wegen $h_1 + h_2 = 0$ auch $h_2 = -h_1$, und wir können fortsetzen:

$$\begin{aligned} &= h_1 q_1 \varrho_1 \varrho_2 (a_{12} - b_{12}) \\ &= h_1 q_1 \varrho_1 \varrho_2 (aa + bb - 2ab) \end{aligned}$$

Ganz analog finden wir

$$\left.\begin{aligned} \varsigma_2 &= h_1 q_2 \varrho_2 (\varrho_1 a_{21} + \varrho_2 a_{22}) + h_2 q_2 \varrho_2 (\varrho_1 b_{21} + \varrho_2 b_{22}) \\ &= h_1 q_2 \varrho_1 \varrho_2 (2ab - aa - bb) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Aus diesen Werthen 33 und 34 von ς_1 und ς_2 ergibt sich für s (32) der Werth

$$s_1 = h_1 \varrho_1 \varrho_2 (q_1 \varrho_2 + q_2 \varrho_1)(aa + bb - 2ab).$$

Dies ist der dynamische Strom. Der Diffusionsstrom ist (23)

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \varrho_1 p_1 h_1 + q_1 p_2 h_2 - p_1 h_1 \\ &= \varrho_1 p_1 h_1 - \varrho_1 p_2 h_1 - p_1 h_1 \\ &= - \varrho_1 p_2 h_1 - (1 - \varrho_1) p_1 h_1 \\ &= - h_1 (\varrho_1 p_2 + \varrho_2 p_1) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Wenn wir nun ansetzen $s_1 = -\tau_1$ (31), dann fällt h_1 von selber weg, und wir erhalten die **Hauptgleichung für zwei Flüssigkeiten:**

$$p_1 \varrho_2 + p_2 \varrho_1 = q_1 \varrho_2 (q_1 \varrho_2 + q_2 \varrho_1)(aa + bb - 2ab). \tag{36}$$

Für $p_1 = p_2$ und $q_1 = q_2$ geht die Formel über in

$$p_1 = q_1 \varrho_1 \varrho_2 (aa + bb - 2ab). \tag{37}$$

Der Ausdruck $aa + bb - 2ab$ kann auch so geschrieben werden

$$(aa - ab) - (ba - bb) \text{ oder } a_{12} - b_{12}$$

in welcher Form ihm das im nächsten Beispiel zu erläuternde Symbol

$$(aa + bb - 2ab) = ab \cdot ab$$

entspricht.

Für drei Flüssigkeiten finden wir die Hauptgleichung in folgender Weise. Wir haben zunächst die drei Gleichgewichtsgleichungen

$$o = s_1 + \tau_1 \qquad o = s_2 + \tau_2 \qquad o = s_3 + \tau_3, \tag{38}$$

wovon wir nur die beiden ersten brauchen. Wir haben ferner (15)

$$s_1 = \varsigma_1 - \varrho_1 (\varsigma_1 + \varsigma_2 + \varsigma_3) \qquad s_2 = \varsigma_2 - \varrho_2 (\varsigma_1 + \varsigma_2 + \varsigma_3).$$

Für die hierin enthaltenen Grössen ς_1, ς_2 und ς_3 finden wir (13)

$$\left.\begin{aligned} \varsigma_1 &= h_1 (\varrho_2 a_{12} + \varrho_3 a_{13}) q_1 \varrho_1 & \varsigma_2 &= h_1 (\varrho_1 a_{21} + \varrho_3 a_{23}) q_2 \varrho_2 \\ &+ h_2 (\varrho_2 b_{12} + \varrho_3 b_{13}) q_1 \varrho_1 & & h_2 (\varrho_1 b_{21} + \varrho_3 b_{23}) q_2 \varrho_2 \\ &+ h_3 (\varrho_2 c_{12} + \varrho_3 c_{13}) q_1 \varrho_1 & & h_3 (\varrho_1 c_{21} + \varrho_3 c_{23}) q_2 \varrho_2 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \varsigma_3 = {} & h_1 (\varrho_1 a_{31} + \varrho_2 a_{32}) q_3 \varrho_3 \\ & + h_2 (\varrho_1 b_{31} + \varrho_2 b_{32}) q_3 \varrho_3 \\ & + h_3 (\varrho_1 c_{31} + \varrho_2 c_{32}) q_3 \varrho_3. \end{aligned}$$

Ehe wir diese Gleichungen einsetzen, wollen wir h_3 eliminiren, indem wir h_3 durch $-(h_1 + h_2)$ ersetzen. Wenn wir dann noch h_1 und h_2 ordnen, dann erhalten wir Binome, wie beispielsweise $b_{23} - c_{23}$. Die Bedeutung dieses Binomes ist

$$b_{23} - c_{23} = (bb - bc) - (cb - cc).$$

Wir könnten dieses Binom durch $(bc)_{23}$ ersetzen. Wir wählen aber den einfacheren Ausdruck $bc.\, bc$. Analog würde der Ausdruck $ab.\, cd$. die Bedeutung haben

$$ab \cdot cd = a_{34} - b_{34}$$
$$= ac - ad - bc + bd$$

Wir finden leicht die Identität folgender Ausdrücke

$$ab \cdot cd = -ab \cdot dc = -ba \cdot cd = ba \cdot dc = cd \cdot ab = dc \cdot ba = \ldots$$

Wenn wir diese Symbole einführen, dann erhalten wir die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \varsigma_1 &= h_1 q_1 \varrho_1 (\varrho_3 \, ac \cdot ab + \varrho_3 \, ac \cdot ac) + h_2 q_1 \varrho_1 (\varrho_2 \, bc \cdot ab + \varrho_3 \, bc \cdot ac) \\ \varsigma_2 &= h_1 q_2 \varrho_2 (\varrho_3 \, ac \cdot bc + \varrho_1 \, ac \cdot ba) + h_2 q_2 \varrho_2 (\varrho_3 \, bc \cdot bc + \varrho_1 \, bc \cdot ba) \\ \varsigma_3 &= h_1 q_3 \varrho_3 (\varrho_1 \, ac \cdot ca + \varrho_2 \, ac \cdot cb) + h_2 q_3 \varrho_3 (\varrho_1 \, bc \cdot ca + \varrho_2 \, bc \cdot cb) \end{aligned}\right\} \quad (40$$

Ein Symbol *ab. cd* hat übrigens auch eine ganz concrete dynamische Bedeutung. Wenn nämlich in einer Flüssigkeit C (von der Conc. = 1) sich Flüssigkeit A (Conc. = 1) befindet, und in der Flüssigkeit D (Conc. = 1) ist Flüssigkeit B (Conc. = 1), und die Volumeinheit von A tauscht mit der Volumeinheit von B den Platz, dann leisten die Molekularkräfte obige Arbeit *ab. cd*.

Wir können in unseren Gleichungen für ς_1, ς_2 und ς_3 auch ϱ_3 eliminiren, indem wir es durch $1 - \varrho_1 - \varrho_2$ ersetzen. Wir thun das besser jetzt, als später. Wenn wir die Relation vor Augen halten

$$ax \cdot cd - ay \cdot cd = -xy \cdot cd$$

dann finden wir

$$\left.\begin{aligned} \varsigma_1 &= h_1 q_1 \varrho_1 (ac \cdot ac - \varrho_1 \, ac \cdot ac - \varrho_2 \, ac \cdot bc) \\ &\quad + h_2 q_1 \varrho_1 (bc \cdot ac - \varrho_1 \, bc \cdot ac - \varrho_2 \, bc \cdot bc) \\ \varsigma_2 &= h_1 q_2 \varrho_2 (ac \cdot bc - \varrho_1 \, ac \cdot ac - \varrho_2 \, ac \cdot bc) \\ &\quad + h_2 q_2 \varrho_2 (bc \cdot bc - \varrho_1 \, bc \cdot ac - \varrho_2 \, bc \cdot bc) \\ \varsigma_3 &= h_1 q_3 \varrho_3 (\quad o \quad - \varrho_1 \, ac \cdot ac - \varrho_2 \, ac \cdot bc) \\ &\quad + h_2 q_3 \varrho_3 (\quad o \quad - \varrho_1 \, bc \cdot ac - \varrho_2 \, bc \cdot bc) \end{aligned}\right\} \quad (41$$

Wenn wir hieraus

$$\Sigma \varsigma = \varsigma_1 + \varsigma_2 + \varsigma_3 = \varsigma$$

berechnen, gewinnen wir einen unerwartet einfachen Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} \varsigma &= h_1 [q_1 \varrho_1 \, ac \cdot ac + q_2 \varrho_2 \, ac \cdot bc - \varrho_1 \, ac \cdot ac \, \Sigma q \varrho - \varrho_2 \, ac \cdot bc \, \Sigma q \varrho] \\ &\quad + h_2 [q_1 \varrho_1 \, bc \cdot ac + q_2 \varrho_2 \, bc \cdot bc - \varrho_1 \, bc \cdot ac \, \Sigma q \varrho - \varrho_2 \, bc \cdot bc \, \Sigma q \varrho] \end{aligned}\right\} \quad (42$$

Für $q_1 = q_2 = q_3 = q$ wird

$$\Sigma q \varrho = q (\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3) = q$$

und ς wird gleich Null, wie es sein soll. In $\Sigma q \varrho$ steckt ein ϱ_3. Dieses verschwindet durch folgende Umschreibung

$$\begin{aligned} \Sigma q \varrho &= q_1 \varrho_1 + q_2 \varrho_2 + q_3 \varrho_3 \\ &= q_1 \varrho_1 + q_2 \varrho_2 - q_3 (1 - \varrho_1 - \varrho_2) \\ &= \varrho_1 (q_1 - q_3) + \varrho_2 (q_2 - q_3) - q_3 \end{aligned} \quad (43$$

Behufs Entwicklung der Hauptgleichung für drei Flüssigkeiten brauchen wir noch die zwei ersten Formeln für die Diffusionsströme. Wir haben (23)

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= h_1\,\varrho_1\,p_1 + h_2\,\varrho_1\,p_2 + h_3\,\varrho_1\,p_3 - h_1\,p_1 \\ \tau_1 &= h_1\,\varrho_2\,p_1 + h_2\,\varrho_2\,p_2 + h_3\,\varrho_2\,p_3 - h_2\,p_2 \end{aligned}\right\} \qquad (44$$

oder wenn wir $h_3 = -(h_1 + h_2)$ einsetzen:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= h_1\,(\varrho_1\,p_1 - \varrho_1\,p_3 - p_1) + h_2\,\varrho_1\,(p_2 - p_3) \\ \tau_2 &= h_1\,(\varrho_2\,p_1 - \varrho_2\,p_3) + h_2\,(\varrho_2\,p_2 - \varrho_2\,p_3 - p_2 \end{aligned}\right\} \qquad (45$$

Die Formeln, die wir brauchen werden, lassen sich kurz symbolisiren

$$\begin{aligned} \varsigma_1 &= h_1\,A_1 + h_2\,A_2 \\ \varsigma_2 &= h_1\,B_1 + h_2\,B_2 \\ \varsigma_3 &= h_1\,C_1 + h_2\,C_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tau_1 &= h_1\,D_1 + h_2\,D_2 \\ \tau_2 &= h_1\,E_1 + h_2\,E_2 \end{aligned}$$

Die beiden Gleichgewichtsgleichungen, aus denen sich die Hauptgleichung durch Elimination von h_1 und h_2 ergeben soll, sind (38)

$$\begin{aligned} o &= s_1 + \tau_1 \\ &= \varsigma_1 - \varrho_1\,\varsigma + \tau_1 \\ &= h_1\,(A_1 - \varrho_1\,C_1 + D_1) + h_2\,(A_2 - \varrho_1\,C_2 + D_2) \end{aligned}$$

und die andere

$$\begin{aligned} o &= s_2 + \tau_2 \\ &= \varsigma_2 - \varrho_2\,\varsigma + \tau_2 \\ &= h_1\,(B_1 - \varrho_2\,C_1 + E_1) + h_2\,(B_2 - \varrho_2\,C_2 + E_2). \end{aligned}$$

Die Hauptgleichung ist aber für eine Mischung von drei Flüssigkeiten, indem wir h_1 und h_2 eliminiren:

$$(A_1 - \varrho_1 C_1 + D_1)\,(B_2 - \varrho_2 C_2 + E_2) = (A_2 - \varrho_1 C_2 + D_2)\,(B_1 - \varrho_2 C_1 + E_1) \qquad (46$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} A_1 &= q_1\,\varrho_1\,(ac \cdot ac - \varrho_1\,ac \cdot ac - \varrho_2\,ac \cdot bc) \\ A_2 &= q_1\,\varrho_1\,(bc \cdot ac - \varrho_1\,bc \cdot ac - \varrho_2\,bc \cdot bc) \\ B_1 &= q_2\,\varrho_2\,(ac \cdot bc - \varrho_1\,ac \cdot ac - \varrho_2\,ac \cdot bc) \\ B_2 &= q_2\,\varrho_2\,(bc \cdot bc - \varrho_1\,bc \cdot ac - \varrho_2\,bc \cdot bc) \\ C_1 &= q_1\,\varrho_1\,ac \cdot ac + q_2\,\varrho_2\,ac \cdot bc - \varrho_1\,ac \cdot ac\,\Sigma\,q\,\varrho - \varrho_2\,ac \cdot bc\,\Sigma\,q\,\varrho \\ C_2 &= q_1\,\varrho_1\,bc \cdot ac + q_2\,\varrho_2\,bc \cdot bc - \varrho_1\,bc \cdot ac\,\Sigma\,q\,\varrho - \varrho_2\,bc \cdot bc\,\Sigma\,q\,\varrho \\ D_1 &= \varrho_1\,(p_1 - \varrho_3) - p_1 \\ D_2 &= \varrho_1\,(p_2 - p_3) \\ E_1 &= \varrho_2\,(p_1 - p_3) \\ E_2 &= \varrho_2\,(p_2 - p_3) = p_2 \end{aligned}$$

Diese überaus complicirte Formel wird etwas einfacher, wenn wir setzen

$$p_1 = p_2 = p_3 = p, \qquad q_1 = q_2 = q_3 = q,$$

denn dann wird, wie wir wiederholt gesehen haben,

$$\varsigma_1 + \varsigma_2 + \varsigma_3 = o$$

und die Diffusionsströme reduciren sich auf

$$\tau_1 = -h_1 p, \qquad \tau_2 = -h_2 p.$$

Wir haben also in der Hauptgleichung zu setzen

$$\begin{array}{lll} C_1 = o & D_1 = -p & E_1 = o \\ C_2 = o & D_2 = o & E_2 = -p \end{array}$$

Die Hauptgleichung wird dann

$$(A_1 - p)(B_2 - p) = A_2 B_1 \tag{47}$$

Wir sehen, dass die Hauptgleichung uns keinen Aufschluss über die absolute Grösse der Molekularconstanten geben kann, nachdem in ihr ausschliesslich Differenzen von Differenzen der Molecularconstanten vorkommen.

Die Hauptgleichung 46 bezieht sich auf die Thompson'schen ternären Legirungen. ϱ_1 und ϱ_2 können die Concentrationen von Blei und Zink bedeuten, p_1, p_2 und p_3 die Diffusionsconstanten von Blei, Zink und Zinn, q_1, q_2 und q_3 die dynamischen Stromconstanten der drei Metalle.

Wenn wir annehmen dürften $p_1 = p_2 = p_3$ und $q_1 = q_2 = q_3$, dann bezöge sich auf die Thompson'schen Legirungen die Hauptgleichung 47. Beide Gleichungen liefern auf Grund der beobachteten Concentrationen Differenzen von Molekularconstanten.

All die bisherigen Entwicklungen geben uns gar keinen Aufschluss über das Zustandekommen über den Prozess der Scheidung. Das folgende Beispiel der zwei Flüssigkeiten soll deren Prozess klar veranschaulichen.

Zwei Flüssigkeiten.

Wir wenden die Formeln zunächst auf den einfachsten Fall an: auf den Fall von nur zwei Flüssigkeiten A und B.

Vor Allem haben wir dann nur eine Gleichgewichtsbedingung (27') zu berechnen, da die zweite Flüssigkeit natürlich auch im Gleichgewichte ist, wenn die erste es ist.

Sodann haben wir zwischen den beiden vorkommenden Steigerungen h_1 und h_2 wegen $h_1 + h_2 = o$ die einfache Beziehung $h_2 = -h_1$.

Wir setzen also in die Gleichung (25) für σ_y nunmehr $y = 1$, $h_2 = -h$ und erhalten, wenn wir $\varphi_1(a) = \varrho_1 q_1 \varphi(a)$ setzen

$$\sigma_1 = h_1 [\varphi_1(a) - \varrho_1 f(a) + p_1 \varrho_1] - h_1 [\varphi_1(b) - \varrho_1 f(b) + p_2 \varrho_1] - h_1 p_1.$$

Für $\varphi_1(a)$ und $\varphi_1(b)$ erhalten wir mittels (18) die Ausdrücke

$$\varphi_1(a) = q_1 \varrho_1 \Sigma_x \varrho_x a_{1x} \qquad \varphi_1(b) = q_1 \varrho_1 \Sigma_x \varrho_x b_{1x}$$
$$= q_1 \varrho_1 (\varrho_1 a_{11} + \varrho_2 a_{12}) \qquad = q_1 \varrho_1 (\varrho_1 b_{11} + \varrho_2 b_{12})$$
$$= q_1 \varrho_1 \varrho_2 (aa - ab) \qquad = q_1 \varrho_1 \varrho_2 (ba - bb),$$

da a_{11} und b_{11} gleich Null sind. Für $f(a)$ erhalten wir mittels (19)

$$f(a) = q_1 \varrho_1 \Sigma_x \varrho_x a_{1x} + q_2 \varrho_2 \Sigma_x \varrho_x a_{2x}$$
$$= q_1 \varrho_1 (\varrho_1 a_{11} + \varrho_2 a_{12}) + q_2 \varrho_2 (\varrho_1 a_{21} + \varrho_2 a_{22})$$
$$= q_1 \varrho_1 \varrho_2 (aa - ab) + q_2 \varrho_1 \varrho_2 (ab - aa)$$
$$= \varrho_1 \varrho_2 (aa - ab)(q_1 - q_2),$$

Analog erhalten wir

$$f(b) = \varrho_1 \varrho_2 (ba - bb)(q_1 - q_2).$$

Wenn wir der Einfachheit wegen annehmen, dass beide Flüssigkeiten gleich grosse und gleich schwere Moleküle haben, dann können wir annehmen

$$q_1 = q_2 = q, \qquad p_1 = p_2 = p.$$

Es verschwinden dann nach Einsetzung aller Werthe mehrere Glieder, und wir erhalten die Stromgleichung

$$\sigma_1 = h_1 [q \varrho_1 \varrho_2 (aa + bb - 2ab) - p] \tag{48}$$

Diese Gleichung wollen wir nun discutiren, ehe wir $\sigma_1 = o$ setzen. Der Flüssigkeitsfaden reiche von $x = x_1 = o$ bis $x = x_5$. Bei x_0 sei die Concentration ϱ_1 von A noch $= o$, also die von $B = 1$. Die Concentration von A soll aber bis x_5 stetig bis $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = o$ zunehmen, so dass die Curve der Concentration von A eine gerade Linie, also

$$h_1 = h = \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}$$

eine constante Grösse ist. Die Strömungsformel besagt nun, dass in irgend einem Punkte des Flüssigkeitsfadens, also für $x = x$, zwei Strömungen vorhanden sind. Durch die Einheit des Querschnittes strömt in der Zeiteinheit nach rechts in Folge der Molekularkräfte das A-Volumen

$$+ h q \varrho_1 \varrho_2 (aa + bb - 2ab) \tag{49}$$

während gleichzeitig nach links in Folge der Diffusion das A-Volumen strömt

$$- h p. \tag{50}$$

Natürlich strömt in beiden Fällen gleichzeitig das gleiche Volumen von B in entgegengesetzter Richtung. Nun ist der Diffusionsstrom für alle Werthe $x = x$ constant gleich hp, während der dynamische Strom wegen der Producte $\varrho_1 \varrho_2$ (49) von Stelle zu Stelle seinen

Werth ändert. Seinen Maximalwerth hat er bei jenem x_3, wo $\varrho_1 = \varrho_2$ ist, weil dann das Product, welches an die Bedingung $\varrho_1 + \varrho_2 = 1$ gebunden ist, seinen Maximalwerth erhält. Dieser ist offenbar $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 1/4$. Seinen Minimalwerth erhält der dynamische Strom bei $\varrho_1 = o$, $\varrho_2 = 1$, oder bei $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = o$, d. i. für $x = o$ oder für $x = x_5$. Somit wird der dynamische Strom sowohl nach rechts, als auch nach links von x_3 als dem Maximalpunkte stetig abnehmen, um an den Endpunkten $x = x_1$ und $x = x_5$ ganz zu erlöschen, während der Diffusionsstrom überall der gleiche ist.

Dass der negative Diffusionsstrom ein mischender ist, ist klar. Er führt A, das seine grösste Concentration rechts hat, nach links, und B, das seine grösste Concentration links hat, nach rechts und das Endresultat wäre eine gleichmässige Mischung. Anders steht es mit dem dynamischen Strome. Dieser ist ebenfalls ein mischender (negativer), wenn gilt

$$ab > \frac{aa + bb}{2} \tag{51}$$

d. h. wenn die Adhäsionsconstante grösser ist, als das arithmetische Mittel der Cohäsionen. Im entgegengesetzten Falle,

$$ab < \frac{aa + bb}{2} \tag{51'}$$

also bei negativ kleiner Adhäsion, bleibt das positive Vorzeichen in Geltung, d. h. A wird nach rechts strömen, wo es bereits vorwiegt, B aber nach links, wo es ebenfalls vorwiegt. Dann aber ist der dynamische Strom ein scheidender.

Welcher Strom wird nun stärker, also ausschlaggebend sein, der mischende Diffusionsstrom oder der als scheidend angenommene (51') dynamische Strom? Der letztere hat den Maximalwerth

$$\tfrac{1}{4}\, q\,(aa + bb - 2\,ab)\, h \tag{52}$$

welcher um so grösser ist, je grösser die Cohäsionsconstanten aa und bb sind. Dieser Werth gilt bei $x = x_3$. Wenn also gilt

$$\tfrac{1}{4}\, q\,(aa + bb - 2\,ab) > p, \tag{53}$$

dann überwiegt wenigstens in der Mittelregion der Flüssigkeitsfaden die scheidende Strömung. Wenn wir nun von dort aus nach rechts oder nach links gehen, wo die beiden ϱ immer ungleicher, das Product $\varrho_1 \varrho_2$ also immer kleiner wird, werden wir beiderseits schliesslich einen Punkt treffen, wo der dynamische und der Diffusionsstrom gleich sein werden, d. h, wo gilt

$$q\, \varrho_1\, \varrho_2\, (aa + bb - 2\,ab) = p. \tag{54}$$

Die Lage dieser beiden stromlosen Punkte finden wir am leichtesten, wenn wir setzen

$$\varrho_1 = \tfrac{1}{2} + x \qquad \varrho_2 = \tfrac{1}{2} - x \qquad \frac{q}{p}\,\frac{1}{aa + bb - 2\,ab} = N. \tag{55}$$

Wir finden dann nämlich sehr leicht

$$\varrho_1\,\varrho_2 = \tfrac{1}{4} - x^2$$

und

$$x = \pm\,\tfrac{1}{2}\sqrt{1 - 4\,N}$$

Für den todten Punkt rechts von x_3 bei x_4 gilt dann

$$\varrho_1'' = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4\,N}\right) \qquad \varrho_2'' = \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4\,N}\right) \tag{56}$$

Für den todten Punkt links von x_3 bei x_2 gilt umgekehrt

$$\varrho_1' = \tfrac{1}{2}\left(1 - (\sqrt{1 - 4\,N}\right) \qquad \varrho_1' = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4\,N}\right) \tag{57}$$

In der Mittelregion des Fadens, zwischen x_2 und x_4, die wir die Scheidungsregion nennen können, überwiegt also der scheidende dynamische Strom (vorausgesetzt, dass obige Bedingung erfüllt ist), während in den Endstücken die mischende Strömung überwiegt. Wenn man die Wirkung dieser complicirten Strömungen studiert, dann findet man, dass aus dem rechten Endstück jenseit x_4, wo überall $\varrho_1 > \varrho_1''$ ist, so lange das überschüssige A nach links strömt, bis im ganzen Endstück $\varrho_1 = \varrho_1''$ ist. Umgekehrt wird im linken Endstück, wo überall $\varrho_1 < \varrho_1'$ ist, so lange A von rechts her einströmen, bis überall $\varrho_1 = \varrho_1'$ ist. In der Mittelregion endlich staut sich A rechts, B links, was zur Folge hat, dass die kritischen Punkte x_2 und x_4 immer näher an einander rücken, bis sie endlich zusammenfallen.

Auf diese Weise haben sich zwei complementäre Medien gebildet: links ist das Medium M_b, wo durchwegs die Concentration von B gleich

$$\tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4\,N}\right) > \tfrac{1}{2} \tag{58}$$

ist, während im rechten Medium M_a A überall diese Concentration besteht.

Das Diffusionsgesetz, das wir angewendet haben, ist nicht genau, da wir nur den ersten Differentialquotienten $\partial\varrho_1/\partial x$ angewendet haben. Hätten wir auch höhere Quotienten angewendet, so hätten wir gefunden, dass die Concentrationscurve von A, die Curve des ϱ_1, nicht eine gebrochene Linie mit zwei horizontalen Strecken ist, sondern dass sie sich beiderseits vom Scheidungspunkte x_3 ein wenig dem Werthe $\varrho_1 = 0{,}5$ nähert, um im Scheidungspunkt diesen Werth in sehr steilem Anstiege zu passieren.

Es wird nicht überflüssig sein, nochmals das Kriterium der Scheidung anzuführen. Die Mischung scheidet sich in zwei Medien, wenn gilt (53)

$$\frac{aa+bb}{2} - ab > 2\frac{p}{q} \tag{59}$$

Wir wollen nun auch die Volumgleichungen aufstellen. Wenn wir die immer wiederkehrende Wurzelgrösse

$$\sqrt{1-4N}$$

mit r bezeichnen, dann ist die Concentration von A in M_b gleich $(1-r)/2$, in M_a aber gleich $(1+r)/2$ (56, 57). Wenn die Volumina von M_a und M_b gleich V_1 und V_2 sind, und wir von A das Volumen v_1, von B das Volumen v_2 genommen haben, also

$$V_1 + V_2 = V = v_1 + v_2$$

ist, dann können wir für A die Gleichung aufstellen (1')

$$\begin{aligned} v_1 &= \tfrac{1}{2}(1+r)\,V_1 + \tfrac{1}{2}(1-r)\,V_2 \\ &= \tfrac{1}{2}(v_1+v_2) + \tfrac{1}{2}r\,(V_1 - V_2) \end{aligned}$$

und analog für B die Gleichung

$$\begin{aligned} v_2 &= \tfrac{1}{2}(1-r)\,V_1 + \tfrac{1}{2}(1+r)\,V_2 \\ &= \tfrac{1}{2}(v_1+v_2) - \tfrac{1}{2}r\,(V_1 - V_2) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen geben übereinstimmend

$$\frac{v_1 - v_2}{r} = V_1 - V_2$$

Hierzu kommt

$$v_1 + v_2 = V_1 + V_2$$

so dass wir erhalten:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{v_1 - v_2}{r} + \frac{v_1 - v_2}{2r} & V_2 &= \frac{v_1 + v_2}{2} - \frac{v_1 - v_2}{2r} \\ &= \tfrac{1}{2}(v_1+v_2)\left(1 + \frac{1}{r}\,\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right) & &= \tfrac{1}{2}(v_1+v_2)\left(1 - \frac{1}{r}\,\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right) \end{aligned} \tag{60}$$

Drei Flüssigkeiten.

Wir gehen in den Vereinfachungen so weit, als es nur möglich ist. Wir nehmen an, dass die drei Flüssigkeiten A, B und C sowohl gleiche Cohäsionen als auch gleiche Adhäsionen besitzen, dass also gilt

$$a\,a = b\,b = c\,c = c$$

und

$$a\,b = b\,c = ca = \gamma.$$

Ferner nehmen wir an, dass

$$p_1 = p_2 = p_3 = p$$

und

$$q_1 = q_2 = q_3 = q$$

ist. Unter den beiden letzten Annahmen reducirt sich die allgemeine Strömungsformel resp. Gleichgewichtsformel (28) für eine Flüssigkeit auf

$$p\,h_y = h_1\,\varphi_y(a) + h_2\,\varphi_y(b) + h_3\,\varphi_y(c) \tag{61}$$

wobei wir $\varphi_y(a)$ statt $\varrho_y\, q_y\, \varphi(a)$ etc. geschrieben haben. Auf die drei Flüssigkeiten einzeln angeschrieben lautet dies

$$\left.\begin{array}{ll} A: & p\,h_1 = h_1\,\varphi_1(a) + h_2\,\varphi_1(b) + h_3\,\varphi_1(c) \\ B: & p\,h_2 = h_1\,\varphi_2(a) + h_2\,\varphi_2(b) + h_3\,\varphi_2(c) \\ C: & p\,h_3 = h_1\,\varphi_3(a) + h_2\,\varphi_3(b) + h_3\,\varphi_3(c) \end{array}\right\} \tag{62}$$

Nun gilt aber auf Grund (18)

$$\varphi_y(n) = q\,\varrho_y\,\Sigma_x\,\varrho_x\,n_{yx} \tag{63}$$

Nach dieser Formel wollen wir zunächst $\varphi_1(a)$ ausrechnen. Es ist dann 1 für y und a für n zu schreiben, und wir haben

$$\begin{aligned} \varphi_1(a) &= q\,\varrho_1\,\Sigma_x\,\varrho_x\,a_{1x} \\ &= q\,\varrho_1\,(\varrho_1\,a_{11} + \varrho_2\,a_{12} + \varrho_3\,a_{13}) \\ &= q\,\varrho_1\,(\varrho_1\,[a\,a - a\,a] + \varrho_2\,[a\,a - a\,b] + \varrho_3\,[a\,a - a\,c]) \end{aligned}$$

oder nach den obigen Zeichen für die Molekularconstanten

$$\begin{aligned} &= q\,\varrho_1\,(\varrho_1\,\sigma + \varrho_2\,(c-\gamma) + \varrho_3\,(c-\gamma)) \\ &= q\,\varrho_1\,(c-\gamma)\,(\varrho_2 + \varrho_3). \end{aligned}$$

Wenn wir in dieser Weise alle neun Functionen φ berechnen, dann gewinnen wir für die drei Flüssigkeiten die Gleichgewichtsgleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} A: & \dfrac{p\,h_1}{q\,\varrho_1\,(c-\gamma)} = h_1\,(\varrho_2 + \varrho_3) - h_2\,\varrho_2 - h_3\,\varrho_3 \\[2ex] B: & \dfrac{p\,h_2}{q\,\varrho_2\,(c-\gamma)} = -\,h_1\,\varrho_1 + h_2\,(\varrho_3 + \varrho_1) - h_3\,\varrho_3 \\[2ex] C: & \dfrac{p\,h_3}{q\,\varrho_3\,(c-\gamma)} = -\,h_1\,\varrho_1 - h_2\,\varrho_2 + h_3\,(\varrho_1 + \varrho_2) \end{array}\right\} \tag{64}$$

Wenn wir die Brüche mit $h_1 A$, $h_2 B$ und $h_3 C$ bezeichnen, dann finden wir unter Beachtung von

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} h_1\,A - h_2\,B &= h_1 - h_2 \\ h_2\,B - h_3\,C &= h_2 - h_3 \\ h_3\,C - h_1\,A &= h_3 - h_1 \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Wenn wir hier h_3 durch $-(h_1 + h_2)$ ersetzen, dann erhalten wir aus den beiden letzten Gleichungen leicht

$$\begin{aligned} h_2 [(B-1)+(C-1)] &= -h_1 (C-1) \\ h_1 [(A-1)+(C-1)] &= -h_2 (C-1). \end{aligned}$$

Durch Multiplication ergibt sich hieraus

$$[(B-1)+(C-1)]\,[(A-1)+(C-1)] = (C-1)^2$$

und hieraus wieder

$$(A-1)(B-1)+(C-1)\,[(A-1)+(B-1)] = o$$

Nun wissen wir a priori, dass die Flüssigkeit sich in drei Medien theilen wird. Im ersten ist A, im zweiten B, im dritten aber C der Träger, und in jedem Medium haben die beiden gelösten Flüssigkeiten, der angenommenen Symmetrie wegen, gleiche Concentration. Nun ist (64)

$$A = \frac{p}{q(c-\gamma)} \cdot \frac{1}{\varrho_1} \quad B = \frac{p}{q(c-\gamma)} \cdot \frac{1}{\varrho_2} \quad C = \frac{p}{q(c-\gamma)} \cdot \frac{1}{\varrho_3}.$$

Wir können also in der Gleichgewichtsbedingung zwei beliebige ϱ, z. B., ϱ_1 und ϱ_2 gleichsetzen und durch ϱ ersetzen, wodurch $A = B$ wird, und die Gleichung lautet dann

$$(A-1)^2 + 2(C-1)(A-1) = o$$

oder

$$(A-1) = -2(C-1)$$

oder

$$\left(\frac{p}{q(c-\gamma)} \cdot \frac{1}{\varrho} - 1\right) = -\left(\frac{2p}{q(c-\gamma)} \cdot \frac{1}{\varrho_3} - 2\right) \tag{65'}$$

Da aber gilt

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = 1$$

und

$$\varrho = \varrho_1 = \varrho_2,$$

so ist auch

$$\varrho_3 = 1 - 2\varrho,$$

also, wenn wir in (65') die gegebenen Grössen mit n bezeichnen,

$$\frac{n}{\varrho} - 1 = 2 - \frac{2n}{1-2\varrho} \text{ oder } \frac{n}{\varrho} + \frac{2n}{1-2\varrho} = 3.$$

Hieraus wird leicht

$$\tfrac{2}{3}\, n = 2\varrho(1-2\varrho). \tag{66}$$

Wenn wir einführen

$$2\varrho = \tfrac{1}{2} + x \qquad 1 - 2\varrho = \tfrac{1}{2} - x,$$

dann finden wir

$$x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{8}{3}n} \qquad n = \frac{p}{q(c-\gamma)}.$$

Wenn wir diesen Werth von x einführen, dann finden wir für die Conc. 2ϱ, der beiden gelösten Stoffe zusammengenommen, und für ϱ_3, d. i. die Conc. des Trägers

$$\begin{aligned} 2\varrho &= \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8}{3}\frac{p}{q(c-\gamma)}}\right) \\ \varrho_3 &= \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{8}{3}\frac{p}{q(c-\gamma}}\right). \end{aligned} \tag{67}$$

Hier gilt wie bei zwei Flüssigkeiten als Kriterium der Scheidung, dass die Wurzelgrösse reell und kleiner als Eins sein muss, dass also gelten muss

$$+1 > \frac{8}{3}\frac{p}{q(c-\gamma)} > o, \text{ oder } (c-\gamma) > \frac{8}{3}\cdot\frac{p}{q}. \tag{68}$$

Die Cohäsion muss also mindestens um $8p/3q$ grösser sein, als die Adhäsion, wenn eine partielle Scheidung der drei Flüssigkeiten eintreten soll.

Die Formeln werden noch bedeutend complicirter, wenn wir nur zwei Flüssigkeiten gleiche Molekularkräfte, der dritten aber abweichende Kräfte zuschreiben. Wir haben dann

$$aa = bb = a, \; ac = bc = \gamma, \; ab = \alpha, \; cc = c$$

Wenn wir die Gleichgewichtsgleichungen der drei Flüssigkeiten genau so wie im ersten Beispiele berechnen, dann heben sich nicht mehr so viel Glieder und wir erhalten (29) die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{p\,h_1}{q\,\varrho_1} &= h_1[\varrho_2(a-\alpha) + \varrho_3(a-\gamma)] + h_2[\varrho_2(\alpha-a) + \varrho_3(\alpha-\gamma)] + \\ &\quad + h_3\varrho_3(\gamma-c) \\ \frac{p\cdot h_2}{q\,\varrho_2} &= h_1[\varrho_1(\alpha-a) + \varrho_3(\alpha-\gamma)] + h_2[\varrho_2(a-\alpha) + \varrho_3(a-\gamma)] + \\ &\quad + h_3\varrho_3(\gamma-c) \\ \frac{v\,h_3}{\varrho\,q_2} &= h_1[\varrho_1(\gamma-a) + \varrho_2(\gamma-\alpha)] + h_2[\varrho_1(\gamma-\alpha) + \varrho_2(\gamma-\alpha)] + \\ &\quad + h_3(\varrho_1 + \varrho\;(c-\gamma) \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Die erste Gleichung geht natürlich in die zweite über, wenn man h_1 und ϱ_1 durch h_2 und ϱ_2 ersetzt.

Wie wir sehen, ist selbst bei so einfachen Fällen, wie bei der Mischung von drei Flüssigkeiten, von denen zwei oder gar alle drei gleiche Molekularconstanten besitzen, die Discussion der Formeln eine lästige und die Folgerungen keineswegs anschaulich. Ungleich bessere Resultate liefert uns bei diesen zwei Fällen eine Specialuntersuchung, indem wir das **Dreiflüssigkeitsproblem auf das Zweiflüssigkeitsproblem reduciren.**

Die drei Flüssigkeiten heissen A, B, C. Die beiden ersten (von denen wir auch gleiche Volumina rechnen) haben gleiche Constanten, und zwar ist ihre Cohäsionsconstante $= a$, die ihrer gegenseitigen Adhäsion gleich α, die ihrer Adhäsion an C gleich γ und die der Cohäsion von C gleich c.

Wenn die Flüssigkeiten kleine Adhäsionen, aber grosse Cohäsionen besitzen, dann erhalten wir drei Medien M_a, M_b, M_c, deren Träger resp. A, B, und C sind. Die Medien M_a und M_b werden symmetrisch sein, d. h. wie viel B in M_a pro Volumeinheit gelöst ist, so viel A ist auch per Volumeinheit in M_b gelöst enthalten. Ferner ist in beiden Medien die Concentration von C dieselbe, da beide C gegenüber ganz gleich sich verhalten.

Wenn die Adhäsion zwischen A und B allmählich wächst, dann wird der Unterschied zwischen M_a und M_b immer kleiner, bis endlich A und B sich vollständig mischen und ein Medium M_{ab} bilden. Wir haben dann nur zwei Medien: M_c, in welchem A und B in gleichen Mengen gelöst ist; und M_{ab}, wo C in einer Mischung von A und B gelöst ist.

Lassen wir nun die Adhäsion α von A und B wieder ganz klein sein; es soll aber die Adhäsion γ von A und B an C wachsen. Dann werden die Medien M_a und M_b immer mehr C aufnehmen, das Medium M_c wird immer kleiner, bis es ganz absorbirt ist.

Wenn endlich alle Adhäsionen gross sind, dann mischen sich alle drei Flüssigkeiten homogen, ohne Scheidung, zu einem Medium M_{abc}.

Wir erhalten also entweder drei Medien M_a, M_b, M_c, oder zwei Medien M_a und M_b, oder zwei Medien M_c und M_{ab}, oder ein Medium M_{abc}. So viel zur allgemeinen Orientirung.

Wir müssen der Discussion des Problems noch Einiges über die Molekularconstanten vorausschicken.

Die Cohäsionsconstante $a\alpha$ ist, wie in der citirten Abhandlung über die Mischungsschicht entwickelt ist, die Arbeit, welche die Molekularkräfte leisten, wenn die Volumeinheit von reinem A in reines A

eingeführt wird, wobei die Flüssigkeiten nicht als undurchdringlich gedacht sind. Analog ist die Adhäsionsconstante ab die Arbeit, welche die Molekularkräfte leisten, wenn die Volumeinheit von A in reines B eingeführt wird.

Diese Definitionen wollen wir nun auch auf Mischungen anwenden. Zwei Flüssigkeiten H und K sollen so gemischt sein, dass ihre Concentrationen gleich ς_1 und ς_2 sind. Die Cohäsionsconstante dieser Mischung ist dann die Arbeit, welche die Molekularkräfte leisten, wenn die Volumeinheit der Mischung in reine Mischung unter Durchdringung der Stoffe eingeführt wird. Diese Einführungsarbeit (hk) ist, wie in der citirten Arbeit gezeigt ist, gleich

$$(hk) = \varsigma_1^2 hh + \varsigma_2^2 kk + 2 \varsigma_1 \varsigma_2 hk \tag{70}$$

wobei hh, kk, hk die Cohäsions- und Adhäsionsgrössen der normalen Flüssigkeiten H und K in bekannter Weise bedeuten. Die Adhäsionsconstante der Mischung (HK) an eine dritte Flüssigkeit L ist gegeben durch

$$(hk \cdot l) = s_1 hl + s_2 kl, \tag{71}$$

wobei hl und kl die Adhäsionsconstanten der einzelnen Flüssigkeiten H und K an L sind.

Endlich ist die Adhäsionsconstante der Mischung (HK) an eine zweite Mischung (MN), wo M und N die Concentrationen σ_1 und σ_2 besitzen, gegeben durch

$$(hk \cdot mn) = \varsigma_1 \sigma_1 hm + \varsigma_1 \sigma_2 hn + \varsigma_2 \sigma_1 km + \varsigma_2 \sigma_2 kn \tag{72}$$

wobei rechts lauter Adhäsionsconstanten einfacher Flüssigkeiten stehen. Wenn N mit K identisch ist, und σ_1 und σ_2 gleich ς_1 und ς_2, dann haben wir

$$(hk \cdot mk) = \varsigma_1^2 hm + \varsigma_1 \varsigma_2 hk + \varsigma_1 \varsigma_2 km + \varsigma_2^2 kk \tag{73}$$

Hier liegt offenbar der Fall vor, dass H und M in gleichem Maasse mit K verdünnt sind.

Wir wollen nun den in der Disposition vorgesehenen Fall besprechen, dass A und B sich nicht scheiden, also M_a und M_b in ein Medium M_{ab} verschmelzen. Der Fall der drei Flüssigkeiten ist dann auf den Fall von zwei Flüssigkeiten reducirt. Diese sind C und (AB). Für zwei Flüssigkeiten gilt aber die Gleichgewichtsbedingung (54)

$$p = q \varrho_1 \varrho_2 (aa + bb + 2bc)$$

oder, um Verwechslungen zu vermeiden,

$$p = q \varrho_1 \varrho_2 (xx + yy - 2xy). \tag{74}$$

Hierbei ist ϱ_1 die Concentration von X, ϱ_2 die von Y. Wenn wir die Constanten zusammenfassen, erhalten wir $N = \varrho_1 \varrho_2$. Wenn eine partielle Scheidung erfolgt, dann haben wir in den beiden Medien M_x und M_y die Concentrationen von X und Y (56, 57).

$$\left.\begin{array}{ll} M_x: \varrho_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4N}\right) & \varrho_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4N}\right) \\ M_y: \varrho_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4N}\right) & \varrho_2' = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4N}\right) \\ \multicolumn{2}{c}{4N = 4\frac{p}{q}\,\frac{1}{xx + yy - 2xy}.} \end{array}\right\} \quad (75$$

Die Gleichungen können nur bestehen, wenn $4N$ positiv ist, weil sonst die Wurzel grösser als Eins wird und ϱ_1 oder ϱ_2 grösser als Eins sein müsste, was absurd ist. Ferner muss $4N$ kleiner als Eins sein, weil sonst die Wurzel imaginär wäre. Eine partielle Scheidung bebesteht also nur für

$$+1 > 4N > o$$

oder in unserem Falle

$$+1 > \frac{4p}{q(xx + yy - 2xy)} > o. \qquad (76$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Cohäsionen gegen die Adhäsion gross sind. Wenn die Adhäsion xy grösser ist, als das Mittel der Cohäsionen, dann wird der Nenner negativ, es findet keine Scheidung, sondern unbedingte und vollständige Mischung von X und Y statt. Der kritische Punkt, wo die Scheidung anfängt, d. h. das eine Medium ein minimales Ueberwiegen von X, das zweite, vom ersten scharf geschiedene Medium ein minimales Ueberwiegen von Y zeigt, dieser Punkt ist gegeben durch

$$+1 = \frac{4p}{q(xx + yy - 2xy)} \text{ oder } xy = \frac{xx + yy}{2} - \frac{2q}{p}. \qquad (77$$

Sowie die Adhäsion grösser wird, hört die Scheidung auf; wie die Adhäsion noch kleiner wird, verstärkt sich der Unterschied der beiden Medien.

Für unseren Fall der beiden Flüssigkeiten (AB) und C statt X und Y haben wir einzuführen (70)

$$xx = \varsigma_1^2 aa + \varsigma_2^2 bb + 2\varsigma_1\varsigma_2 ab$$

oder nach der Anfangs eingeführten kürzeren Bezeichnung

$$xx = \varsigma_1^2 a + \varsigma_2^2 a + 2\varsigma_1\varsigma_2\alpha$$

oder da wir A und B in gleichem Volumen gemischt haben, also $\varsigma_1 = \varsigma_2 = 1/2$ ist,

$$xx = \tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{4}a + 2\,\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,\alpha = \tfrac{1}{2}(a+\alpha) \qquad (78$$

Für yy haben wir zu setzen c. (79

Endlich haben wir für xy zu setzen (71)

$$xy = \varsigma_1 ac + \varsigma_2 bc \text{ oder } xy = \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{2}\gamma = \gamma \qquad (80$$

Die Scheidungsschwelle ist also noch gegeben durch (77)

$$\gamma = \frac{1}{4}(a+\alpha) + \frac{c}{2} - \frac{2p}{q}. \qquad (80'$$

Wenn also die Adhäsion von C an A und B grösser wird, als dieser Schwellenwerth, findet keine Scheidung statt, sondern es entsteht eine einzige Mischung M_{abc} von allen drei Flüssigkeiten. Wenn wir allen drei Flüssigkeiten gleiche Kräfte zuschreiben, also $c = a$ und $\gamma = \alpha$ setzen, dann lautet die Schwellengleichung (77)

$$\alpha = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}\alpha + \frac{2a}{4} - \frac{2p}{q} \text{ oder } \frac{3}{4}\alpha = \frac{3}{4}a - \frac{2p}{q}$$

oder

$$(a-\alpha) = \frac{8}{3}\,\frac{p}{q}. \qquad (81$$

Wir wollen nun auch die Concentrationen in den Medien M_c und M_{ab} berechnen. Für $xx + yy - 2xy$ haben wir (78, 79, 80)

$$xx + yy - 2xy = \tfrac{1}{2}(a+\alpha) + c - 2\gamma \qquad (82$$

also für M_c die Concentrationen ϱ_c und ϱ_{ab} von C und (AB) (75)

$$\left.\begin{aligned}\varrho_c &= \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4\,\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}(a+\alpha)+c-2\gamma}}\right)\\ \varrho_{ab} &= \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4\,\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}(a+\alpha)+c-2\gamma}}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (83$$

Die Concentration ϱ_{ab} betrifft natürlich beide Flüssigkeiten A und B zusammengenommen, so dass auf jede je die Hälfte, also $\varrho_{ab}/2$ fällt.

Wenn man wieder allen drei Flüssigkeiten gleiche Kräfte zuschreibt, also $c = a$, $\gamma = \alpha$ setzt, dann erhält man (siehe 67)

$$\left.\begin{aligned} \varrho_c &= \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{8}{3}\frac{p}{q}\frac{1}{a-\alpha}}\right) \\ \varrho_{ab} &= \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{8}{3}\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{a-\alpha}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Im Medium M_{ab} sind natürlich die Concentrationen ϱ' vertauscht, d. h. es gilt (83)

$$\varrho_c' = \varrho_{ab} \qquad \varrho_{ab}' = \varrho_c$$

Wir gehen nun auf den Fall über, dass es zwei Medien gibt, M_a und M_b, welche alles C absorbirt haben, so dass es kein Medium M_c gibt.

Wir reduciren diesen Fall dreier Flüssigkeiten abermals auf den Fall zweier Flüssigkeiten, indem wir annehmen, dass wir zwei Flüssigkeiten haben, nämlich eine Mischung von A und C, also (AC), und eine Mischung von B und C, also (BC), und zwar soll die Mischung in beiden Fällen nach dem Verhältnis $\varsigma_1 : \varsigma_2$, $\varsigma_1 + \varsigma_2 = 1$ erfolgt sein. Wir erhalten dann durch entsprechende Umschreibung der Formeln 70 und 73

$$xx = yy = \varsigma_1^2 a + \varsigma_2^2 c + 2\varsigma_1\varsigma_2\gamma$$

$$xy + \varsigma_1^2\alpha + \varsigma_1\varsigma_2\gamma + \varsigma_2\varsigma_2\gamma + \varsigma_2^2 c = \varsigma_1^2\alpha + 2\varsigma_1\varsigma_2\gamma + \varsigma_2^2 c.$$

Hieraus finden wir leicht

$$xx + yy - 2xy = 2\varsigma_1^2(a-\alpha).$$

Die Molekularkräfte von C sind also vollständig ausgefallen und haben auf die Scheidung von A und B gar keinen Einfluss. Es ist dies übrigens im Zusammenhang damit, dass C in beiden Medien die gleiche Concentration besitzt.

Für den Schwellenwerth finden wir (77)

$$\left. 1 = \frac{4p}{2q\varsigma_1^2(a-\alpha)} \text{ oder } \varsigma_1^2 = \frac{2p}{q(a-\alpha)} \right\}. \tag{85}$$

Die Concentrationen ϱ_{ac} und ϱ_{bc} von (AC) und (BC) in M_a sind gegeben durch (75)

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{ac} &= \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-2\frac{p}{q}\frac{1}{a-\alpha}\cdot\frac{1}{\varsigma_1^2}}\right) \\ \varrho_{bc} &= \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-2\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{a-\alpha}\cdot\frac{1}{\varsigma_1^2}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

(in M_b sind die Concentrationen vertauscht). Das sind also die Volumina von (AC) und (BC), welche in der Volumeinheit von M_a enthalten

sind. Nun enthält aber die Volumeinheit von (AC) das Volumen ς_1 an A, sowie die Volumeinheit von (BC) das Volum ς_1 an B enthält. Die Volumeinheit von M_a enthält also von A das Volumen $\varrho_a = \varsigma_1 \varrho_{ac}$ und von B das Volumen $\varrho_b = \varsigma_1 \varrho_{bc}$. Die Concentration von C ist

$$\left.\begin{aligned} \varrho_c &= 1 - (\varrho_a + \varrho_b) \\ &= 1 - \varsigma_1 (\varrho_{ac} + \varrho_{bc}) \\ &= 1 - \varsigma_1 = \varsigma_2 \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Wir erhalten also für die Concentrationen $\varrho_a\, \varrho_b\, \varrho_c$ von A, B, C in M_a die Werte

$$\left.\begin{aligned} \varrho_a &= \frac{1}{2} \varsigma_1 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\varsigma_1^2} \frac{2p}{q(a-\alpha)}}\right) \\ \varrho_b &= \frac{1}{2} \varsigma_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\varsigma_1^2} \frac{2p}{q(a-\alpha)}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

$$\varrho_c = \varsigma_2$$

In M_b sind ϱ_a und ϱ_b vertauscht, und ϱ_c hat denselben Werth ς_2. Kehren wir zurück zum Schwellenwerth (85)

$$\varsigma_1^2 = \frac{2p}{q(a-\alpha)}$$

Wenn A und B rein genommen werden, dann ist $\varsigma_1^2 = 1$, $\varsigma_2 = o$, die Schwellenbedingung ist, wie wir übrigens schon früher gefunden haben,

$$q(a - \alpha) = 2p$$

oder

$$a = \alpha + \frac{2p}{q}. \tag{89}$$

Wenn also a über diesem Werthe steht, findet bei unverdünnten Flüssigkeiten partielle Scheidung statt, und für sehr grosses a, d. h. sehr grosse Cohäsionen von A und B ist die Scheidung eine fast vollständige, d. h. A nimmt in M_a nur sehr wenig B, B aber in M_b nur sehr wenig A auf. Die obige Gleichung für ς_1^2 aber lehrt nun, dass durch Verdünnung der Medien durch C die Scheidung immer mehr geschwächt werden kann, und dass es selbst für die strengste Scheidung eine durch ς_1 charakterisirte Verdünnung gibt, wo die Scheidung aufhört (ς_1 ist das Volumen von A und B zusammengenommen in der Volumeinheit von M_a oder M_b). Diese Paralyse der Scheidung durch Verdünnung geschieht nun in Thompson's Experimenten, wo zur Verdünnung Zinn dient.

Wir wollen nun die beiden Fälle, wo nur M_c und M_{ab}, und wo nur M_a und M_b vorhanden ist, zu einander in Beziehung bringen.

Wir haben gefunden, dass eine Scheidung der drei Flüssigkeiten in M_c und M_{ab} erfolgt, wenn für die Adhäsion γ von C an A und B gilt (80′)

$$\gamma < \frac{1}{4}(a+\alpha) + \frac{c}{2} - \frac{2p}{q}. \qquad \text{(I}$$

Die Bedingung kann durch wachsende Cohäsion c von C immer erfüllt werden. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann ist die Concentration ϱ_{ab} von A und B zusammengenommen im Medium M_{ab} gleich (83)

$$\varrho_{ab} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}(a+\alpha)+c-2\gamma}}\right),$$

wovon die eine Hälfte auf A, die andere auf B entfällt. Dieselbe Concentration hat C in M_c. Die Concentration von C in M_{ab} unterscheidet sich von ϱ_{ab} nur durch das Vorzeichen des Wurzelzeichens.

Es ist nun möglich, dass die Flüssigkeiten A und B in M_{ab} in labilem Gleichgewicht sind, d. h. dass ihre Adhäsion an einander so klein ist, dass sie bei der vorliegenden geringen Verdünnung durch C immer noch sich partiell scheiden. In den Gleichungen für die Scheidung verdünnter Mischungen kommen aber die Grössen ς_1 und $\varsigma_2 = 1 - \varsigma_1$ vor. Es ist nun offenbar, dass ς_1 nichts anderes ist, als obiger Ausdruck ϱ_{ab}. Wir haben also in den Gleichungen für ϱ_a und ϱ_b den Werth von ς_1 zu ersetzen durch obigen Werth für ϱ_{ab}. Wir erhalten dann eine monströse Formel. Die Bedingung, unter der eine solche Spaltung von M_{ab} in zwei Medien M_a und M_b stattfindet, ist (85) gegeben durch $\varsigma_1^2 > 2p/q(a-\alpha)$ oder

$$\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4\frac{p}{q}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}(a-\alpha)+c-2\gamma}}\right) > \sqrt{\frac{2p}{q(a-\alpha)}}. \qquad \text{(II}$$

Durch wachsendes a wird die linke Seite grösser, die rechte kleiner; die Bedingung kann also durch wachsende Cohäsion a von A und B immer erfüllt werden.

Wir können nunmehr sagen:

1. Wir erhalten aus den drei Flüssigkeiten A, B und C drei Medien M_a, M_b, M_c, wenn beide Bedingungen I und II erfüllt sind.

2. Wir erhalten zwei Medien M_a und M_b, wenn nur die Bedingung II, nicht aber I erfüllt ist. Das scheint der Fall zu sein bei Blei, Zink und Zinn.

3. Wir erhalten zwei Medien M_a und M_{ab}, wenn nur die Bedingung I, nicht aber II erfüllt ist.

4. Wir erhalten ein Medium M_{abc}, wenn weder die Bedingung I, noch II erfüllt ist.

Folgerungen.

Nehmen wir ein Medium M_t, dessen Träger eine Flüssigkeit T ist; die zweite Flüssigkeit sei A. A wird in M_t eine gewisse Concentration ϱa besitzen. Nun lassen wir den Molekülen von A alle ihre Eigenschaften, lassen aber, um recht anschaulich zu sein, die Hälfte der Moleküle weiss, die andere schwarz sein, so dass wir also zwei Arten von A, nämlich A_w und A_s haben, welche völlig gleiche Molekularconstanten besitzen. Offenbar hat diese Farbenscheidung gar keinen Einfluss auf die Concentration ϱa von A in T. Die Diffusion wird A_w und A_s innerhalb und ausserhalb des M_t gleichmässig mischen, und die beiden Flüssigkeiten werden in M_t die Concentrationen besitzen $\varrho a_w = \varrho a / 2$ und $\varrho a_s = \varrho a / 2$.

Wenn wir nun T einmal nur mit weissem A_w in Verbindung sein lassen, dann wird es sich mit A_w sättigen, und dieses erhält in M_t die Concentration ϱa. Wenn ein andermal T nur mit schwarzem A_s in Verbindung ist, dann wird A_s in M_t die Concentration ϱa erhalten. Wenn wir nun in letzterem Falle in das umgebende Medium M_a noch weisses A_w zuschütten, dann wird sich dieses in Folge der Diffusion in M_t und M_a gleichmässig vertheilen. M_t wird dann sowohl A_w als auch A_s enthalten, aber offenbar wird die Concentration der Tracht unverändert bleiben, d. h. es wird gelten

$$\varrho a_w + \varrho a_s = \varrho a.$$

In diesem Beispiele wirken A_w und A_s zusammengenommen offenbar nur als eine einzige Flüssigkeit; sie sind es ja dynamisch auch. Wenn nun die Adhäsion von A_w und A_s an einander grösser wird, dann repräsentirt die Mischung von A_w und A_s nach aussen eine einzige Flüssigkeit A_{ws}, die sich von der ursprünglichen Flüssigkeit A dynamisch nur durch grössere Cohäsion unterscheidet. Wenn wir uns aber an die Gesetze der Mischung zweier Flüssigkeiten erinnern, dann ersehen wir hieraus, dass M_t einen Theil von A_{ws} ausscheiden wird, und die Concentration von A_{ws} in M_t wird kleiner.

Wenn wir umgekehrt annehmen, dass die Adhäsion von A_s und A_w an einander kleiner wird, dann repräsentirt die Mischung von A_s und A_w eine einzige Flüssigkeit A_{ws}, die sich vom ursprünglichen A

durch kleinere Cohäsion unterscheidet, woraus folgt, dass M_t von A_w mehr noch aufnehmen wird, ϱa also wächst.

Dass die Aenderung in der Adhäsion der Bestandtheile die Cohäsion der Mischung wirklich ändert, ersehen wir leicht aus Folgendem. Die Cohäsion (ab) einer Mischung vom Verhältnis $\varrho_1 : \varrho_2$, $\varrho_1 + \varrho_2 = 1$ ist bekanntlich

$$(ab) = \varrho_1^2 aa + \varrho_2^2 bb + 2\varrho_1\varrho_2 ab,$$

wo der Einfluss der Adhäsion ab sofort sichtbar ist. Wenn wir annehmen, dass ab die mittlere geometrische Proportionale zwischen aa und bb ist, dass also gilt

$$ab = \sqrt{aa} \cdot \sqrt{bb},$$

dann ist die Cohäsion der Mischung

$$(ab) = (\varrho_1\sqrt{aa} + \varrho_2\sqrt{bb})^2.$$

Wenn wir ein andermal $aa = bb$ sein lassen, dann ist

$$(ab) = aa(\varrho_1^2 + \varrho_2^2) + 2\varrho_1\varrho_2 ab.$$

Wenn wir die Adhäsion von A und B ihren Cohäsionen gleich sein lassen, also $aa = ab$ setzen, wie es bei A_w und A_s der Fall ist, dann ist

$$\begin{aligned}(ab) &= aa(\varrho_1^2 + 2\varrho_1\varrho_2 + \varrho_2^2)\\ &= aa(\varrho_1 + \varrho_2)^2\\ &= aa.\end{aligned}$$

Für $aa = bb$ und $ab = aa \pm x$ ist die Cohäsion der Flüssigkeit

$$\begin{aligned}(ab) &= \varrho_1^2 aa + \varrho_2^2 aa + 2\varrho_1\varrho_2 aa \pm 2\varrho_1\varrho_2 x\\ &= aa(\varrho_1^2 + 2\varrho_1\varrho_2 + \varrho_2^2) \pm \varrho_1\varrho_2 x\\ &= aa \pm 2\varrho_1\varrho_2 x,\end{aligned}$$

welche Form den Einfluss der Adhäsionsschwankungen x am besten zeigt.

Wir ersehen aus diesen Beispielen folgendes. Die Sättigungsconcentration einer Flüssigkeit A in einer Flüssigkeit T kann man nur in Abwesenheit jeder dritten Flüssigkeit x bestimmen. Jede neue Flüssigkeit wird auf Kosten der alten gelösten Flüssigkeit gelöst und die Concentrationen summiren sich nicht. Wenn eine Flüssigkeit T sich mit mehreren Flüssigkeiten $A, B \ldots$ sättigt, dann zeigt keine einzige ihre wahre Sättigungsconcentration. Die Adhäsionen der gelösten Flüssigkeiten an einander vermindern ihre Concentrationen im Medium M_t. Dieselbe Wirkung haben ihre Cohäsionen, sowie die Cohäsion des Trägers T. Vergrössert werden die Concentrationen der gelösten Stoffe durch ihre Adhäsion an den Träger.

Der Träger T kann selber eine Mischung von zwei Flüssigkeiten T_w und T_c sein, die stark aneinander adhäriren, und wir können alle Folgerungen, die wir bei binären Trachten entwickelt haben, bei den binären Trägern wiederholen. Es sind leicht folgende Sätze einzusehen. Bei einem binären Medium $Mt_w t_c$ wird die lösende Kraft vergrössert, wenn die Adhäsion der Theilträger kleiner wird; sie wird verkleinert, wenn die Adhäsion der Theilträger an einander wächst. Die lösende Kraft eines binären Mediums ist nicht die Summe der lösenden Kräfte der Theilträger, d. h. die Concentration ϱ_2 der Tracht wird im allgemeinen nicht grösser, wenn wir einen binären Träger nehmen, als wenn wir einen einfachen Träger nehmen.

Die Unterscheidung von Träger und Tracht haben wir dem Falle von zwei Flüssigkeiten entnommen, wo dieser Unterschied sehr scharf ist, und dort haben wir gefunden, dass in einem Medium die Concentration des Trägers nothwendig grösser ist, als 0,5, während die Concentration der Tracht nothwendig kleiner ist, als 0,5. Nun haben wir eben gefunden, dass es sowohl zusammengesetzte Trachten, als auch zusammengesetzte Träger gibt, so dass dann keine einzige Flüssigkeit eine Concentration über 0,5 zu haben braucht. Je weiter wir indess die Verhältnisse entwickeln, um so schwieriger wird es, diese Unterscheidung aufrecht zu erhalten. Im allgemeinen kann man sagen: der Träger bildet diejenige Stoffgruppe, deren gegenseitige Adhäsion die Cohäsion überwiegt, und deren Gesammtconcentration grösser als 0,5 ist; die Tracht bildet diejenige Stoffgruppe, deren Adhäsionen gering sind, und deren Gesammtconcentration kleiner ist, als 0,5.

Da hier nicht der Ort ist, physiolgische Verhältnisse eingehend zu erörtern, so sollen hier nur wenige Andeutungen über die physiologische Bedeutung der hier entwickelten Verhältnisse geboten werden.

Stabilität der Medien. Wir finden, dass sowohl im Thier- als auch im Pflanzenkörper, was gestern noch als kleinstes, homogenes Formelement gegolten hat, heute bereits durch Vervollkommnung des Mikroskops als Complex noch kleinerer Formelemente erkannt wird. Die letzten, wirklich homogenen Medien sind der Sitz der chemischen Processe im Lebekörper, die chemischen Herde. Der Lebekörper ist ein Complex von überaus vielen Medien, und diese Medien sind Mischungen von zahlreichen, zumeist plasmatischen Substanzen, von welchen wir annehmen dürfen, dass sie sich gegenseitig vielfach wie Flüssigkeiten verhalten. Einen Stoff, welcher nicht nur alle Medien bereits gesättigt hat, sondern so reichlich vorhanden ist, dass er auch

ein eigenes Medium bildet, dessen Träger er ist, wollen wir überständig nennen. Unterständig ist dann ein Stoff, der die Medien noch nicht gesättigt hat, aber auch noch kein Medium bildet.

Wenn der Lebekörper aus lauter überständigen Stoffen bestände, dann wäre die Zusammensetzung der einzelnen Medien eine vollkommen stabile. Wenn dann die Quantität eines Stoffes sehr stark wächst, dann wird sein Medium immer grösser, die anderen Medien werden immer kleiner, und zwar ändert sich das Volumen eines Mediums um so schneller, je reichlicher sein Träger im wachsenden Medium gelöst wird. Es werden sodann die Medien der Reihe nach absorbirt. Wir können also sagen: Schwankungen in den Quantitäten der einzelnen Bildungsstoffe ändern nur das Volumen, nicht aber die Zusammensetzung der einzelnen Medien.

Die unterständigen Stoffe scheinen in den Lebewesen einen geringen Einfluss auf die Zusammensetzung der Medien zu haben und das stimmt mit der Theorie, da wir nämlich gesehen haben, dass ein Medium von vielen Stoffen zusammengenommen nicht mehr aufnimmt, als von einem einzelnen. Bei einer sehr zusammengesetzten Tracht fällt also auf einen einzelnen Stoff eine sehr geringe Concentration, und somit kann auch sein Einfluss nur ein sehr kleiner sein.

Die Stabilität der Medien ist morphologisch und chemisch von höchster Wichtigkeit. Morphologisch, weil die Form irgend eines organischen Gebildes eine Function der Molekularkräfte des Bildungsmaterials ist, mit der Zusammensetzung desselben sich aber auch dessen Kräfte ändern. Chemisch, weil ein chemischer Process nur so lange in völlig gleicher Weise vor sich geht, als die Verhältnisse die gleichen bleiben. Im Lebewesen sind aber die Mischungsverhältnisse in den einzelnen chemischen Herden (Medien) von nahezu idealer Constanz, da die Concentration der verbrauchten Stoffe durch Eindiffundiren, die der producirten Stoffe aber durch Abdiffundiren stets constant erhalten bleibt.

Plötzliches Auftauchen von Neugebilden. Besonders bei den tiefern Classen der Lebewesen ist es interessant, dass in gewissen Entwicklungsstufen plötzlich ganz neue Organe sich entwickeln. Es müssen also neue Medien plötzlich entstanden sein. Nach unseren Theorien muss der Träger des neuen Mediums schon früher, aber als unterständiger Stoff, vorhanden gewesen sein. Seine Mengenzunahme bleibt so lange unmerkbar, als er unterständig ist. Sobald aber die Medien mit ihm gesättigt sind, wird er oberständig, bildet ein eigenes Medium, und seine weitere Mengenzunahme wird dem Auge sichtbar. Diejenigen Medien, also auch diejenigen Organe, dessen Träger das

neue Medium am reichlichsten aufnimmt, nehmen an Volumen ab, schwinden in dem Maasse, als das neue Medium zunimmt. Das Schwinden des Schwanzes beim Auftreten der Füsse, das Schwinden der Kiemen beim Auftreten der Lungen bei den Fröschen etc. sind also nach unseren Rechnungen physikalisch einfache, motivirbare Erscheinungen.

Quantitatives Gleichgewicht der Medien. In einem chemischen Herde (Medium) A soll sich ein Stoff b bilden, der endlich selbst Träger eines neu auftretenden Mediums B wird. Dieser ist natürlich der Sitz neuer chemischer Processe, da die Stoffe hier in neuer Combination vereint sind. Wenn nun ein Product c von B grössere Adhäsion an den Träger des alten Mediums A hat, wird es (c) sich in diesem A stärker concentriren und daher die Concentration der früher dort gewesenen gelösten Stoffe vermindern. Dadurch wird aber auch die Production des Stoffes b vermindert, so dass das neue Medium B nicht weiter wachsen kann. Dass die Medien (Theile) eines Lebewesens constante relative Volumina zeigen, das Lebewesen also die Form bewahrt, lässt sich durch unsere Rechnungen sehr wohl physikalisch motiviren.

Differentiation. Die organische Differentiation besteht im wesentlichen darin, dass aus einem Medium zwei, anfangs kaum von einander unterscheidbare, scharf getrennte Medien werden. Eine solche Scheidung erfolgt, wie wir gesehen haben, wenn das Anfangsmedium einen neuen Stoff aufnimmt, der an den einen oder andern Stoff der Tracht stark adhärirt, so dass ein binärer Stoff von grösserer Cohäsion entsteht, oder wenn die Concentration des Trägers abnimmt, wie wir im Dreiflüssigkeits-Problem berechnet haben. Die organische Differentiation ist also nach unseren Rechnungen physikalisch einfach erklärbar.

Secretion. Die Lebewesen scheiden verschiedene Secrete aus. Ein Stoff a wird in einem Organe B ausgeschieden, wenn in B sich ein an a stark adhärirender Stoff b bildet; es mag das etwa ein Salz etc. sein. Dann bilden a und b einen binären Stoff, der ein eigenes Medium bildet. Wenn dieses wenig constant, etwa gar flüssig ist und an den Nachbarmedien schwach adhärirt, dann verliert es den Zusammenhang mit dem Organismus, d. h. es ist ausgeschieden. Die Secretion ist also nach unseren Rechnungen einfach erklärbar.

Hungerzustand. Wenn ein Medium A z. B. die Muskelsubstanz, einen Stoff a in irgend einer Weise verloren hat, dann zeigt das Medium A die Fähigkeit, neues a aufzusaugen, während es vorher

diese Eigenschaft nicht besessen hat. Nach unseren Rechnungen ist dies eine einfache Sättigungs- und Entsättigungserscheinung.

Ersatzfähigkeit der Stoffe. Bei ausgehungerten Thieren enthalten die Muskeln enorm viel Wasser, welches wieder aus den Muskelmedien verschwindet, wenn das Thier reichlich genährt wird. Wasser und Eiweisssubstanzen können also in den Muskelmedien einander ersetzen. Solche Erscheinungen der Ersatzfähigkeit sind nicht selten. Das Theorem der Constanz der Concentration der Tracht führt sofort zur Ersatzfähigkeit.

Protokoll der Versammlung

der chemisch-physikalischen Gesellschaft zu Wien,

vom 20. Mai 1890.

Vorsitzender: Hofrath Ludwig.

Das Protokoll der vorhergegangenen Sitzung wird verlesen und genehmigt.

Herr Hofrath Prof. Dr. L. Boltzmann (Graz) hält den angekündigten Vortrag: „Ueber elektrische Schwingungen“.

Der Secretär.

Bezugsquellen.

Bezeichnung der Firma:	Fabrikat und Angabe der Specialität:
Schuckert & Co., Kommandit-Gesellschaft, Nürnberg. (17/11)	Fabrik elektrischer Maschinen für Beleuchtung, Arbeitsübertragung, Elektrolyse und Lehrzwecke.
Hartmann & Braun, Bockenheim-Frankfurt a/M.	Elektrische und magnetische Messinstrumente. Vollständige Einrichtungen von Laboratorien.

Die ständige Einschaltung erfolgt gegen Berechnung von 5 Mark pro Zeile und Jahr.

Im Verlage von **R. Oldenbourg** in **München** und **Leipzig** ist erschienen:

Das internationale
Elektrische Maasssystem
im Zusammenhange mit anderen Maasssystemen

dargestellt von

F. Uppenborn, Ingenieur,

Redacteur des Centralblattes für Elektrotechnik.

2. Auflage.

Lex. 8°. 26 Seiten, brosch. Preis 1.—.

SCHUCKERT & Co.,
Kommandit-Gesellschaft,
Nürnberg.

Elektrische Maschinen für Hand- und Maschinenbetrieb. (16/11)

Anerkannt vortheilhafte Konstruktion für Lehrzwecke.



Electrische & magnetische Messinstrumente
HARTMANN & BRAUN, BOCKENHEIM-FRANKFURT

Vollständige Einrichtungen von Laboratorien

mit Ablese-Fernröhren, aperiodischen Spiegelgalvanometern, Tangentenboussolen, Electrodynamometern, Normal-Widerständen, Präcisions-Rheostaten und Messbrücken, sowie allen Hilfsapparaten.

Erdmagnetische Instrumente nach Professor Kohlrausch.

Optische Gläser, Spectrometer, astronomische Instrumente.

Für technische Zwecke: Ampère- und Voltmeter.

Electr. Pyrometer bis 1000 u. 1500 °Cels. nach Prof. Braun. Telethermometer.

Telephonische Apparate bewährter Systeme u. präciser Ausführung.

Trocken-Accumulatoren für Messzwecke sehr praktisch.

Preisverzeichnisse mit vielen Abbildungen zur Verfügung.

(5/11)

REPERTORIUM

DER

PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN

VON

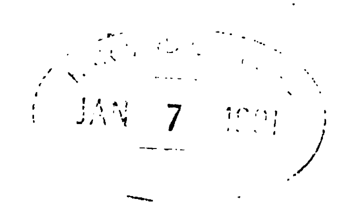
DR F. EXNER,

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT WIEN.

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND.

Inhalt des 12. Heftes.

MÜNCHEN UND LEIPZIG 1890.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.



Thermoelektrische Untersuchungen.

von

P. Bachmetjew.

Unsere Kenntnisse von der Thermoelektricität sind sehr arm, obwohl seit der Entdeckung Sebeck's etwa 70 Jahre verflossen sind. Wir kennen die thermoelektrische Reihe, einige ihrer Eigenschaften, den Einfluss der Erwärmung auf die Grösse und auf die Richtung des thermoelektrischen Stromes; wir kennen sogar die Erscheinung von Peltier; aber es sind vereinzelte Erscheinungen, die keinen näheren Zusammenhang mit einander haben. Die thermoelektrische Reihe ist uns wohl bekannt, aber man hat bezüglich ihrer Vollständigkeit noch vieles zu wünschen übrig, abgesehen von unrichtigen Daten (einige Elemente sind in einer und derselben Reihe mehrere Male zu treffen). Die Erscheinung von Peltier wurde nur bezüglich sehr beschränkter Anzahl von Körpern untersucht. Wann sich die Richtung des Stromes bei weiterer Erwärmung ändert, ist bezüglich der meisten Körper unbekannt, etc. kurz, es fehlt zur Verallgemeinerung einzelner Erscheinungen noch eine ganze Menge experimenteller Daten und es sind die Thatsachen noch nicht entdeckt worden, welche einen mehr allgemeineren Zusammenhang der Thermoelektricität mit den anderen Gebieten der Physik zeigen würden, um die Möglichkeit zu gewinnen, die Theorie der Thermoelektricität aufzustellen.

Auf diese Weise vervollständigt jede neue experimentale Untersuchung in diesem Gebiete — quantitative oder qualitative — die sichtbaren Lücken und vergrössert unsere Kenntnisse von der Umwandlung der Wärme in die Elektricität; einzelne Glieder werden in eine Kette der Naturkräfte gebunden und die Basis der Einheit der Materie und der Einheit der Kräfte wird stärker.

Der folgende Umstand veranlasste mich die thermoelektrischen Untersuchungen zu unternehmen. Im Jahre 1884 fand ich beim Untersuchen des Einflusses der Compression und des Dehnens auf die Magnetisirbarkeit der magnetischen Metalle, dass die Magnetisirbarkeit

des Eisens durch Compression vermindert und durch Dehnen vergrössert wird, jedoch im letzteren Falle nur bis zu einer gewissen Grenze, um sich nachher zu vermindern. Die Magnetisirbarkeit des Nickels wurde durch Compression grösser und durch Dehnen geringer. Diese Einflüsse betrugen zuweilen 100 %. Ein Theil dieser Untersuchungen ist von mir veröffentlicht worden[1]); wobei ich damals den Gedanken ausgesprochen habe, dass sehr stark gespanntes Eisen nach seinen Eigenschaften dem Nickel sehr nahe komme, und umgekehrt, dass sehr stark comprimirtes Nickel die Eigenschaften des Eisens erlange. Es ist wahr, dass diese Eigenschaften nur den Magnetismus betreffen, aber die bemerkenswerthe Uebereinstimmung aller, sowohl der allgemeinen, wie auch einzelner Erscheinungen des Magnetismus führte mich auf den Gedanken, dass diese Analogie ausser den Grenzen der rein magnetischen Erscheinungen hinaus gehen dürfte.

Alles dies veranlasste mich zuerst die elektromotorische Kraft des Thermoelementes zu untersuchen, welches aus sehr stark gespanntem Eisendrahte und aus sehr stark comprimirtem Nickeldrahte bestand. Dabei habe ich folgendes in Erwägung gezogen: wenn das Eisen und das Nickel in den soeben genannten Zuständen einander analog sind, so müsse ein solches Paar eine thermoelektromotorische Kraft = Null besitzen. Wenn dies bestätigt worden wäre, so würden dann die Erscheinungen der Thermoelektricität und des Magnetismus in nahem Zusammenhange mit einander stehen und könnten dann gleichen Gesetzen untergeordnet werden.

Indem ich mir dieses Ziel stellte, habe ich zuerst Vorversuche gemacht, welche ich später in physikalischen Laboratorien der Universitäten Zürich und Sofia fortsetzte.

In der gegenwärtigen Abhandlung ist nur der Einfluss des Dehnens auf die thermoelektrischen Constanten beschrieben worden; was dagegen den Einfluss der Compression anbetrifft, so wird es der Gegenstand der zweiten Abhandlung sein.

Der Einfluss des linearen Spannens der Drähte auf ihre thermoelektromotorische Kraft.

Geschichtliche Uebersicht.

Schon im Jahre 1856 entdeckte Thomson[2]), dass beim Erwärmen der Lothstelle zweier Eisendrähte, von welchen der eine schwach und der andere stark gedehnt ward, ein Strom entsteht, welcher durch die

[1]) Journ. der russ. phys.-chem. Gesellsch.

[2]) Thomson. Phil. Trans. 3. p. 711. 1856.



erwärmte Stelle[1]) von dem schwach gedehnten zu dem stark gedehnten Drahte floss. Beim Comprimiren der Eisendrähte (entweder axial oder transversal) ging der Strom vom nicht comprimirten zum comprimirten Drahte.

Le-Roux[2]) fand hingegen, dass der thermoelektrische Strom vom gedehnten zum nicht gedehnten Eisen- oder Stahldraht geht — ein Resultat, welches demjenigen von Thomson entdeckten entgegengesetzt ist.

Um diesen Widerspruch aufzuklären, wiederholte Cohn[3]) diese Versuche und fand, dass die thermoelektromotorische Kraft mit zunehmender Spannung des Drahtes aus hartem Eisen zunimmt, wobei der Strom vom gedehnten zum nicht gedehnten Drahte fliesst; was dagegen die Stahldrähte anbetrifft, so fliesst der Strom bei schwacher Spannung vom nicht gedehnten zum gedehnten Drahte immer stärker und stärker, wie dies auch bei harten Eisendrähten der Fall ist. Bei starker Spannung wird die elektromotorische Kraft mit zunehmender Spannung vermindert, um nachher schnell zuzunehmen.

Gleichzeitig mit der Abhandlung Cohn's erschien die Arbeit von Tunzelmann[4]), welcher fand, dass bei schwacher Spannung der Eisen- und Stahldrähte der Strom von nicht gedehntem zum gedehnten Drahte fliesst, bei weiterer Spannung jedoch tritt das Umgekehrte ein.

Aus den hier angeführten Arbeiten ist ersichtlich, welche scheinbar widersprechenden Resultate von verschiedenen Physikern erzielt wurden. Cohn bemerkt, dass gespannte Drähte sich verschiedentlich verhalten, je nachdem, ob selbe vorher stark oder schwach gespannt wurden. Unregelmässigkeiten kommen dabei oft vor, was von den verschiedenen Eisensorten abhängt.

Ausser an dem Eisen und Stahl wurden auch an anderen Metallen diesbezügliche Untersuchungen von verschiedenen Physikern angestellt. In dieser Richtung sind die Untersuchungen von Bidwell von besonderer Vollkommenheit, welche er zu seinem Nachweise der Holl'schen Erscheinung benutzte.

Die hier angeführte Tabelle enthält die Resultate, die von verschiedenen Physikern beim Studium des Einflusses der Spannung von Drähten auf die Richtung des thermoelektrischen Stromes erhalten worden sind. Dabei bedeutet „n. g.“, dass der Strom vom nicht gedehnten zum gedehnten Drahte aus einem und demselben Metalle fliesst und „g. n.“ das Umgekehrte.

---

[1]) Weiter wird dieser Ausdruck der Kürze wegen ausgelassen.

[2]) Le-Roux. Ann. de chem. et de Phys. 10. p. 226. 1867.

[3]) Cohn. Jnaug. Diss. Strassburg. 1878.

[4]) Tunzelmann. Chem. Nevs. 37. p. 118. 1878.

Körper	Thomson	Le-Roux	Tunzelmann	Cohn	Tomlinson	Bidwell	Autor
Fe	n. g.	g. n.	n. g.	n. g.	—	n. g.	n. g.
Ni	—	—	—	—	—	g. n.	g. n.
Co	—	—	—	—	n. g.	n. g.	—
Cu	g. n.	n. g.	n. g.	g. n.	—	g. n.	g. n.
Pt	n. g.	g. n.	—	g. n.	—	g. n.	—
Zn	—	n. g.	—	n. g.	—	n. g.	n. g.
Au	—	—	—	—	—	g. n.	—
Ag	—	g. n.	—	g. n.	—	g. n.	—
Al	—	—	—	—	—	n. g.	—
Mg	—	—	—	—	—	g. n.	—
Sn	—	—	—	—	—	g. n.	—
Pb	—	—	—	—	—	0	—

Aus der angeführten Tabelle ist ersichtlich, dass, obwohl die Resultate in den meisten Fällen mit einander übereinstimmen, dennoch auch einige Widersprüche vorkommen; ich will z. B. nur auf die Versuche Le-Roux's bezüglich des Eisens weisen. Im folgenden werden wir sehen, womit man diese scheinbaren Widersprüche erklären kann.

Wie ändert sich die elektromotorische Kraft unter dem Einfluss der Spannung der Drähte des Thermoelementes, welches aus zwei verschiedenen Metallen besteht? — Diese Frage hat bis jetzt kein Physiker untersucht; folglich liegen in dieser Beziehung weder quantitative noch qualitative Daten vor.

Eigene Untersuchungen.

I. Methoden.

Zum Spannen der Drähte diente mir der Apparat, welchen ich in der Abhandlung: „Entstehungsursache des Tones, welcher unter dem Einflusse der intermittirenden Magnetisirung in magnetischen Metallen erzeugt wird“, [1]) beschrieben habe; hier muss ich noch hinzufügen, dass das Verhältnis zwischen dem Kraftarm und dem Widerstandsarm des Hebels 7,77 war. Die Spannkraft des Hebels allein war 12 kg.

Der thermoelektrische Strom wurde mittels eines empfindlichen Galvanometers von Wiedemann gemessen, wobei seine Empfindlichkeit durch Astasiren noch mehr erhöht wurde. Die Ablesung geschah mittels eines Fernrohres und einer Skala.

[1]) Repert. der Phys. XXVI. p. 137. 1890.

Da alle Versuche nur mit den Temperaturen 0° und 100° gemacht wurden (Eis und Wasserdampf), so waren die Ablenkungen der Magnetnadel für einige Thermoelemente sehr gross; um die Ablenkung zu vermindern, floss gleichzeitig durch die andere Spule des Galvanometers ein (compensirender) Strom von einem zweiten Thermoelement (auf der Zeichnung Cu Ni), welches in den meisten Fällen aus Cu Ni bestand, wurde aber zuweilen auch Fe Ni benutzt. Um die Compensation zu reguliren, ging der zweite Strom zuerst durch den Rheostaten R. Die Compensation war nie ganz vollständig, da es auch nicht nothwendig war; in Folge dessen zeigte die Magnetnadel nie 500, sondern schon eine gewisse Ablenkung.

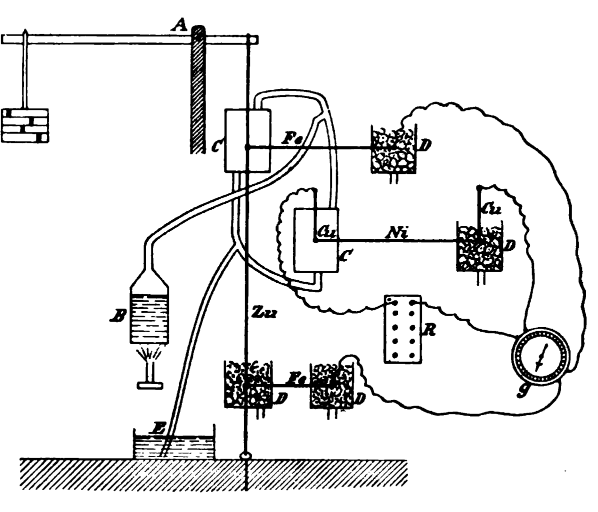


Fig. 1.

Fig. 1 zeigt die schematische Einrichtung der Apparate: *A* — der Apparat zum Spannen, *G* — Galvanometer, *R* — Rheostat, *Ni Cu* — das compensirende Element, *Zn Fe* — das zu untersuchende Element, *B* — das Gefäss mit Wasser, welches den Dampf lieferte, *C*, *C* — die Gefässe mit dem Dampf, welcher von denselben durch den Schlauch in das Gefäss *E* mit kaltem Wasser geleitet war, *D*, *D* — die Gefässe mit dem Eis.

Alle Gefässe waren aus Metall und die Drähte waren von denselben mittels Kautschukpfropfen isoliert. Das Eiswasser konnte durch die im Boden der Gefässe sich befindlichen Röhren abfliessen. Das Zusammenlöthen der Drähte geschah mittels Zinn (mit etwas Blei). Alle Löthstellen, die nicht im Dampfe oder Eise waren, wurden mit Baumwolle umwickelt, um die Nebenströme zu beseitigen. Alle Drähte wurden vor dem Versuch einige Mal gedehnt, wobei die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wurde. Eisendrähte wurden ausserdem ausgeglüht, indem sie vertikal aufgehängt waren, wobei, damit selbe nicht krumm werden, der Draht unten mit Gewichtesteinen belastet ward. Mit jedem Paar wurde eine ganze Versuchsreihe ausgeführt, und die einzelnen Versuche als Controle benutzt.

Der allgemeine Gang der Versuche war folgender: Zuerst wurde der Draht mit einem der grössten Gewichte, welche zu den Versuchen dieser Serie benutzt wurden, ausgedehnt, nachher wurde das Gewicht entfernt und man liess durch die Gefässe *C*, *C* Wasserdampf strömen, während sich in dem Gefässe *D* gestossenes Eis befand; nach Verlauf von 20—30 Minuten, als der Strom constant ward, wurde die Compensation mittels des Rheostaten *R* regulirt; gleichzeitig wurde die Richtung auf der Skala beobachtet, wohin die Ablenkung geschehen würde, wenn die elektromotorische Kraft beim Spannen eines der Drähte des zu untersuchenden Elementes zunehmen würde. In Anbetracht der grossen Wichtigkeit dieses letzteren Umstandes wurden diese Beobachtungen mehrere Male nacheinander gemacht. Nach allen diesen Vorsichtsmassregeln wurde der Hebel losgelassen (im Anfange war derselbe unterstützt) und als die Ablenkung der Magnetnadel eine constante ward, wurde dieselbe abgelesen (in Folge der Dehnung des Drahtes, kühlte sich derselbe ab, und deshalb musste man einige Zeit warten, bis die Löthstellen wieder 100° und 0° angenommen haben); an den Hebel wurde sodann ein bestimmtes dehnendes Gewicht angehängt und wurde die Ablenkung nach Erfüllung der oben erwähnten Vorsichtsmassregeln wieder abgelesen, etc. Die Ablenkungen wurden auch bei der Entfernung der Gewichte abgelesen.

Die Gewichte, die zum Spannen dienten, bestanden aus Bleischeiben und wogen wie folgt:

	Absol. Gewicht:	Spannkraft (berechnet):
1)	2,950 kg	22.92 kg
2)	2,234 „	17,36 „
3)	2 260 „	17,56 „
4)	1,795 „	13,95 „
5)	1,333 „	10,36 „

Die zu untersuchenden Drähte waren in der Länge ca. 1 m und im Durchmesser (2r):

Eisendrähte	2r =	2,17 mm
Kupferdrähte	„	2,94 „
Nickeldrähte	„	2,46 „

Zink stellte ein vierkantiger Stab vor, welcher aus einer Platte ausgeschnitten wurde; sein Querschnitt war im Mittel 39,5 qmm.

Die chemische Analyse dieser Drähte wurde nicht vorgenommen.

II. Resultate.

Zuerst wurden Versuche mit den Paaren gemacht, welche aus einem und demselben Metalle bestanden und zwar aus Eisen, Kupfer, Nickel und Zink.

Die Drähte waren homogen, d. h. wurden von einer und derselben Rolle abgeschnitten und waren beide mit einem und demselben Gewichte gedehnt, damit selbe gerade wurden. (Eisen wurde ausserdem noch ausgeglüht). Trotz allen diesen Massregeln, die gleichen Drähte zu erhalten, gaben selbe beim Wiederholen des Versuches einen Strom, obwohl keiner der Drähte gedehnt wurde. Die Ursache dieser Erscheinung ist wahrscheinlich das wiederholte Spannen eines der Drähte, während der andere nicht gedehnt wurde, oder vielleicht weil sich ein Draht in vertikaler der andere sich aber in horizontaler Lage befand. Eine besonders beträchtliche Differenz wurde bei Eisendrähten beobachtet.

In den unten angeführten Tabellen bedeuten g — Spannkraft in Kilogramm (nicht die Gewichte, welche an den Hebel angehängt wurden, sondern die berechnete Kraft, welche den Draht spannte); J — die Ablenkung der Magnetnadel des Galvanometers bei der bestimmten Spannung (in Skalentheilen).

Tabelle I.

Zn Zn. Keine Compensation.

g:	0	12	35	52,3	69,9	83,8	94,2	0
J:	529	535	538	542	546	551	554	524

Als durch den Galvanometer kein Strom ging, war die Ruhelage 524; folglich, wie die Tabelle zeigt, gab das Paar schon vor der Spannung einen Strom $= 529 - 524 = 5$ Skalenteile. Mit der Zu-

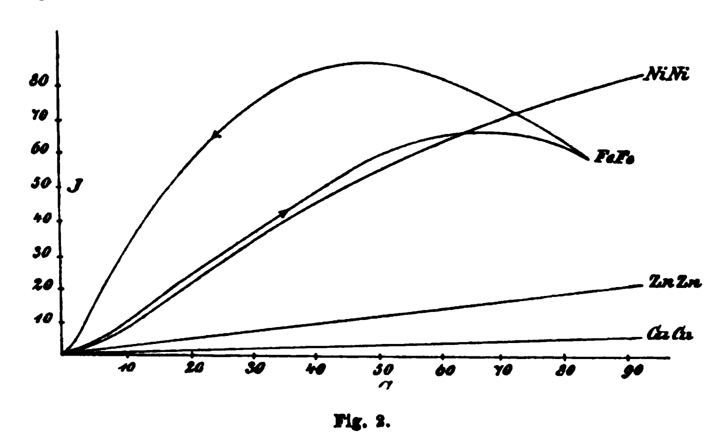


Fig. 2.

nahme der Spannung nimmt der Strom immer mehr und mehr zu, bis derselbe schliesslich bei der Spannkraft $g = 94{,}2$ kg. $554 - 529 = 35$ Skalentheile stark geworden ist. Nach dem Entfernen der Gewichte zeigte die Magnetnadel 524, d. h. fast dasselbe, wie im Anfang (529). Dabei ging der Strom von dem nicht gespannten

zu dem gespannten Drahte (durch die erwärmte Stelle). Wie die graphische Darstellung der Curve (Ordinatenaxe $= J$, Abscissenaxe $= g$) zeigt, ist dieselbe eine gerade (Fig. 2).

Tabelle II.

Ni Ni. Keine Compensation.

g:	94,2	83,8	69,9	52,3	35	12	0
J:	760	768	776	789	807	834	844

Diese Versuche wurden während der allmählichen Entfernung der Gewichte gemacht (und nicht beim Auflegen derselben). Bei der Differenz der Spannkraft 0 — 94,2 kg wurde $J = 844 - 760 = 84$ Skalentheile. Der Strom mit der Spannung ändert sich mehr oder weniger regelmässig. Die Curve ist mit ihrem concaven Theil zur Abscissenaxe zugekehrt (Fig. 2). Der Strom ging von dem gespannten zu dem nicht gespannten Drahte.

Tabelle III.

Cu Cu. Keine Compensation.

Die Differenz der Ablenkungen bei $g = 0$ und $g = 94,2$ macht 6 Skalentheile.

Der Strom ging von dem gespannten zu dem nicht gespannten Drahte.

Besonderes Interesse verdienen aber die Versuche mit Eisendrähten, wie es aus der vorliegenden Tabelle ersichtlich ist.

Tabelle IV.

Fe Fe. $2r = 2,17$ mm. Keine Compensation.

g:	0	12	35	52,3	69,9	83,8
J:	618	630	658	677	683	676
J_1:	614	655	695	700	688	676

J_1 bedeutet hier den Strom, welcher während der Entfernung der Gewichte erhalten worden ist. Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass die Stromstärke mit der Spannung zunimmt, bei gewisser Spannung das Maximum erreicht, um nachher abzunehmen.

Dieses Maximum liegt jedoch beim Auflegen und Entfernen der Gewichte nicht bei einem und demselben spannenden Gewichte. Ueberhaupt haben die Curven, die beim Auflegen und Entfernen der Gewichte erhalten werden, ein ganz anderes Aussehen, wie es z. B. Fig. 2 zeigt.

Der Strom ging vom nicht gespannten zum gespannten Drahte.

Nun wurden jetzt Paare untersucht, die aus 2 verschiedenen Metallen bestanden. Laut den unten angeführten Tabellen wurde das im Anfange jedes Paares stehende Metall gespannt, während das Andere nicht gespannt blieb (z. B. beim Paar Ni Pb wurde Ni gespannt).

Tabelle V.

Ni Pb. Das compensirende Element war Fe Ni.

g:	0	12	35	52,3	69,9	83,8	94,2
J:	658	633	595	560	531	510	503

Der Strom nimmt mit der Spannung zu. Wie die Tabelle zeigt, ist diese Zunahme sehr beträchtlich und zwar durch die

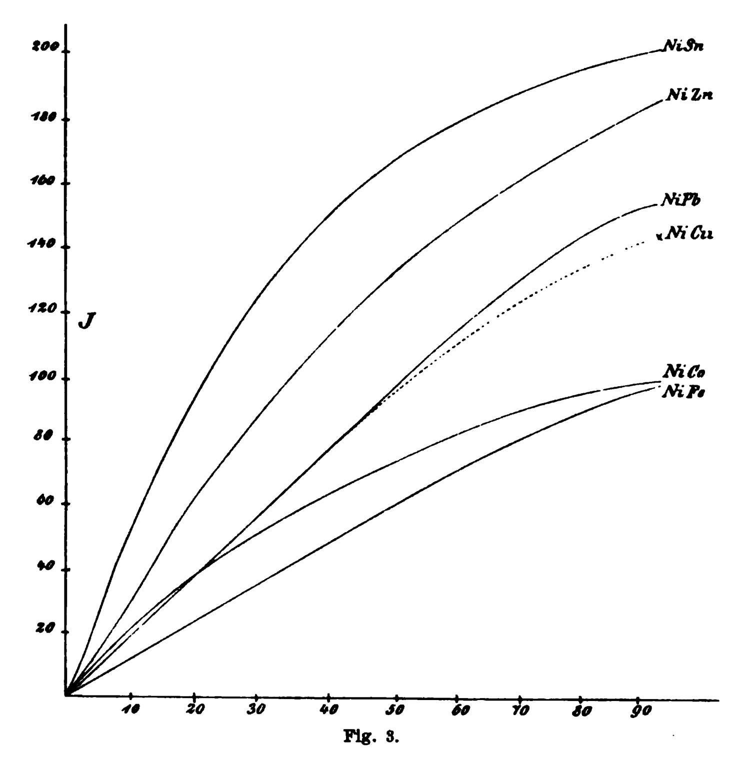


Fig. 3.

Spannung 94,2 kg ist der Strom um 658 — 503 = 155 Skalentheile verstärkt worden. Die Curve ist hier (Fig. 3) mit ihrer concaven Seite zu der Abscissenaxe zugekehrt (wie bei Ni Ni).

Tabelle VI.

Ni Sn. Das compensirende Element war Fe Ni.

g:	94,2	83,8	69,9	52,3	35	12	0
J_1:	566	567	580	597	627	705	765

Der Strom nimmt mit der Spannung zu. (Die Zunahme ist 765 — 566 = 199) und wie es scheint, nähert selbe sich zum Maximum. Die Curve (Fig. 3) ist mit ihrem concaven Teil zur Abscissenaxe zugekehrt.

Tabelle VII.

Ni Co. Keine Compensation. Ruhelage = 834.

g:	0	12	35	52,3	69,9	83,8	94,2
J_1:	205	180	152	132	119	110	106

Der Strom nimmt mit der Spannung zu. (Die Zunahme beträgt 99 Skalentheile). Das Paar Ni Co gibt folglich unter gewöhnlichen Umständen einen Strom = 629. Die Curve ist mit ihrem concaven Theil zur Abscissenaxe zugekehrt (Fig. 3).

Tabelle VIII.

Ni Zn. Das compensirende Element war Fe Ni.

g:	0	12	35	52,3	69.9	83,8	94,2
J:	735	700	632	607	581	552	547
J_1:	730	696	638	602	678	562	547

Der Strom nimmt mit der Spannung zu. (Die Zunahme ist = 188). Die Curve hat das gleiche Aussehen (Fig. 3), wie in der oben erwähnten Tabelle.

Tabelle IX.

Ni Cu. Das compensirende Element Fe Ni.

Der Strom nimmt mit der Spannung zu. Diese Zunahme für Gewichtsdifferenz 0 — 94,2 kg beträgt 145 Skalentheile.

Tabelle X.

Ni Fe. Das compensirende Element Fe Ni.

g:	94,2	83,8	69,9	52,3	35	12	0
J_1:	54	64	82?	95	114	140	155

Der Strom nimmt mit der Spannung zu. (Die Zunahme ist = 101), wobei diese Zunahme der Spannung proportional ist. (Die Curve ist fast eine gerade Fig. 3.).

Tabelle XI.

Cu Ni. Das compensirende Element Ni Cu.

Der Strom nimmt mit der Spannung zu. Diese Zunahme ist für die Spannungsdifferenz 0 — 94,2 kg. 19 Skalentheile.

Tabelle XII.

Cu Fe. Das compensirende Element Ni Cu.

Der Strom nimmt mit der Spannung zu. Die Zunahme für $g = 0 - 94{,}2$ beträgt 22 Skalentheile.

Tabelle XIII.

Cu Sn. Das compensirende Element Ni Cu.

Der Strom nimmt mit der Spannung ab. Die Verminderung für $g = 0 - 94{,}2$ beträgt 17 Skalentheile.

Tabelle XIV.

Cu Co. Das compensirende Element Ni Fe.

Der Strom nimmt mit der Spannung ab. Diese Verminderung für $g = 0 - 94{,}2$ beträgt 8 Skalentheile.

Tabelle XV.

Cu Pb. Das compensirende Element Ni Cu.

Der Strom nimmt mit der Spannung ab. Diese Verminderung für $g = 0 - 94{,}2$ beträgt 16 Skalentheile.

Tabelle XVI.

Cu Zn. Keine Compensation.

Der Strom nimmt mit der Spannung ab. Diese Verminderung für $g = 0 - 94{,}2$ beträgt 10 Skalentheile. Der Strom dieses Paares war unter gewöhnlichen Umständen 57 Skalentheile stark.

Tabelle XVII.

Zn Cu. Keine Compensation.

g:	0	12	35	52,3	69,9	83,8	94,2	0
J:	874	878	885	890	896	900	902	877

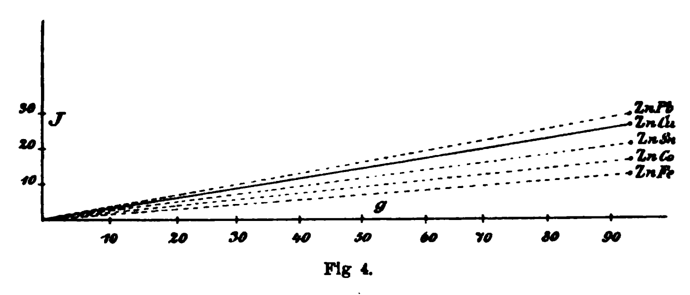


Fig 4.

Der Strom nimmt mit der Spannung zu. Die Zunahme für $g = 0 - 94{,}2$ beträgt 28 Skalentheile. Die Curve ist eine gerade (Fig. 4).

Tabelle XVIII.

Zn Sn. Das compensirende Element Ni Cu.

Der Strom nimmt mit der Spannung zu. Die Differenz für $g = 0 - 94{,}2$ beträgt 23 Skalentheile.

Tabelle XIX.

Zn Pb. Das compensirende Element Ni Cu.

Der Strom nimmt mit der Spannung zu. Diese Zunahme für $g = 0 - 94{,}2$ beträgt in Mittel 33 Skalentheile.

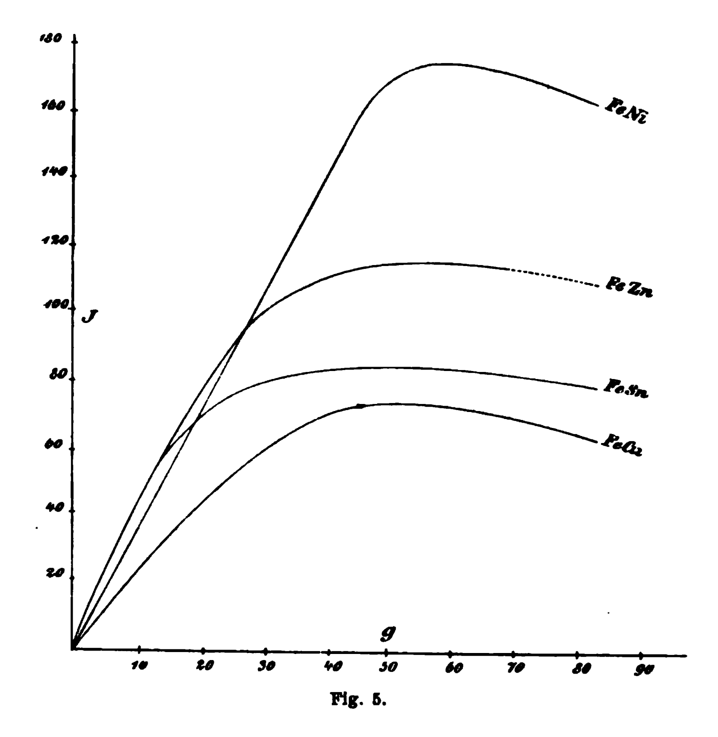


Fig. 5.

Tabelle XX.

Zn Co. Das compensirende Element Ni Fe.

Der Strom nimmt mit der Spannung zu. Diese Zunahme für $g = 0 - 94{,}2$ beträgt 18 Skalentheile,

Tabelle XXI.

Zn Fe. Das compensirende Element Ni Cu.

Der Strom nimmt mit der Spannung ab. Diese Verminderung für $g = 0 - 94{,}2$ beträgt 14 Skalentheile.

Ein besonderes Interesse verdienen die Paare aus Eisen und einem anderen Metalle, z. B.

Tabelle XXII.

Fe Pb. Das compensirende Element Ni Fe.

g:	0	12	35	52,3	69,9	83,8
J:	790	840	**902**	900	885	874

Der Strom nimmt mit der Spannung **ab**, wobei diese Verminderung ein gewisses Minimum erreicht um nacher wieder zuzunehmen.

Tabelle XXIII.

Fe Ni. Das compensirende Element Ni Fe.

g:	0	12	35	52,3	69,9	83,8
J:	440	475	567	**618**	616	610

Der Strom nimmt mit der Spannung zu. Diese Zunahme erreicht bei $g = 52{,}3$ ein Maximum, um nachher langsam abzunehmen (Fig. 5).

Tabelle XXIV.

Fe Co. Das compensirende Element Ni Fe.

g:	0	12	35	52,3	69,9	83,8
J:	196	199	**204**	200	198	191

Der Strom nimmt mit der Spannung zu. Diese Zunahme erreicht bei $g = 35$ ein Maximum, nachher aber fängt der Strom an, sich zu vermindern (Fig. 5).

Tabelle XXV.

Fe Sn. Das compensirende Element Ni Cu.

g:	83,8	69,9	52,3	35	12	0
J_1:	893	896	**900**	895	867	812

Der Strom nimmt mit der Spannung zu. Diese Zunahme erreicht bei $g = 52{,}3$ ein Maximum, wonach der Strom zu fallen anfängt (Fig. 5).

Tabelle XXVI.

Fe Cu. Das compensirende Element Ni Cu.

y:	83,9	69,9	52,3	35	12	0
J_1:	215	225	**230**	220	184	154

Der Strom nimmt mit der Spannung zu. Diese Zunahme erreicht bei $g = 52{,}3$ ein Maximum, wonach der Strom zu fallen beginnt (Fig. 5).

Tabelle XXVII.

Fe Zn. Das compensirende Element Ni Fe.

g;	0	12	35	52,3	69,9
J:	490	542	603	**613**	609

Der Strom nimmt mit der Spannung zu, erreicht bei $g = 52{,}3$ sein Maximum und nimmt bei weiterer Spannung ab (Fig. 5).

Thermoelemente, welche aus anderen Metallen, als den hier angeführten zusammengesetzt waren, sind nicht untersucht worden.

III. Verallgemeinerungen.

a) Die Richtung des thermoelektrischen Stromes in einem Paare.

Wie aus dem vorstehend angeführten Materiale zu ersehen ist, haben die gefundenen Resultate einen ganz verschiedenen Charakter: in einem Falle nimmt die elektromotorische Kraft mit der Spannung eines der Drähte zu, im anderen Falle dagegen ab; in einem Falle erreicht diese Aenderung ein Maximum, während man in anderen Fällen kein Ende erkennen kann, etc.

Wenn diese Erscheinungen einem allgemeinen Gesetze folgen, so müsste man dies unzweifelhaft in der chemischen Natur dieser Körper selbst suchen. Von den chemischen Constanten sind am besten die Atomgewichte der Elemente untersucht, welche ihrerseits den besten Ausdruck in dem periodischen System von Mendelejew gefunden haben. An dieses System wollen wir uns nun halten.

Bevor wir die hier beschriebenen Erscheinungen betrachten, wollen wir zuerst versuchen für die Richtung des thermoelektrischen Stromes in der thermoelektrischen Reihe ein allgemeines Gesetz aufzustellen.

Die vollständigste thermoelektrische Reihe ist von Sebeck (1823) angegeben worden:

(—) Bi, Ni, Co. Pd, Pt, Ur, Cu, Mn, Ti, Hg, Pb, Sn, Pt, Cr, Mo, Cu, Rh, Jr, Au, Ag, Zn, W, Cd, Fe, As, Sb, Te (+).

Die Stromrichtung geht hier von dem vorhergehenden (—) zu dem nachfolgenden (+) Elemente.

Wenn man diese Reihe mit derjenigen der chemischen Elemente (der schon entdeckten und noch zu entdeckenden), welche ihrem Atomgewichte nach folgen, vergleicht, so kann man sehr leicht die folgende Regelmässigkeit bemerken: die Richtung des thermoelektrischen Stromes zwischen den benachbarten Elementen des periodischen Systems ändert sich periodisch nach den Reihen der beiden Paare. Als Beispiel nehmen wir Fe, Co, Ni, Cu, Zn. Wie die Reihe von Sebeck zeigt, geht hier der Strom von Co zu Fe und von Ni zu Co; wir haben hier also zwei gleiche Richtungen (links). Nachher aber geht der Strom von Ni zu Cu und von

Cu zu Zn, folglich haben wir wieder zwei gleiche Richtungen (rechts), aber jetzt entgegengesetzte, also die Ersten (Fig. 6).



Fig. 6.

Von allen Richtungen, welche die Reihe von Sebeck angibt, stimmen nur 3 mit dieser Regelmässigkeit (Fig. 7) nicht überein und

Fig. 7.

zwar: die Richtung zwischen Cr und Mn, zwischen Pt und Au und zwischen Au und Hg. Dass die Richtung für Au dieser Regel nicht folgt, hängt wahrscheinlich davon ab, dass das Gold bei jenen

Versuchen nicht chemisch rein war; es ist aber bekannt, was für einen starken Einfluss selbst minimale Beimischungen auf physikalische Eigenschaften des Goldes haben. Was die Richtung zwischen Cr und Mn anbetrifft, so ist es möglich, dass selbe auch eine entgegengesetzte sein würde, wenn diese Metalle ganz wären und sich unter gleichen Umständen befinden würden, (es ist nämlich möglich, dass Cr bei Sebeck kristallinisch war).

Auf diese Art sollte die Richtung des Stromes beim Thermoelement Jn Sn von Sn zu Jn gehen, was auch in der That von Erhard[1]) gefunden worden ist. Die Richtung beim Thermoelement Di Ce sollte von Di zu Ce und beim Thermoelement Ce La von Ce zu La gehen; den Beweis dieser Vermuthung findet man in der Arbeit von Hillebrand und Narton[2]).

Noch ein Umstand kann als Controle dieses Gesetzes dienen, von welchem weiter unten Erwähnung geschieht.

Wollen wir jetzt versuchen, für die Richtung des Stromes, welcher bei der Spannung eines der Drähte des Termoelementes, bestehend aus einem und demselben Metalle, erzeugt wird, ein Gesetz zu finden. Zu diesem Zwecke bedienen wir uns desselben periodischen Systems der Elemente.

Nehmen wir an, dass rechts von jedem Elemente dasselbe Element sich befindet, aber in ausgedehntem Zustande, z. B. (Fig. 8) *a* bedeutet ausgedehntes Mangan (Mn), *b* ausgedehntes Fe, *c* ausgedehntes Co etc. Bezeichnen wir nun die Richtung des Stromes zwischen dem Elemente im normalen und im ausgedehnten Zustande durch blosse Pfeile (mit den gefederten Pfeilen ist die Richtung des Stromes bei dem Thermoelemente bezeichnet, welches aus 2 verschiedenen Metallen besteht), so finden wir, dass die Richtung des ersteren Stromes stets ein entgegengesetztes Vorzeichen hat als der Strom des Paares, welches aus demselben Metall und seinem Nachbar zur Rechten gebildet ist, so dass sich derselbe auch periodisch ändert. Z. B. der Strom geht im Paare Fe Co von Co zu Fe, während beim Paar Fe Fe (ein Draht ist ausgedehnt) von Fe zu *b*, d. h. entgegengesetzt. Beim Paare Ni Cu geht der Strom von Ni zu Cu, während beim Paare Ni Ni von *d* zu Ni, etc.

Die Resultate der Untersuchungen von Bidwell stimmen für alle untersuchten Elemente überein, mit Ausnahme von Pt.

1) Erhard, Wied. Ann. 14. S. 504. 1881.
2) Hillebrand und Narton. Pogg. Ann. 156. S. 474. 1875.



In diesem Umstande haben wir auch eine neue Bestätigung für das eben gefundene Gesetz, die thermoelektrische Reihe betreffend. Und in der That stimmen die Richtungen bei Paaren Mg Mg und Al Al. welche Bidwell gefunden hat, vollkommen mit den Richtungen des Stromes (vorausbestimmten) bei Paaren Mg Al und Al Si überein (d. h. sie sind den letzteren entgegengesetzt gerichtet).

Es wäre deshalb interessant, in dieser Beziehung einige Versuche über die Richtung des Stromes bei Paaren zu machen, welche aus einem und demselben Metalle zusammengesetzt sind, wobei ein Draht ausgedehnt werden muss (z. B. Cd Cd, Sb Sb, Pd Pd etc.; bei diesen Paaren sollte der Strom vom nicht gedehnten zu dem gedehnten Cd, vom gedehnten zum nicht gedehnten Sb, vom gedehnten zum nicht gedehnten Pd, etc. gehen).

Es ist möglich, dass dieses Gesetz bei Anhäufung der Thatsachen in diesem oder jenem Sinne modificirt wird, aber es wird dennoch mit dem periodischen System der Elemente verbunden sein. Meine Aufgabe wird erfüllt sein, wenn es mir gelingen wird das Interesse zu solchen Untersuchungen zu erwecken.

b) Analogie zwischen thermoelektrischen und magnetischen Eigenschaften.

In dem vorhergehenden Kapitel wurde der Zusammenhang der thermoelektrischen Erscheinungen mit dem Atomgewicht dargelegt. Wenn wir jetzt die Abhängigkeit der magnetischen (paramagnetischen und diamagnetischen) Erscheinungen vom periodischen System in Betracht ziehen[1]), so wird uns die Analogie der thermoelektrischen und magnetischen Erscheinungen ganz klar werden.

Und in der That nimmt die Stromstärke beim Paar Fe Fe mit der Spannung eines der Drähte bis zu einem Maximum zu, um sich bei weiterer Spannung zu vermindern. Die Magnetisirbarkeit des Eisens nimmt mit der Spannung auch zu, erreicht ein Maximum, um nachher mit steigender Spannung abzunehmen. Diese Analogie trägt nicht nur den qualitativen Charakter, sondern ist auch quantitativ giltig. Durch die von mir in dieser Richtung gemachten Versuche wurde erwiesen, dass das Maximum der elektromotorischen Kraft beim Fe Fe und das Maximum der Magnetisirbarkeit beim Fe durch Spannen desselben mit einem und demselben Spannungsgewicht auftritt[2]). (Die Drähte in beiden Fällen müssen natürlich gleich dick sein.) Diese Analogie betrifft

1) Repert. der Phys. Bd. 26. S. 557. 1890.

2) Journ. der russ. phys.-chem. Gesellsch. 18. S. 47. 1886.

nicht nur die allgemeinen Erscheinungen, sondern auch die Details, so z. B. wie die Tabelle IV (Fig. 2) zeigt, ändert sich die thermoelektromotorische Kraft beim Auflegen und beim Entfernen der Gewichte nicht gleich stark, und zwar sind ihre Werthe beim Auflegen der Gewichte grösser, als bei der Entfernung derselben. Dieselbe Erscheinung wurde sehr oft von anderen Physikern auch beim Untersuchen des Magnetismus der gespannten Eisendrähte beobachtet, z. B. von Ewing.

Bei anderen Metallen, die nicht in der Nähe des Wendepunktes liegen (siehe die Curve im Rep. d. Phys., Bd. 26, S. 557, 1890), erreicht sowohl der Magnetismus wie auch die thermoelektromotorische Kraft bei der Spannung kein Maximum, z. B. der Magnetismus des Nickels und die elektromotorische Kraft beim Paare Ni Ni. Dieser Umstand spricht auch für die Analogie der thermoelektrischen und magnetischen Erscheinungen.

Auf dieselbe Art soll die elektromotorische Kraft, z. B. des Paares Bi Bi, gestützt auf diese Analogie, beim Comprimiren eines der Drähte das Maximum erreichen, um mit weiterem Comprimiren abzunehmen. Die künftigen Untersuchungen werden entscheiden, ob diese Vermuthung richtig ist.

c) Die Aenderung der thermoelektromotorischen Kraft eines Paares unter dem Einflusse der Spannung der dasselbe zusammensetzenden Metalle.

Die Resultate, welche durch die vorliegende Untersuchung gewonnen worden sind, kann man in folgender Weise zusammenstellen, wobei das Zeichen + die Zunahme und — die Abnahme der thermoelektromotorischen Kraft bedeutet; die Metalle, welche die vertikale Reihe enthält, wurden gedehnt, während die der horizontalen Reihe ungeändert geblieben sind (das Paar bestand aus einem Metall der horizontalen Reihe und aus einem andern der vertikalen Reihe).

Körper	Fe	Ni	Cu	Zn	Sn	Pb	Co
Fe		+	+	+	+	—	+
Ni	+		+	+	+	+	
Cu	+	+		—	—	—	—
Zn	—		+		+	+	+

Um zu erklären, warum die elektromotorische Kraft bei der Spannung eines der Drähte eines Thermoelementes in einem Falle zunimmt, im andern dagegen abnimmt, wollen wir uns zu der Curve,

welche die Abhängigkeit der magnetischen Eigenschaften der Elemente von ihrem Atomgewichte darstellt (Fig. 1[1]), wenden. Wir wollen zuerst die Aenderung der thermoelektromotorischen Kraft beim Paar FeFe untersuchen. Wie Tabelle IV zeigt, wächst hier die elektromotorische Kraft mit der Spannung bis zum Maximum, um nachher abzunehmen; ausserdem geht der Strom vom nicht gedehnten zum gedehnten Eisen. Da bei einem bestimmten dehnenden Gewichte die elektromotorische Kraft abzunehmen anfängt, kann man annehmen, dass die Verminderung infolge der entgegengesetzten Ströme vor sich geht, welche bei weiterer Spannung erzeugt werden. Wir wollen diesen Gedanken auf der Fig. 9 klar machen (hier ist nur die Gruppe IV der Klarheit wegen dargestellt).

Wenn man das Paar Fe a (a bedeutet schwach gespanntes Eisen) hat, so geht der Strom Fe zu a; beim Paar Fe a, bleibt die Richtung des Stromes dieselbe, die Stromstärke nimmt aber zu; beim Paar Fe A bleibt die Richtung des Stromes noch immer dieselbe, die Stromstärke erreicht aber schon ein Maximum. Wenn man jetzt das Paar Fe a_2 nimmt, so wird die Stromstärke schwächer, obwohl die Richtung dieselbe bleibt; infolgedessen kann man vermuthen, dass zwischen A und a_2 ein Strom von a_2 zu A cirkulire, d. h. ein gerade dem Hauptstrome entgegen gesetzter, welch letzterer dadurch natürlich schwächer werden muss. Um diese Vermuthung zu bestätigen, sind direkte Versuche ausgeführt worden, welche auch gezeigt haben, dass solche Ströme wirklich vorhanden sind. (Zu diesem Zwecke wurden die Thermoelemente a_1 A und Aa_2 untersucht.)

Dieser Umstand erklärt vollständig die im Anfang dieser Abhandlung angeführten Untersuchungen des Paares Fe Fe von verschiedenen Physikern, welche scheinbar so verschiedene Resultate erhalten haben.

Alles erklärt sich nämlich damit, dass Thomson das Paar aa_1 („vom schwach gedehnten zum stark gedehnten Eisendrahte") untersuchte; Le Roux untersuchte das Paar Aa_2; Tunzelmann hatte zuerst mit den Paaren Fe a, Fe a_1 etc. zu thun und nachher bei der weiteren Spannung mit dem Fe a_3 (der Neutralpunkt, d. h. es war bei diesem Paar kein Strom) und Fe a_4 („der Strom änderte seine Richtung").

Wir wollen nun die anderen von mir untersuchten Paare betrachten, und zwar zuerst Fe mit den anderen Metallen.

Bei allen Paaren: Fe Co, Fe Ni, Fe Cu, Fe Zn, Fe Sn nimmt die elektromotorische Kraft mit der Spannung zu, erreicht das Maximum,

1) Repert. der Phys. Bd. 26, S. 557. 1890.

um bei weiterer Spannung abzunehmen. Eine einzige Ausnahme macht nur Fe Pb, bei welchem Paar die elektromotorische Kraft mit der Spannung abnimmt.

Diese Erscheinungen kann man sehr leicht erklären, wenn man die oben erwähnten Nebenströme zulässt. Fangen wir mit dem Fe Co an.

Der Strom geht, wie die Reihe von Sebeck zeigt, von Co zu Fe und besteht aus 2 Strömen: Co A und Fe A[1] (Fig. 9), welche eine einander entgegengesetzte Richtung haben, so dass:

$$\text{Co Fe} = \text{Co A} - \text{Fe A};$$

daraus ist es klar, dass, wenn der Strom Fe A kleiner wird, so nimmt der Strom Co Fe zu. Beim Spannen des Eisens geschieht ja das nämliche: zuerst fällt der negative[2]) Nebenstrom Fe a aus, dann aa_1 etc. Ebenso leicht ist es aus der angeführten Gleichung zu ersehen, dass der Strom Co Fe dann ein Maximum erreicht, wenn Fe A = 0 ist. Bei weiterer Spannung des Eisens nimmt der Strom ab, da dann die positiven Ströme $a_2 A$, $a_3 a_2$ etc. ausfallen.

Das Paar Fe Ni:

Der Strom geht (Sebeck) von Ni zu Fe. Folglich nach dem oben erwähnten:

$$\text{Ni Fe} = \text{Ni A} - \text{Fe A}.$$

Hier haben wir das Gleiche, wie in dem vorhergehenden Paare. Der Strom des Paares Ni Fe wird ein Maximum werden, wenn Fe A = 0 ist; Fe A kann man aber sehr leicht gleich Null machen, wenn man das Eisen dehnt, wobei die negativen Ströme: $\text{Fe}a_1$, aa_1 etc. ausfallen werden, dann aber bleibt nur Ni A, welcher Strom eben das Maximum repräsentirt. Bei weiterem Spannen des Eisens werden die positiven Ströme: $a_2 A$, $a_3 a_2$ etc. ausfallen und Ni Fe nimmt ab.

Paare: Fe Cu, Fe Zn, Fe Sn:

Hier kann man dasselbe, wie oben, anwenden und daher muss bei diesen Paaren eine Zunahme der elektromotorischen Kraft beim Spannen des Eisens stattfinden. Die einzige Ausnahme, wie gesagt,

---

1) Hier und weiter unten sind die Bestandtheile des Paares so geschrieben, dass der Strom immer vom ersten Theil zum zweiten geht (von Co zu A, von Fe zu A, etc.). Natürlich geht es die oben erwähnten 32 Paare nicht an, bei welchen das erste Element immer gedehnt wurde und folglich die Richtung des Stromes unberücksichtigt geblieben ist.

2) Das Wort „negativ" gebrauche ich hier im Sinne: „der entgegengesetzte dem Hauptstrome" und das Wort „positiv" im Sinne: „gleich gerichteter mit dem Hauptstrome".



bildet das Paar Fe Pb, was wahrscheinlich von irgend welchen Nebenumständen herrührt, die von mir nicht näher untersucht worden sind.

Auf diese Art, wenn bei allen diesen Paaren der Strom FeA die Hauptrolle spielt, so müssen auch die Curven, welche die Aenderung der elektromotorischen Kraft durch Spannen des Eisens zeigen, ein mehr oder weniger gleiches Aussehen, wenn nicht eine vollständige Identität (wenn alle Werthe in absoluten Einheiten ausgedrückt wären) haben, was auch in der That beobachtet wird. Alle Curven sind mit ihrem concaven Theil zur Abscissenaxe zugekehrt, alle besitzen das Maximum und sind einander vollständig ähnlich. Dieses Maximum liegt bei allen Curven bei einem und demselben Spanngewichte ($g = 52{,}3$).

Wenden wir uns jetzt zu den Paaren: Ni Fe, Ni Cu, Ni Zn, Ni Sn, Ni Pb. Die elektromotorische Kraft aller dieser Paare nimmt mit dem Spannen des Nickels zu, jedoch, wie es scheint, ohne ein Maximum zu erreichen.

Das Paar Ni Fe:

Der Strom geht von Ni zu Fe; folglich:

$$\text{Ni Fe} = \text{Ni A} - \text{Fe A}.$$

Hier bleibt Fe A constant, da weder Fe noch A gedehnt werden, verändert wird aber nur Ni A. Beim Spannen des Nickels wird zu dem Strome Ni A der positive Strom c Ni[1]) addirt, welcher denselben auf diese Art vergrössert und folglich muss auch der Strom des Paares Ni Fe mit dem Spannen des Nickels zunehmen.

Das Paar Ni Cu:

Der Strom geht von Ni zu Cu. Da der negative Strom c Ni vorhanden ist, so haben wir eine folgende Gleichung:

$$\text{Ni Cu} = \text{c Cu} - \text{c Ni}.$$

Daraus ist es ersichtlich, dass mit der Verminderung des Stromes c Ni der Strom Ni Cu zunehmen wird; es findet in der That beim Spannen des Nickels statt, da dann (Fig. 9) der negative Strom c Ni ausfällt, und wir haben nur das Paar c Cu.

Die Paare: Ni Pb, Ni Sn, Ni Zn.

Bei allen diesen Paaren geht der Strom von Ni zu dem nachfolgenden Elemente und deshalb wird hier überall nur der negative Strom c Ni die Rolle spielen, welcher mit dem Spannen des Nickels

1) Dass der Strom cNi vorhanden ist und ein positiver wird, zeigt die Tabelle II aus welcher ersichtlich ist, dass der Strom vom gedehnten (*c*) zum nicht gedehnten Nickel (Ni) geht.



abnimmt, so dass schliesslich, nach dem oben Erwähnten, mit dem Spannen des Nickels eine Zunahme der elektromotorischen Kraft erhalten wird.

Betrachten wir die Paare: Zn Fe, Zn Cu, Zn Su, Zn Pb, Zn Co. Nur bei dem ersten Paar nimmt der Strom mit der Spannung des Zinkes ab, bei den übrigen dagegen nimmt derselbe zu.

Das Paar Zn Fe:

Der Strom geht von Zn zu Fe. Da ein negativer Strom Zn d (Fig. 7) vorhanden ist, wird die elektromotorische Kraft dieses Paares desto schwächer, je stärker dieser Strom (Zn d) ist, mit anderen Worten, je stärker das Zink gedehnt wird, was auch in der Wirklichkeit beobachtet wird.

Das Paar Zn Cn:

Der Strom geht von Cn zu Zn. Beim Spannen des Zinks kommt der positive Strom Zn d zum Vorschein, welcher den Hauptstrom verstärkt.

Die Paare: Zn Sn, Zn Pb:

Da bei diesen Paaren der Strom von Sn und Pb zu Zn geht, und zwar, gestützt auf das Schema Fig. 7, links (da Sn und Pb viel weiter liegen als Zn), so hat der Nebenstrom Zn d (Fig. 7), welcher beim Spannnen des Zinkes entsteht, negativen Charakter, und indem er nach und nach stärker wird, verstärkt derselbe die elektromotorische Kraft dieser beiden Paare.

Diese Erscheinung kann man durch folgende Gleichungen ausdrücken:

Für das Paar Zn Sn:

$$\text{Sn Zn} = \text{Sn d} - \text{Zn d};$$

für das Paar Zn Pb:

$$\text{Pb Zn} = \text{Pb d} - \text{Zn d};$$

wo Zn d eine variable Grösse ist.

Das Paar Zn Co:

Der Strom geht von Co zu Zn. Wie es aus der Fig. 8 ersichtlich ist, wird der Nebenstrom Zn d, der beim Spannen des Zinkes

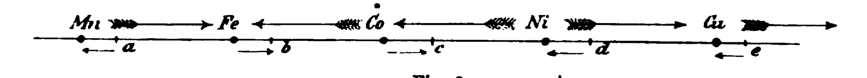


Fig. 8.

entsteht, positiv sein und daher wird derselbe die elektromotorische Kraft des Paares Zn Co verstärken.



Zum Schluss betrachten wir die Paare: Cu Fe, Cu Ni, Cu Zn, Cu Sn, Cu Pb und Cu Co. Bei den ersten zwei Paaren nimmt der Strom mit dem Spannen des Kupfers zu, bei allen übrigen nimmt derselbe ab.

Das Paar Cu Fe:

Der Strom geht von Cu zu Fe. Wie es aus dem Schema der Fig. 8 ersichtlich ist, ist der Nebenstrom e Cu, der beim Spannen des Kupfers entsteht, positiv und er wird folglich mit dem Hauptstrome addirt, um denselben stärker zu machen.

Das Paar Cu Ni:

Da der Strom hier vom Ni zu Cu geht, so ist der Nebenstrom e Cu negativ und daher sollte die elektromotorische Kraft beim Spannen des Kupfers des Elementes Cu Ni abnehmen, was jedoch der Wirklichkeit widerspricht (Tabelle XI). Wahrscheinlich spielten hier die Rolle irgend welche Nebenursachen, jetzt aber, als die Untersuchung schon längst abgeschlossen ist, während die Erklärung dieser Erscheinungen später gefunden worden ist, bin ich nicht im Stande, diese Ursachen hervorzuheben.

Das Paar Cu Co:

Der Strom geht von Co zu Cu. Folglich ist der Nebenstrom e Cu negativ, und indem derselbe mit dem Spannen des Kupfers zunimmt, vermindert er die elektromotorische Kraft unseres Paares.

Das Paar Cu Pb:

Der Strom geht von Pb zu Cu. Folglich ist der Nebenstrom e Cu positiv, aber da derselbe mit dem Spannen des Kupfers nach und nach abnimmt, so wird die elektromotorische Kraft auch abnehmen. Das kann man mit der folgenden Gleichung ausdrücken:

$$\text{Pb Cu} = \text{Pb e} - \text{e Cu},$$

wo e Cu eine variable Grösse ist, welche mit dem Spannen des Kupfers abnimmt.

Das Paar Cu Sn:

Der Strom geht von Sn zu Cu. Hier haben wir dasselbe, wie beim oben angeführten Paare. Die Gleichung ist:

$$\text{Sn Cu} = \text{Sn e} + \text{e Cu}.$$

Mit der Verminderung von e Cu wird die elektromotorische Kraft unseres Paares natürlich auch abnehmen.

Das Paar Cu Zn:

Die Aenderung der elektromotorischen Kraft bei diesem Paar macht eine Ausnahme, welche *sicher* von den Nebenumständen

abhängt, und zwar ist es beobachtet worden, dass die Stromrichtung bei diesem Paar ein Mal von Cu zu Zn, das andere Mal dagegen umgekehrt war; es hing davon ab, ob der Kupferdraht vertikal und der Zinkstab horizontal oder umgekehrt sich befanden. Von was diese Erscheinung ihrerseits abhing, ist nicht bekannt. Wenn man annimmt, wie es zuweilen gewesen ist, dass der Strom von Zn zu Cu geht, so wird die Verminderung der elektromotorischen Kraft mit dem Spannen des Cu uns dann begreiflich sein; diese Erscheinung wird dann, wie bei oben erwähnten Paaren, mit der folgenden Gleichung ausgedrückt:

$$\mathrm{Zn\,Cu} = \mathrm{Zn\,e} - \mathrm{e\,Cu},$$

wo die elektromotorische Kraft unseres Paares mit der Verminderung e Cu abnimmt. Jedenfalls herrscht über dieses Paar ein gewisser Zweifel.

Es bleibt mir noch zu sagen, dass alle Curven, die die Abhängigkeit der Aenderung der elektromotorischen Kraft vom Spannen

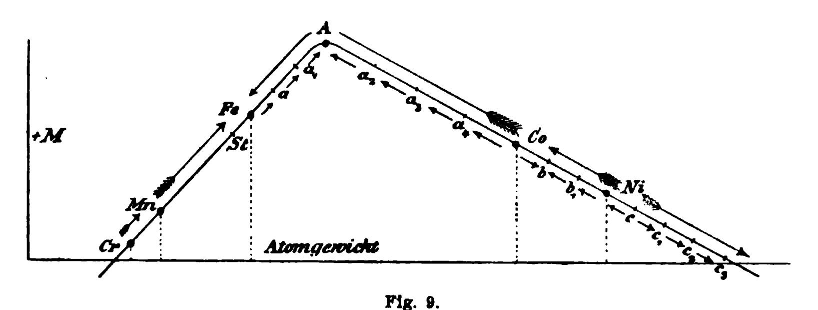


Fig. 9.

bei Paaren Zu M[1]) zeigen, das gleiche Aussehen haben, wie es auch aus dem oben Erwähnten folgt. Dasselbe betrifft auch die Paare Cu M und Ni M.

Also aus 22 Paaren machen vorläufig nur 2 (Fe Pb und Cu Ni) eine Ausnahme und konnten, gestützt auf das von mir vorgeschlagene System nicht erklärt werden, die künftigen Untersuchungen werden zeigen, wo der Fehler lag. Eine so gelungene Erklärung der Aenderung der elektromotorischen Kraft bei verschiedenen Paaren unter dem Einfluss der Spannung der Bestandtheile spricht schwerwiegend zu Gunsten des von mir vorgeschlagenen Schemas, welches auf der Fig. 9 dargestellt ist, wie auch des Schemas für den Magnetismus der Körper, welches ich früher[2]) vorgeschlagen habe.

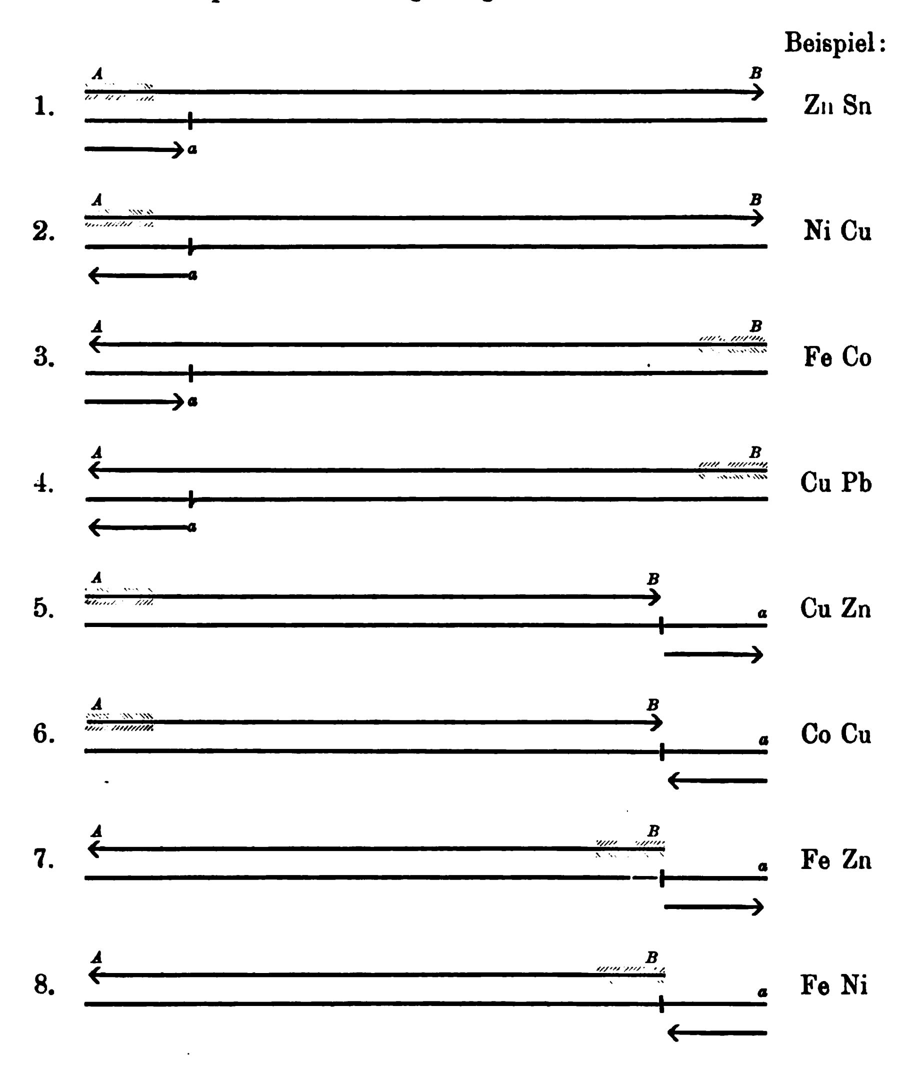
Bevor ich weiter übergehe, muss ich früher die Nebenströme besprechen, sowohl die positiven, wie auch die negativen, welche, wie

1) M bedeutet hier irgend ein Metall.

2) Rep. der Phys. Bd. 26, S. 557. 1890.

wir gesehen haben, eine so grosse Rolle in der Erklärung der hier untersuchten Erscheinungen spielen.

Es können nur 8 verschiedene Fälle vorkommen, wo diese Nebenströme beim Spannen in Thätigkeit gerathen.



Hier bedeuten *A* und *B* zwei Elemente, aus welchen das Paar zusammengesetzt ist, und welche ihrem Atomgewichte nach in zunehmender Reihe folgen. In den ersten 4 Fällen wird nur *A*, während in den letzten 4 Fällen nur *B* gedehnt wird; *a* bedeutet die Stelle, bis zu welcher *A* oder *B* gedehnt wird, mit anderen Worten dasjenige Gewicht, mit welchem das Spannen ausgeführt wurde, .indem

man A oder B für Null annimmt (d. h. A oder B ist das nicht gedehnte Metall.

In den ersten 4 Fällen beim Spannen von A nähern sich die Elemente gegen einander, während in den letzten 4 Fällen selbe sich von einander entfernen, und zwar beim Spannen von B.

Im ersten und vierten Falle sind die Nebenströme (Aa) beim Spannen von A positiv, d. h. sie haben dieselbe Richtung mit dem Hauptstrome (AB) und da selbe sich zwischen A und B befinden, so werden selbe beim Nähern von A zu B vermindert, was die Verminderung des Hauptstromes zur Folge haben muss.

Im zweiten und dritten Falle sind die Nebenströme (Aa) beim Spannen von A negativ, und indem selbe sich zwischen A und B befinden, werden selbe beim Nähern von A zu B abnehmen. Die Folge davon ist jene, dass der Hauptstrom bis zu einem Maximum zunimmt, um nachher abzunehmen und $= 0$ zu werden, und zwar sobald A mit B zusammenfallen.

Im fünften und achten Falle sind die Nebenströme (aB) positiv und da selbe sich auf jener Seite, wohin B gedehnt wird, befinden, werden sie beim Spannen des B zu dem Strome AB addirt, um denselben auf diese Art zu verstärken.

Im sechsten und siebenten Falle sind die Nebenströme (aB) negativ und werden beim Spannen des B auch zu dem Hauptstrome addirt; da dieselben aber negativ sind, so vermindern selbe den Hauptstrom.

Indem wir diese Erklärungen für mehr als wahrscheinlich betrachten, um so mehr als dieselben ihren Grund in dem periodischen System haben, könnte man die Aenderung der elektromotorischen Kraft bei noch nicht untersuchten Paaren voraussagen. Ich werde mich nur mit einigen Paaren begnügen, welche als Beispiele dienen können.

Die Zunahme der elektromotorischen Kraft wird beim Spannen des ersten Metalls bei:

Su Jn, Rh Pd, Ag Cu, Sn Cd, Fe Pt, etc. sein,

während die Abnahme bei:

Ag Sn, Ag Sb, Fe Sb, Ni Bi, Zn Sb etc.

constatirbar sein wird.

Es wäre daher nicht ohne Interesse, diese Paare von diesem Standpunkt zu untersuchen.



Stellt man die Resultate der gegenwärtigen Abhandlung, welche auf dem experimentellen Wege erhalten worden sind, zusammen, so erhält man:

1) Der Strom geht bei dem Paare Fe Fe vom nicht gedehnten zum gedehnten Fe, wobei seine Stärke bei einem bestimmten spannenden Gewichte ein Maximum erreicht, um nachher abzunehmen.

2) Dieses Maximum wird beim eben so grossen spannenden Gewichte erreicht, wie auch die Magnetisirbarkeit des Eisens unter dem gleichen Einflusse (unter sonst gleichen Umständen).

3) Die Curve, welche die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft (Ordinatenaxe) des Paares Fe Fe vom spannenden Gewichte (Abscissenaxe) bei Belastung und Entlastung angibt, hat eine grosse Aehnlichkeit, wenn nicht eine vollständige Identität, mit derjenigen, welche die Aenderung der Magnetisirbarkeit des Eisens unter gleichen Umständen darstellt.

4) Der Strom geht bei den Paaren: Cu Cu und Ni Ni vom gespannten zum nicht gespannten Cu resp. Ni.

5) Der Strom geht bei dem Paare Zn Zn vom nicht gespannten zum gespannten Zn.

6) Die elektromotorische Kraft der Paare: Ni Pb, Ni Fe, Ni Cu, Ni Sn, Ni Zn nimmt mit der Spannung von Ni zu.

7) Die elektromotorische Kraft der Paare Cu Fe und Cu Ni nimmt mit der Spannung von Cu zu.

8) Die elektromotorische Kraft der Paare: Cu Zn, Cu Sn, Cu Pb und Cu Co nimmt mit der Spannung von Cu ab.

9) Die elektromotorische Kraft der Paare: Zn Cu, Zn Sn, Zn Pb und Zn Co nimmt mit der Spannung von Zn zu.

10) Die elektromotorische Kraft des Paares Zn Fe nimmt mit der Spannung von Zn ab.

11) Die elektromotorische Kraft der Paare: Fe Ni, Fe Cu, Fe Zn, und Fe Co nimmt mit der Spannung von Fe zu, wobei dieselbe für

Fig. 10.

alle diese Paare bei einem und demselben spannenden Gewichte das Maximum erreicht, um nachher bei weiterer Spannung abzunehmen.

12) Die elektromotorische Kraft des Paares Fe Pb nimmt mit der Spannung von Fe ab.

Die Resultate, welche auf spekulativem Wege erhalten worden sind, lassen sich folgendermaassen zusammenstellen:

1) Sind A, B, C, D, E, etc. (Fig. 10) die chemischen Elemente, welche ihrem Atomgewichte nachfolgen, so ändert sich die Richtung des thermoelektrischen Stromes zwischen ihnen periodisch je 2 Paare (z. B. ein Mal geht der Strom von C zu B und von B zu A, das andere Mal dagegen von C zu D und von D zu E, etc. Aus 17 bis jetzt bekannten Richtungen machen nur 3 die Ausnahme).

2) Sind A, a, B, b, C, c, D, d, E, e, etc. (Fig. 10) die chemischen Elemente, welche ihrem Atomgewichte nachfolgen, wobei: a, b, c, d, e, etc. dieselben Elemente (A, B, C, D, E, etc.) bedeuten, aber im ausgedehnten Zustande, so ändert sich der thermoelektrische Strom der Paare: Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, etc. auch periodisch je 2 Paare, wobei diese Richtung der Richtung zwischen den grossen Buchstaben, zwischen welchen der kleine eingeschlossen ist, stets entgegengesetzt ist (z. B.), wenn der Strom von C zu D geht, so geht der Strom zwischen C und c von c zu C etc. Aus 11 bis jetzt bekannten Richtungen macht nur 1 die Ausnahme.)

3) Die Zunahme oder Abnahme der thermoelektromotorischen Kraft eines Thermoelementes, aus 2 verschiedenen Metallen bestehend, wobei ein Metall gespannt wird, lässt sich mit Hilfe der Ströme: Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, etc. erklären. (Aus 22 bis jetzt untersuchten Paaren machen nur 2 die Ausnahme.)

4) Der Umstand, dass viele thermoelektrische Erscheinungen eine grosse Analogie mit denjenigen des Magnetismus haben, spricht dafür, dass die nächste Ursache der Thermoelektricität der Magnetismus sei (vielleicht stellt die Thermoelektricität die Induktionsströme der Molekularmagnete vor).

Zürich und Sofia, August 1890.

Ein Telethermometer [1]).

Von

Dr. J. Puluj.
Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

Für manche wissenschaftliche Untersuchungen und technische Zwecke ist ein Thermometer erwünscht, welches die Bestimmung beliebiger Temperaturen auf grosse Entfernungen in der Weise gestattet, dass in der Beobachtungsstation die jeweilige Temperatur der entfernten Station an einer entsprechenden Scala genau abgelesen werden kann. Ein solches Telethermometer wäre zweifellos von grossem Nutzen für Temperaturbestimmungen in den verschiedenen Tiefen des Meeres, in den Schächten und Bohrlöchern der Erde, auf hohen Thürmen nnd Bergen, wie nicht minder in den verschiedenen industriellen Etablissements, wo es sich um Herstellung von Temperaturen innerhalb bestimmter Grenzen, die nicht überschritten werden sollen, handelt.

Die verschiedenen Aenderungen, welche in den elektrischen Leitern durch Zuführung oder Entziehung von Wärme erzeugt werden, eignen sich mehr oder weniger gut zur Messung der Temperaturen; besonders sind es aber die Aenderungen der elektromotorischen Kraft der Thermoelemente und die Aenderungen der Leitungsfähigkeit oder des Widerstandes verschiedener Leiter, welche für die Construction elektrischer Thermometer und Pyrometer Anwendung gefunden haben. Von solchen Apparaten seien hier bloss erwähnt: das Pyrometer von C. W. Siemens [2]), das im wesentlichen aus einer Platinspirale besteht, deren mit der Temperatur veränderlicher Widerstand mit einem andern constanten Widerstande mittels Differentialgalvanometers oder eines sogenannten Differentialvoltameters verglichen wird, und das Pyro-

1) Vom Herrrn Verf. mitgetheilt aus Wiener Akad. Sitz.-Ber. Bd. 98 (1889).

2) C. W. Siemens, The Mechanics Magazine 1869 — 1872. La Lumière électrique, t. XXVIII, 1888, Nr. 26, p. 602.



meter von Dr. F. Braun,[1]) welches ebenfalls aus einer Platindrahtspirale besteht, deren Widerstandsänderung jedoch mit Hilfe der Wheatstone'schen Brücke mit einem constanten Widerstande verglichen wird.

Das von mir construirte Telethermometer, welches im Folgenden beschrieben wird, beruht auf der Anwendung zweier elektrischer Leiter, welche ihren Widerstand mit der Temperatur im entgegengesetzten Sinne ändern. Der eine Leiter ist ein dünner carbonisirter Kohlenfaden, wie er für Glühlampen verwendet wird, dessen Widerstand mit der Temperatur bekanntlich abnimmt, der zweite ein feiner Eisendraht, dessen Widerstand mit der Temperatur zunimmt. Es sei aber schon an dieser Stelle bemerkt, dass auch zwei solche Leiter für die Construction eines elektrischen Thermometers verwendet werden können, deren Widerstände mit der Temperatur in demselben Sinne, jedoch verschieden stark sich ändern, beispielsweise Neusilber in Verbindung mit Platin, Kupfer oder Eisen.

Beschreibung und Theorie des Telethermometers.

Das eigentliche Thermometer besteht aus einem an beiden Enden zugeschmolzenen dünnwandigen Glasröhrchen von 21 cm Länge und 0,8 cm Durchmesser, welches einen 10 cm langen carbonisirten Kohlenfaden und eine Eisendrahtspirale von beziehungsweise 163,28 und 26,584 Ω Widerstand enthält und zur Erzielung einer besseren Wärmeleitung mit trockenem Wasserstoffe gefüllt ist. Infolge dieser Füllung ist auch das Röhrchen gegen Temperaturänderungen empfindlicher als ein Quecksilberthermometer.

Der Kohlenfaden wurde aus einem pergamentisirten Baumwollfaden durch Weissglühen in Graphitpulver hergestellt und im verkohlten Zustande nach einem von mir vor fünf Jahren patentirten Verfahren, durch Glühen mittels elektrischen Stromes im Petroleum, carbonisirt.

Der rechte Theil der Fig. 1 zeigt schematisch die Verbindung des Kohlenfadens k, der Eisendrahtspirale s und des Rückleitungsdrahtes r mit drei am Ende der Glasröhre eingeschmolzenen Platindrähten. Die Verbindung des Kohlenfadens mit den Platindrähten wurde in der Weise hergestellt, dass der Kohlenfaden zunächst an seinen Enden galvanoplastisch verkupfert und dann mit Silberloth an zwei Platindräthe gelöthet wurde. Bei dem ausgeführten Telethermometer sind sowohl der Rückleitungsdraht als der Kohlenfaden, jeder für sich, in sehr dünnwandige Glasröhrchen von 2 mm Durchmesser

1) Dr. F. Braun, Elektrotechnische Zeitschrift 1888, Heft 18.



eingeschmolzen und auf beide zusammengelegte Glasröhrchen der Eisendraht spiralförmig so gewickelt, dass die einzelnen Windungen sich nicht berühren. .

Es sei hier noch bemerkt, dass der Eisendraht bloss wegen seines grossen Temperaturcoëfficienten für die Construction des Telethermometers gewählt wurde. Soll das letztere zur Bestimmung höherer Temperaturen dienen, so wird man den Kohlenfaden mit einem Platindrahte verbinden und beide pyrometrischen Körper statt in einer Glasröhre je nach der Höhe der zu bestimmenden Temperatur in einer Kupfer- oder Porcellanröhre entsprechend befestigen, mit Wasserstoff oder Stickstoff füllen und hermetisch verschliessen.

Die Eisendrahtspirale und der Kohlenfaden nehmen ungefähr zwei Drittel der Länge der Glasröhre ein, während das obere Drittel

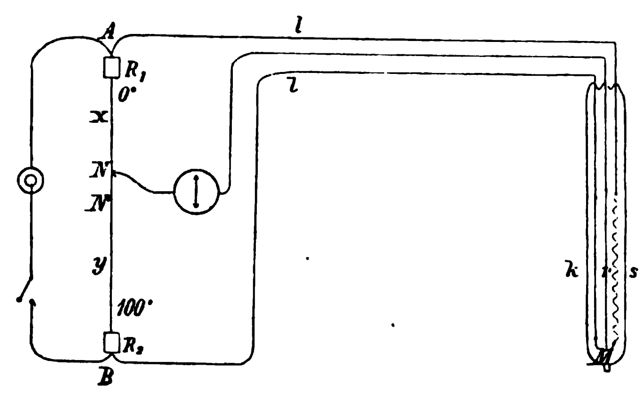


Fig. 1.

derselben bloss von den Zuleitungsdrähten durchsetzt wird. Auf dieses Ende der Glasröhre ist eine Messinghülse angekittet, welche einen aus zwei Stücken bestehenden Hartgummikopf trägt. In dem unteren Theile des Hartgummikopfes sind drei mit Schrauben versehene Metallstücke versenkt und an dieselben die aus dem Glasröhrchen herausragenden Platindräthe angelöthet. Die Schrauben dienen zum Befestigen der Zuleitungsdrähte, welche den aufgeschraubten Deckel des Hartgummikopfes durchsetzen. Die Metallhülse ist ausserdem an ihrem unteren Ende mit einem Gewinde versehen, um daran eine Messingröhre, die für das Glasrohr als Schutzröhre dient, anschrauben zu können.

Im Ganzen stellt Fig. 1 schematisch zwei mit einem Telethermometer versehene Stationen dar. In einer derselben befindet sich das elektrische Thermometer, in der zweiten eine Messbrücke. Die letztere ist ein hölzernes Gestell, auf welches ein 60 cm langer, 4 cm breiter,

0,3 cm dicker, durchsichtiger Spiegelglasstreifen mittels vier Schrauben befestigt ist. Unter dem Glasstreifen liegt eine empirisch getheilte Papierscala in Celsiusgraden und über demselben ist ein Messdraht *AB* aus Neusilber gespannt. Der Glasstreifen dient gleichzeitig als Führung für einen rahmenförmigen Schieber, der mit seinem federnden Platincontacte (*N*, Fig. 1) den Messdraht berührt. Eine Marke am Schieber gestattet auch, Zehntel eines Grades zu schätzen. Ein Leclanche-Element mittlerer Grösse, der Messdraht *AB* und das Thermometer sind nach dem Schema der Wheatstone'schen Messbrücke geschaltet. Der Kohlenfaden und die Eisendrahtspirale bilden zwei Zweige der erwähnten Drahtcombination, und da ihre Widerstände mit der Temperatur im entgegengesetzten Sinne sich ändern, so ist es klar, dass mit der Temperaturänderung des elektrischen Thermometers auch der Punkt *N* des Messdrahtes *AB*, der dasselbe Potential hat, wie die Verbindungsstelle *M* zwischen dem Kohlenfaden und der Eisenspirale, seine Lage entsprechend ändern muss, dass es somit möglich ist, mit Hilfe des Messdrahtes und des verschiebbaren Contactes *N* eine Temperaturscala empirisch zu bestimmen. Zu diesem Zwecke wird das elektrische Thermometer auf eine bestimmte Temperatur gebracht und der Contact längs des Messdrahtes so lange verschoben, bis ein empfindliches Galvanometer keinen Ausschlag gibt. Die betreffende Contactstelle wird an der Scala markiert und daneben die Temperatur geschrieben. Auf dieselbe Weise kann an der Scala noch die einer höheren Temperatur entsprechende zweite Contactstelle bestimmt werden, und man hat dann die einer bestimmten Temperaturzunahme des Thermometers entsprechende Verschiebung des Contactes am Messdrahte, die sich auch leicht berechnen lässt. Wäre diese Verschiebung der Temperaturzunahme proportional — was innerhalb gewisser Temperaturgrenzen, wie später gezeigt werden wird, auch der Fall ist — so könnte die Länge eines Grades durch einfache Theilung des Abstandes beider Contactstellen gefunden werden.

Das beschriebene Telethermometer gestattet, die Temperatur einer entfernten Station auf zweierlei Weise zu bestimmen: entweder mit Hilfe eines empfindlichen astatischen Galvanometers und eines Schlüssels oder mittels Telephon und eines eigenartig construirten Stromunterbrechers, welche in dem Stromkreise des Rückleitungsdrahtes eingeschaltet sind. Der Schlüssel kann entweder in diesem Stromkreise oder in dem des Elementes sich befinden.

Der Unterbrecher besteht im wesentlichen aus einer rasch schwingenden Metallfeder, welche in der Nähe ihrer Befestigung von einem mittels Schraube regulirbaren Kohlenstifte berührt wird. Diese

Berührungsstelle bildet, wenn die Feder schwingt, für den elektrischen Strom einen veränderlichen Contact, und das Telephon gibt einen den periodischen Schwingungen der Feder entsprechenden Ton. Durch sanfte Berührung mit dem Finger in Thätigkeit gesetzt, schwingt der Unterbrecher ungefähr 30 Secunden lang, welche Zeit genügt, um durch Verschieben des Contactes mittels Telephon jene Stelle der Scala zu finden, an welcher die Potentialdifferenz Null ist.

Die Handhabung des Telethermometers bei der Bestimmung der Temperatur einer entfernten Station ist eine höchst einfache. Ist der Apparat entsprechend geschaltet, so wird beim geschlossenen Stromkreise der Contact längs der Temperaturscala der Messbrücke so lange verschoben, bis das Galvanometer keinen Ausschlag zeigt, beziehungsweise das Telephon keinen Ton gibt, wenn der Stromunterbrecher schwingt. Die Marke des Schiebers zeigt an der empirischen Temperaturscala die in der entfernten Station herrschende Temperatur an.

Es sei hier bemerkt, dass die Bestimmung der Temperatur mit Hilfe des Galvanometers mit etwas grösserer Genauigkeit sich ausführen lässt, als mit Hilfe des Telephons, weil das letztere bei der gewählten Dicke des Messdrahtes bis ungefähr 2 mm dies- und jenseit des Nullpunktes der Potentialdifferenz keinen Ton gibt. Um daher die Nulllage genau zu bestimmen, empfiehlt es sich, den Schiebercontact von der Stelle aus, wo das Telephon keinen Ton gibt, nach rechts und links so weit zu verschieben, bis der Ton eben wahrgenommen wird, und aus beiden Einstellungen das Mittel zu nehmen.

Nicht ohne Interesse dürfte auch die Bemerkung sein, dass ein Wechselstromapparat, etwa eine Rhumkorff'sche Spirale, als Electricitätsquelle für die telephonische Methode der Temperaturbestimmung nicht brauchbar ist, weil unter den gewählten Widerstandsverhältnissen das Telephon infolge der Selbstinduction der Spirale auch in der Nulllage noch einen vernehmbaren Ton gibt, aus welchem Grunde für die telephonische Methode der Gleichstrom mit Benützung des beschriebenen Stromunterbrechers verwendet wurde.

Es soll nun die einer Temperaturerhöhung von t Graden des elektrischen Thermometers entsprechende Verschiebung des Contactes an der Scala der Messbrücke berechnet werden.

Bedeuten die Buchstaben k, s, l, die Widerstände bei einer bestimmten Temperatur des Kohlenfadens, beziehungsweise der Eisendrahtspirale und eines Leitungsdrahtes, x und y die Widerstände der Zweige AN und BN des Messdrahtes AB (Fig. 1), dagegen x' und y' die Widerstände der Zweige AN' und BN', wenn die Temperatur des Thermometers um t Grade höher ist m den Widerstand des Mess-

drahtes AB, und sind σ und $\varkappa$ die Temperaturcoëfficienten der Eisenspirale, beziehungsweise des Kohlenfadens, so ergeben sich bekanntlich die Gleichungen:

$$\frac{k+l}{s+l} = \frac{y}{x}, \qquad y + x = m;$$

$$\frac{k(1-\varkappa t)+l}{s(1+\sigma t)+l} = \frac{y'}{x'}, \qquad y' + x' = m.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich zunächst:

$$x' - x = m\left[\frac{l+s(1+\sigma t)}{2l+k(1-\varkappa t)+s(1+\sigma t)} - \frac{l+s}{2l+k+s}\right].$$

und wenn mit λ die Länge des Messdrahtes von 1 Ω Widerstand bezeichnet wird, die einer Temperaturerhöhung von t Graden entsprechende Verschiebung des Contactes an der Scala:

$$NN' = \lambda m\left[\frac{l+s+sst}{2l+k+s+(s\sigma-k\varkappa)t} - \frac{l+s}{2l+k+s}\right]. \qquad (1$$

wobei vorausgesetzt wurde, dass die Temperatur der Leitung und des Messdrahtes sich nicht geändert hat.

Im letzten Ausdrucke ist der Factor $s\sigma - k\varkappa$ im Vergleiche mit $2l+k+s$, wie aus den späteren Angaben ersehen werden kann, gegen 2800mal kleiner; es kann daher für eine nicht allzu grosse Temperaturerhöhung t angenähert gesetzt werden:

$$NN' = \frac{\lambda m s \sigma}{2l+k+s} \cdot t, \qquad (2$$

nach welchem Ausdrucke die Verschiebung des Contactes der Temperaturerhöhung t, wenn diese klein ist, proportional ist. Diese Proportionalität wird dagegen für jede beliebige Temperaturerhöhung stattfinden, wenn die Bedingung:

$$s\sigma - k\varkappa = 0$$

erfüllt wird, welche für den Widerstand der Eisenspirale den Werth:

$$s = \frac{\varkappa}{\sigma} k$$

liefert.

Aus dem Ausdrucke (2) ist auch zu ersehen, dass die Verschiebung des Contactes dem Widerstande m des Messdrahtes direct proportional ist. Um daher eine grosse Empfindlichkeit des Apparates zu erreichen,

wurden an beiden Enden des 60 cm langen Messdrahtes bifilar gewickelte Widerstände $R_1 = 4{,}575\ \Omega$ und $R_2 = 32{,}358\ \Omega$ (Fig. 1) vorgeschaltet; der Gesammtwiderstand der Messbrücke war $m = 38{,}914\ \Omega$.

Für die Länge eines Grades der empirisch zu bestimmenden Temperaturscala ergibt sich aus der Formel (2)

$$\delta = \frac{\lambda m s \sigma}{2l + k + s}. \tag{3}$$

In der voranstehenden Ableitung wurde der Einfachheit halber angenommen, dass der Widerstand des Kohlenfadens und der Eisenspirale mit der Temperatur nach einem linearen Gesetze abnimmt, beziehungsweise zunimmt, was jedoch genau genommen nicht der Fall ist. Diesbezügliche Messungen mit carbonisirten Kohlenfäden, welche von mir ausgeführt wurden und über welche in der nächsten Abhandlung berichtet werden soll, ergaben für die Widerstandsänderung die Formel:

$$k = k_0 (1 - 0{,}00022194\, t + 0{,}000000003374\, t^2),$$

aus welcher zu ersehen ist, dass der Widerstand zwischen den bezeichneten Temperaturgrenzen nur angenähert nach einem linearen Gesetze sich ändert

Für die Zunahme des Widerstandes von Eisendrähten fand Callendar[1]) innerhalb der Temperaturgrenzen 0° und 600° C., und zwar für käufliches Eisen:

$$s = s_0 (1 + 0{,}0045346 \cdot t + 0{,}000007034 \cdot t^2)$$

und für reines Eisen:

$$s = s_0 (1 + 0{,}0045658 \cdot t + 0{,}000007082 \cdot t^2),$$

während W. Siemens[2]) vor 18 Jahren für sehr hohe bis 1000° reichende Temperaturen den Widerstand des Eisens als Function der absoluten Temperatur T bestimmt und dafür den etwas complicirten Ausdruck gefunden hat:

$$s = s_0 (0{,}05852 \sqrt{T} + 0{,}003076\, T - 1),$$

in welchem s_0 den Widerstand bei der absoluten Temperatur 0° bedeutet.

1) La Lumière Electrique 1888, t. XXVIII, No. 23, p. 458.
2) Proceed. R. S. 19, p. 413, 1871.

Aichung des Telethermometers.

Um die Temperaturscala des Telethermometers empirisch zu bestimmen, wurde auf dem Glasstreifen unter dem Messdrahte ein in Millimetern getheilter Papierstreifen entsprechend befestigt und auf demselben wurden mehrere Punkte bestimmt, welche verschiedenen Temperaturen des elektrischen Thermometers entsprachen. Zu diesem Zwecke wurde das letztere und ein Quecksilberthermometer in ein Wasserbad, das sorgfältig umgerührt wurde, eingetaucht. Aus den erhaltenen Angaben beider Thermometer wurde nach der Methode der kleinsten Quadrate eine Formel berechnet, nach welcher die experimentell bestimmten Punkte der Scala mit der Temperatur sich ändern und schliesslich mit Hilfe dieser Formel die Temperaturscala von 10° zu 10° berechnet. Die einzelnen Grade wurden dann durch Theilung der Abstände in zehn gleiche Theile erhalten.

In der nachstehenden Tabelle enthält die erste Spalte die Temperatur t in Celsiusgraden, abgelesen an einem Kapeller'schen Normalthermometer; die zweite den Abstand l des entsprechenden Punktes der provisorischen Millimeterscala von einem Ende des Messdrahtes in Millimetern; die dritte denselben Abstand l', berechnet nach der empirischen Formel, welche am Fusse der Beobachtungsreihe steht, und die vierte Spalte die Beobachtungsfehler $l—l'$.

t	l	l'	$l-l'$
0°,3	140,0	138,5	+ 1,5
5,5	177,6	175,3	+ 2,3
12,2	221,5	222,1	− 0,6
18,0	259,5	262,3	− 2,8
23,3	299,4	298,6	+ 0,8
28,8	335,0	336,1	− 1,1
34,0	369,6	371,1	− 1,5
41,7	422.3	422,5	− 0,2
48,9	468,6	470,0	− 1,4
56,1	517,0	516,9	+ 0,1
62,1	558,5	555,6	+ 2,9

$$l = 136 \cdot 418 + 7{,}08977\, t - 0{,}0054785\, t^2 \ldots \qquad (4$$

Der Differentialquotient dieser Formel

$$\frac{dl}{dt} = 7{,}08977 - 0{,}010957 \cdot t \qquad (5$$

gibt die Länge eines Grades der empirisch bestimmten Temperaturscala in Millimetern und zeigt, dass diese Länge bei höheren Temperaturen ein wenig kleiner wird.

Für die Länge eines Grades der zu bestimmenden Temperaturscala wurde bereits oben theoretisch der angenäherte Ausdruck:

$$\delta = \frac{\lambda m s \sigma}{2l + k + s}$$

gefunden, welcher nach Einsetzung der Werthe: $\lambda = 310$ mm, $s = 26{,}584\ \Omega$, $m = 38{,}914\ \Omega$, $2l = 2{,}588\ \Omega$, $k = 163{,}280\ \Omega$ und $\sigma = 0{,}00454$ für die Länge eines Grades der Temperaturscala den Werth 7,6 mm liefert, welcher letztere etwas grösser ist, als der experimentell

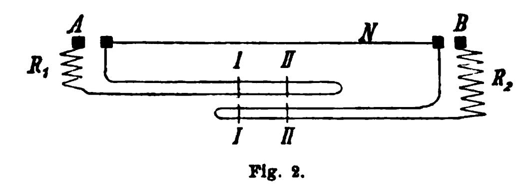


Fig. 2.

bestimmte 7,1 mm. Die genaue Formel 1. *p.*— liefert dagegen einen mit der letzten Zahl übereinstimmenden Werth.

Aus der vierten Spalte der voranstehenden Tabelle ergibt sich noch ein mittlerer Beobachtungsfehler $r = \pm 1{,}85$ mm, oder da ein Grad der Temperaturscala 7 mm lang ist, $r = \pm 0^\circ 26$ C.

Nach der Formel (4) erhält man schliesslich die nachfolgenden Werthe:

t	l
—15°	28,8 mm
—10	65,0
+ 0	136,4
+10	206,8
+20	276,0
+30	344,2
+40	411,2
+50	477,2
+60	542,1

nach denen die Temperaturscala für das Telethermometer angefertigt wurde.

Für den Fall, dass der Nullpunkt der empirischen Temperaturscala mit dem des Quecksilberthermometers einmal nicht ganz übereinstimmen sollte, wurden die vorgeschalteten Widerstände R_1 und R_2, um den Nullpunkt verschieben zu können, im Innern des Gestelles in

der in Fig. 2 schematisch dargestellten Weise angeordnet und durch zwei Klemmen I zum Theile kurz geschlossen. Soll nun der Nullpunkt bei unberührter Scala am Messdrahte eine Verschiebung erfahren, so braucht man bloss die beiden Klemmen aus der Lage I nach rechts in die Lage II zu verschieben, wodurch die Widerstände R_1 und R_2 beim constant bleibenden Gesammtwiderstande m sich ändern und der Nullpunkt der Temperaturscala eine Verschiebung erfährt.

Die experimentell bestimmte Temperaturscala zeigt nur dann richtig, wenn der Widerstand und die Temperatur der Leitungsdrähte ebenso gross sind wie beim Aichen des Telethermometers. Ist aber in einem besonderen Falle eine Leitung von grösserer Länge L erforderlich, so lässt sich dieselbe nach der bekannten Formel:

$$d = \sqrt{\frac{4\, s\, L}{\pi\, \omega}}$$

berechnen, in welcher ω den Widerstand eines Leitungsdrahtes bedeutet, der zum Aichen des Telethermometers verwendet wurde. Mit $\omega = 1{,}294\,\Omega$, $s = 0{,}015$ und $\pi = 3{,}1416$ erhält man für eine 1000 m lange Leitung $d = 3{,}84$ mm, d. h. damit die Scala Temperaturen in 1 km Entfernung richtig zeige, muss die Leitung aus drei Drähten von je 3,84 mm Durchmesser bestehen.

Correction der Temperaturscala.

Die empirisch bestimmte Temperaturscala zeigt jedoch nicht mehr genau, wenn die Temperatur der Leitungsdrähte grösser oder kleiner wird als jene Temperatur, welche die Leitung beim Aichen des Apparates hatte. Eine diesbezügliche Correction der Temperaturscala lässt sich ebenso leicht berechnen, wie auch experimentell prüfen.

Haben die Buchstaben k, l, s, x, y und m die bereits oben erwähnte Bedeutung, so bestehen bekanntlich bei einer bestimmten Temperatur die Gleichungen:

$$\frac{l+k}{l+s} = \frac{y}{x}, \qquad y + x = m,$$

und wenn die Leitung allein eine Temperaturerhöhung um t Grade erhalten hat:

$$\frac{k + l(1+\alpha t)}{s + l(1+\alpha t)} = \frac{y'}{x'}, \qquad y' + x' = m.$$

wo α den Temperaturcoëfficienten des Leitungsdrahtes bedeutet und $x' = AN'$ und $y' = BN'$ ist.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich die jener Temperaturerhöhung der Leitung entsprechende Verschiebung des Contactes an der Temperaturscala in Millimetern:

$$\varDelta = \lambda m \left[\frac{s + l(1 + \alpha t)}{k + s + 2l(1 + \alpha t)} - \frac{s + l}{k + s + 2l}\right], \qquad (1$$

wo λ die frühere Bedeutung hat und die Temperaturcorrection in Celsiusgraden:

$$\tau = \frac{\varDelta}{\nu},$$

wenn ν die Länge eines Grades der Scala in Millimetern bedeutet.

Diese Correction ist negativ oder positiv zu nehmen, je nachdem die Temperatur der Leitung höher oder niedriger ist als θ_0, welche die Leitung beim Aichen des Telethermometers hatte.

Für den beschriebenen Apparat berechnet sich die Temperaturcorrection nach Einsetzung der Werthe:

$\lambda = 310$ mm	$m = 38{,}914\ \Omega$
$\nu = 7$ mm	$k = 163{,}280$ „
$\theta_0 = 23°$ C,	$s = 26{,}584$ „
$\alpha = 0{,}0037$	$l = 1{,}294$ „

in die letzte Formel, und zwar für die Temperaturerhöhung der Leitung um

$t = 1°$ C.	$\tau = -0°035$ C.
10	0,292
20	0,585
30	0,871

für eine Leitung aus Neusilberdraht von gleich grossem Widerstande wären die Correctionen 12 mal kleiner, beispielsweise bei einer Temperaturerhöhung um $t = 30°$ C. bloss $\tau = -0°07$ C.

Die Temperaturcorrection lässt sich angenähert nach der Formel

$$\tau = 6{,}38 \frac{l(k - s)}{(s + k + 2l)^2} \cdot t, \qquad (2$$

oder wenn für s, k und l die entsprechenden Werthe gesetzt werden, nach der Formel:

$$\tau = 0{,}0292\, t \qquad (3$$

berechnen.

Die Correction der Temperaturscala kann auch experimentell in der Weise bestimmt werden, dass man bei constant bleibender Temperatur des elektrischen Thermometers und der Leitungsdrähte die Aenderung an der Temperaturscala bestimmt, welche durch das Zuschalten je eines Widerstandes von $l\alpha t$ Ohm in die beiden Zuleitungsdrähte hervorgerufen wird. Die auf diese Weise experimentell bestimmten Temperaturcorrectionen waren mit den berechneten Werthen in bester Uebereinstimmung.

Aus der Formel (2) ist noch zu ersehen, dass die Temperaturcorrection für $k = s$ angenähert gleich Null ist.

Eine Temperaturänderung der Messbrücke hat dagegen auf die Angaben des Apparates keinen Einfluss, wenn nur im Messdrahte und in den vorgeschalteten Widerständen die gleiche Temperatur herrscht. Dies ergibt sich aus folgender Betrachtung. Bei der Temperatur θ_0 gelten die Gleichungen:

$$\frac{k+l}{s+l} = \frac{y}{x} \quad y + x = m$$

und wenn die Temperatur der Messbrücke um t Grade höher ist, kommt als dritte Gleichung hinzu:

$$m(1 + \beta t) = y'' + x'',$$

wo β den Temperaturcoëfficienten des Messdrahtes bedeutet. Soll trotzdem der Contact N seine Lage nicht ändern, so muss noch die Doppelgleichung bestehen:

$$\frac{y''}{x''} = \frac{y}{x} = \frac{k+l}{s+l},$$

welche in Verbindung mit (7) die Beziehungen

$$x'' = x(1 + \beta t),$$
$$y'' = y(1 + \beta t)$$

liefert. Wir erhalten somit als Bedingung, dass die zwei Zweigwiderstände der Messbrücke mit der Temperatur im gleichen Sinne und in demselben Verhältnisse sich ändern müssen, mit anderen Worten, dass die Temperatur in den vorgeschalteten Widerständen sowohl wie in dem Messdrahte die gleiche sein muss. Diese Bedingung wurde bei dem beschriebenen Apparate in der Weise erfüllt, dass für den Messdraht und die vorgeschalteten Widerstände dieselbe Drahtsorte gewählt und zur Erzielung einer gleichmässigen Erwärmung der Widerstände, die letzteren im Innern des Holzgestelles angebracht wurden.

Das beschriebene Telethermometer unterscheidet sich von den bisherigen Apparaten, die auf der elektrischen Widerstandsänderung beruhen, wesentlich dadurch, dass nicht ein, sondern zwei Zweige der Wheastone'schen Drahtcombination für den thermometrischen Zweck verwendet wurden, infolge dessen die Nothwendigkeit der Erhaltung eines constanten Vergleichswiderstandes entfällt und eine Temperaturänderung in der Beobachtungsstation die Angaben des Telethermometers nicht beeinflusst.

Das Telethermometer als Thermoindicator und als Signalapparat.

Das Telethermometer lässt sich auch als Thermoindicator einrichten, der die jeweilige Temperatur der Endstation automatisch anzeigt. Zu diesem Zwecke müssen der Kohlenfaden und die Eisen-

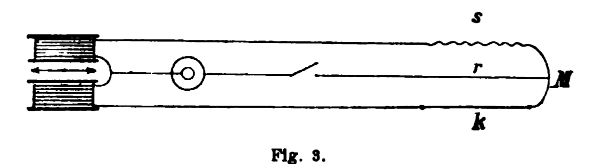


Fig. 3.

drahtspirale des elektrischen Thermometers bei einer bestimmten mittleren Temperatur gleiche Widerstände haben und das Thermometer mit einem empfindlichen Differentialgalvanometer nach dem Schema Fig. 3 verbunden werden. Der von einem Leclanche-Elemente gelieferte Strom verzweigt sich in zwei parallele Zweige, und das Differentialgalvanometer gibt keinen Ausschlag, wenn das elektrische Thermometer jene mittlere Temperatur besitzt, weil in diesem Falle die Stromstärken in beiden Zweigen gleich sind. Bei einer anderen Temperatur dagegen ist die Stromstärke in beiden Zweigen verschieden, weil der Kohlenfaden und die Drahtspirale mit der Temperatur ihre Widerstände im entgegengesetzten Sinne ändern, infolge dessen bei höherer Temperatur der Kohlenfaden und bei tieferer die Drahtspirale von einem stärkeren Strome durchflossen werden und die Magnetnadel des Differentialgalvanometers eine Ablenkung von der Nulllage nach der einen oder entgegengesetzten Seite erfahren muss.

Auch für den Thermoindicator lässt sich eine empirische Temperaturscala in der Weise anfertigen, dass man das elektrische Thermometer in ein Wasserbad von verschiedenen Temperaturen einsenkt und die entsprechenden Ausschläge der Magnetnadel an der Scheibe des Differentialgalvanometers bezeichnet.

Wird das Differentialgalvanometer ausserdem in der Weise eingerichtet, dass die Magnetnadel einen Quecksilbercontact, der längs

der Temperaturscala verschiebbar ist, berührt und auf diese Weise den Stromkreis einer elektrischen Glocke schliesst, so kann das Telethermometer auch zum Signalisiren bestimmter Temperaturen Verwendung finden.

Es ist selbstverständlich, dass die Angaben des Thermoindicators von der elektromotorischen Kraft des Elementes abhängen, was dagegen beim Telethermometer nicht der Fall ist. Nichtsdestoweniger dürfte der Thermoindicator für manche praktische Zwecke von Nutzen sein.

Zum Schlusse sei hier noch erwähnt, dass das beschriebene Telethermometer in der Werkstätte des physikalischen Cabinets der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag ausgeführt wurde.

Ueber den Zusammenklang zweier einfacher Töne.

Von

W. Voigt[1]).

Bezüglich des in der Ueberschrift genannten Problems liegen einander scheinbar stark widersprechende Beobachtungen vor.

Während Herr von Helmholtz[2]) u. A. beim gleichzeitigen Erklingen zweier einfacher Töne von den Schwingungszahlen n_1 und n_2, von denen $n_2 < n_1$ sein mag, noch Töne von den Schwingungszahlen

$$n_2 - n_1 \text{ und } n_2 + n_1$$

wahrgenommen hat, so findet Herr R. König[3]) Töne von den Schwingungszahlen

$$n_2 - \nu n_1, \ (\nu + 1)n_1 - n_2,$$

— vorausgesetzt, dass ν eine ganze Zahl ist, also νn_1 und $(\nu + 1)n_1$ die Schwingungszahlen derjenigen beiden harmonischen Obertöne des tieferen Tones sind, welche den höheren unmittelbar einschliessen; die vorgenannten Töne dagegen vermochte Herr König in so wenigen und unsicheren Fällen zu hören, dass er die Ansicht ausspricht:

L'existence de sons différentiels et de sons d'addition ne peut être démontrée jusqu'à présent avec quelque certitude par aucune expérience[4]).

Was die Erklärung der beobachteten Erscheinungen angeht, so hat Herr von Helmholtz bekanntlich die Annahme gemacht, dass in den Fällen, wo Combinationstöne gehört werden, die primären Töne durch Schwingungen von so grosser Amplitude hervorgebracht werden, dass die Anwendung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen

1) Vom Herrn Verfasser mitgeteilt aus den Gött. Nachr. 1890 Nr. 5.

2) v. Helmholtz, Pogg. Ann. XCIX p. 497, 1865, Akustik (Braunschweig 1870) p. 239.

3) R. König, Pogg. Ann. CLVII p. 177, 1876, Quelques expériences d'Acoustique, (Paris 1882) p. 87, Wied. Ann. XXXIX p. 395, 1890.

4) Berichtigung des Pogg. Ann. CLVII p. 236 unter III ausgesprochenen Satzes in des Autors Buch „Quelques expériences d'Acoustique", p. 147, No. III.

nicht mehr zulässig ist. Zugegeben indess, dass in dem Fall der Sirene und der Zungenpfeifen, wo neben den Schwingungen zugleich Luftströmungen stattfinden, diese Voraussetzungen zutreffen, so ist doch in dem besonders wichtigen Falle von Stimmgabeltönen, die fast allein einfache Sinusschwingen liefern, diese Annahme umsomehr abzuweisen, als durch neue Beobachtungen von Herrn Kayser[1]) gezeigt ist, dass bei solchen innerhalb weitester Grenzen der Intensität die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles constant ist, also die lineären Schallgleichungen merklich erfüllt sind.

Herr König hingegen erklärt die von ihm beobachteten Töne, wie zuerst Lagrange[2]), aus den Stössen der primären Töne und weist durch besondere sinnreiche Experimente nach, dass unser Ohr die Eigenschaft besitzt, regelmässig wiederkehrende einzelne Impulse, deren Intensität periodisch wechselt, zu einem Ton zusammenzufassen von der Höhe, welche ein einfacher Ton mit gleicher Periode besitzt.

Das Prinzip der Erklärung scheint mir hierdurch für diejenigen Fälle der Zusammenwirkung zweier einfacher Töne, welche die Benutzung der lineären Schallgleichungen gestatten, völlig sichergestellt zu sein, — es fehlte aber bisher noch die strenge theoretische Ableitung der verschiedenen möglichen Combinations- oder Stosstöne aus demselben.

Als ich diese nun kürzlich versuchte, bemerkte ich sehr bald, dass aus dem aufgestellten Princip je nach Umständen sowohl die Helmholtz'schen — ich benutze der Kürze wegen diese Bezeichnung — Differenz- und Summationstöne als die König'schen Stosstöne folgen, und dass die für das eine und andere maassgebenden Bedingungen sicher bei den König'schen, sehr wahrscheinlich bei den Helmholtz'schen Beobachtungen vorgelegen haben.

Die Ableitung der hiermit skizzirten Resultate bildet den Inhalt der folgenden Mittheilung. —

Der allgemeinste Ansatz für eine aus zwei einfachen Sinusschwingungen zusammengesetzte Bewegung ist:

$$u = a_1 \sin (\tau_1 t - \delta_1) + a_2 \sin (\tau_2 t - \delta_2). \qquad 1)$$

Hierin ist τ_h kurz für $2\pi/T_h$ gesetzt; es ist τ_h also mit der Schwingungszahl n_h proportional und mag beiläufig „Schwingungsindex" genannt werden. Der absolute Werth der Verzögerungen δ_1 und δ_2 kann durch Veränderung des Anfangspunktes für die Zeit t um gleiche

1) H. Kayser, Wied. Ann. VI p. 465, 1879.
2) Lagrange, Misc. Soc. Taur. 1759.

Beträge geändert worden; gegeben zu denken ist nur die Differenz $\delta_2 - \delta_1 = \delta$. Wir setzen demgemäss $\delta_1 = O$ $\delta_2 = \delta$.

Maxima und Minima von u finden statt für Werthe t_h von t, gegeben durch die Gleichung:

$$O = a_1 \tau_1 \cos \tau_1 t_h + a_2 \tau_2 \cos (\tau_2 t_h - \delta); \tag{2}$$

die ihnen entsprechenden Werthe von u seien mit U_h bezeichnet, so dass also gilt:

$$U_h = a_1 \sin \tau_1 t_h + a_2 \sin (\tau_2 t_h - \delta). \tag{3}$$

Die Wurzeln t_h der Gleichung (2) folgen im Allgemeinen keinem einfachen Gesetz, indessen sind zwei specielle, in gewisser Hinsicht extreme Fälle leicht zu erledigen.

I. Es sei

$$a_1 \tau_1 = a_2 \tau_2,$$

d. h. die lebendige Kraft beider zur Wechselwirkung gelangenden einfachen Schwingungen sei gleich[1]).

Dann schreibt sich die Gleichung (2)

$$\cos \tfrac{1}{2} ((\tau_2 + \tau_1) t_h - \delta) . \cos \tfrac{1}{2} ((\tau_2 - \tau_1) t_h - \delta) = O;$$

sie ergibt zwei Gattungen von Wurzeln, die durch t'_h und t''_h bezeichnet seien und deren Werthe folgen aus

$$\begin{aligned} (\tau_2 + \tau_1) t'_h - \delta &= (2h + 1)\pi, \\ (\tau_2 - \tau_1 t''_h - \delta &= (2h + 1)\pi. \end{aligned} \tag{4}$$

Die ihnen entsprechenden beiden Gattungen extremer Werthe von u, nämlich U'_h und U''_h finden wir am einfachsten, indem wir schreiben:

$$\begin{aligned} U_h = {} & (a_2 + a_1) \sin \frac{(\tau_2 + \tau_1) t_h - \delta}{2} \cos \frac{(\tau_2 + \tau_1) t_h - \delta}{2} \\ & + (a_2 = a_1) \sin \frac{(\tau_2 - \tau_1) t_h - \delta}{2} \cos \frac{(\tau_2 + \tau_1) t_h - \delta}{2}. \end{aligned}$$

Da nämlich $\sin \left(\frac{2h+1}{2} \pi \right) = (-1^h)$ ist, so gibt sich:

$$\begin{aligned} U'_h &= (-1)^h (a_2 + a_1) \cos \frac{(\tau_2 - \tau_1) t'_h - \delta}{2}, \\ U'_h &= (-1)^h (a_2 - a_1) \cos \frac{(\tau_2 + \tau_1) t''_h - \delta}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

---

1) Dieser Fall ist von demjenigen gleicher Amplitude $a_1 = a_2$, der mitunter für theoretische Betrachtungen benutzt wird, wohl zu unterscheiden.

Diese Werthe ergeben aber, wenn man sie durch die stetig wachsenden t_h entsprechenden Sinuslinien verbindet, wegen des Factors $(-1)^h$ keine einfache Sinuscurve, sondern die Superposition je zweier gleicher, welche um die halbe betreffende Periode gegeneinander verschoben sind; diese Combination besitzt die halbe Periode einer einfachen Reihe.

Hieraus folgt, dass bei der gemachten Voraussetzung gleicher lebendiger Kraft die beiden einfachen Sinusschwingungen absolute Maxima und Minima der resultirenden Amplituden liefern, in Perioden, wie sie zwei einfachen Tönen mit den Indices

$$\tau_2 - \tau_1 \text{ und } \tau_2 + \tau_1$$

entsprechen.

Die Wahrnehmung der beiden Gattungen von Perioden durch das Ohr wird um so deutlicher sein, je mehr Glieder der ganzen Reihen der U^h resp. U''_h in einer jeden Periode vorhanden sind.

Man erkennt aus den Formeln (5) sogleich, dass wegen der Nenner, welche t'_h und t''_h in den Ausdrücken

$$t' = \frac{(2h+1)\pi + \delta}{\tau_2 + \tau_1},\ t''_h = \frac{(2h+1)\pi + \delta}{\tau_2 - \tau_1} \tag{6}$$

besitzen, stets eine erheblich grössere Zahl Glieder der U'_h in eine Periode fallen, als der U''_h; daraus folgt aber schon allein und ganz abgesehen von der Amplitude, dass bei den gemachten Annahmen die Differenztöne $(\tau_2 - \tau_1)$ ungleich deutlicher wahrnehmbar sein müssen, als die Summationstöne.

Dies übersieht man noch deutlicher, wenn man die Schwingungszeiten dieser Töne und die Perioden der sie bildenden U_h ins Auge fasst. Für die Differenztöne sind die Schwingungsdauern T_- nämlich resp.

$$T_- = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2},$$

die Perioden P_- der U'_h gleich

$$P_- = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2},$$

für die Summationstöne umgekehrt, so dass bei letzteren höchstens ein extremer Werth U''_h in jede Periode fällt.

Bildet man den vollständigen Werth

$$U''_h = (-1)^h (a_2 - a_1) \cos\left(\frac{\tau_2 + \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}(2h+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\tau_1 \delta}{\tau_2 - \tau_1}\right). \tag{7}$$

so erkennt man, dass für Töne, deren Indices dem Gesetz

$$\tau_1 : \tau_2 = n : n + 1$$

folgen, wie dies bei den Gliedern der Octave, Quinte, Quarte, grosser und kleiner Terz gilt, U_h'' die Form annimmt:

$$U_h'' = (-1)^h (a_2 - a_1) \cos\left((2n+1)(2h+1)\frac{\pi}{2} + n\delta\right),$$
$$= (-1)^n (a_2 - a_1) \sin(n\delta).$$

Hieraus folgt, dass in den angegebenen Fällen die Glieder der Reihe der U_h'' sämtlich gleich sind; die dem Summationston entsprechende Periode dürfte hiernach für das Ohr ganz unwahrnehmbar sein, denn von diesem wird eine Reihe gleicher Impulse offenbar nur als ein Ton derjenigen Schwingungsdauer empfunden werden, die dem Abstand der Impulse entspricht, d. h. hier als Differenzton.

Gilt ferner

$$\tau_1 : \tau_2 = n : n + 2,$$

wie dies bei der Duodecime und grossen Sexte stattfindet, so haben wir

$$U_h'' = (-1)^h (a_2 - a_1) \cos\left((n+1)(2h+1)\frac{\pi}{2} + \frac{n\delta}{2}\right)$$
$$= \begin{cases} (-1)^{(h+n)} (a_2 - a_1) \sin\left(\frac{n\delta}{2}\right) \text{ für gerades } n, \\ (-1)^{\left(h + \frac{n+1}{2}\right)} (a_2 - a_1) \cos\left(\frac{n\delta}{2}\right) \text{ für ungerades } n. \end{cases}$$

Hier treten die Glieder der Reihe der U_h'' zwar absolut gleich, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen auf; wenn auch im Ganzen sehr unwahrscheinlich, dürfte hier schon eher die Wahrnehmung eines Summationstones möglich sein.

Erst Töne mit dem Verhältniss

$$\tau_1 : \tau_2 = n : n + m \text{ für } m \geqq 3$$

geben den U_h'' verschiedene absolute Werthe; von den Intervallen mit $m = 3$ kommt besonders die kleine Sexte in Betracht.

Nach dem im Vorstehenden Entwickelten kann es nicht Wunder nehmen, wenn die Frage der Wahrnehmbarkeit, ja der „Existenz“ der Summationstöne sehr haufig in durchaus negativer Weise beantwortet wird. Selbst bei den im Obigen gemachten, wie wir sehen werden, günstigen Annahmen erscheint ihre Beobachtung, im Falle die primären

Töne das Intervall der Octave, Quinte, Quarte und Terz besitzen, fast ausgeschlossen, bei grosser Sexte und Duodecime sehr fraglich.

Wenn also trotzdem von einzelnen Beobachtern Summationstöne gehört worden sind, so ist, falls diese Töne objectiv im äussern Luftraum nachweisbar waren, wahrscheinlich, dass bei ihren Experimenten die Schwingungen so grosse Elongationen besassen, dass die lineäre Form der Schallgleichungen nicht mehr zulässig war, — falls sie nur im Ohre zu Stande kamen, dass sie zumeist durch dessen anatomische Eigenthümlichkeiten bedingt waren[1]).

Wesentlich aber ist das Resultat, dass bei zwei einfachen Tönen gleicher lebendiger Kraft Differenztöne und Summationstöne theoretisch auch in Fällen auftreten können, wo das Princip der Coexistenz der Schwingungen anwendbar ist.

II. Sind die Amplituden des höheren Tones (τ_2) so viel kleiner als die des tieferen (τ_1), dass die Zusammenwirkung beider nur eine Veränderung der Maxima und Minima der dem letzteren entsprechenden Elongationen u_1, aber keine neuen Maxima und Minima hervorruft, so ist in der Gleichung (2) $a_2\tau_2$ als klein gegen $a_1\tau_1$ zu betrachten.

Damit ist noch nicht vorausgesetzt, dass die wahrgenommene Intensität des höheren Tones erheblich unterhalb derjenigen des tieferen sein muss; es scheint vielmehr, dass bei zwei Tönen, die sich beträchtlich in ihrer Höhe unterscheiden — und auf diesen Fall kommt es im Folgenden besonders an — der tiefere uns erst bei erheblich grösserer lebendiger Kraft der ausgesandten Bewegung vernehmbar wird, als der höhere.

Die Gleichung (2) lässt sich in diesem Falle durch eine Annäherung behandeln, indem man die Wurzeln t_h, welche sich aus dem Verschwinden des ersten Gliedes allein als erste Näherung ergeben, nämlich

$$t_h = \frac{(2h+1)\pi}{2\tau_1}$$

in das zweite einsetzt, um dadurch eine zweite Näherung zu erhalten. Dies führt zu

$$a_1\tau_1 \cos \tau_1 t_h + a_2\tau_2 \cos\left(\frac{(2h+1)\tau_2\pi}{2\tau_1} - \delta\right) = 0$$

woraus folgt, wenn man das zweite Glied mit dem Factor $(-1)^h \sin \tau_1 t_h$, welcher in erster Näherung gleich 1 ist, multiplicirt:

1) Vergl. übrigens W. Preyer, Wied Ann. XXXVIII. p. 131, 1889.

$$\cos\left[\tau_1 t_h - \frac{a_2\tau_2}{a_1\tau_1}(-1)^h \cos\left(\frac{(2h+1)\tau_2\pi}{2\tau_1} - \delta\right)\right] = O. \tag{8}$$

Wir erhalten also, indem wir das zweite Glied, welches erster Ordnung ist, kurz mit η_h bezeichnen, als Resultat:

$$\tau_1 t_h = \frac{2h+1}{2}\pi + \eta_h. \tag{9}$$

Der Werth von η_h ist hier nur für die Beurtheilung des Grades der Annäherung von Bedeutung. Setzen wir nämlich das Resultat (8) in die Gleichung (3) ein, so folgt, wenn wir wieder zweite Ordnung vernachlässigen, der von η_h freie Werth:

$$U_h = a_1(-1)^h + a_2 \sin\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\frac{2h+1}{2}\pi - \delta\right). \tag{10}$$

Diesen Ausdruck können wir unformen, indem wir entweder

$$\tau_2 = \nu\tau_1 + \varDelta' \tag{11}$$

oder

$$\tau_2 = (\nu+1)\tau_1 - \varDelta''$$

setzen, worin also $\varDelta' + \varDelta'' = \tau_1$ sein muss und $\varDelta'$ und $\varDelta''$ positiv sein mag.

Ist ν eine ganze Zahl, so sind $\nu\tau_1$ und $(\nu+1)\tau_1$ die Indices derjenigen harmonischen Obertöne des tieferen Tones, welche den höheren Ton direct einschliessen.

Zugleich treten dann Glieder unter dem sinus in (10) hervor, so dass die Periode des zweiten Gliedes variirt. Wir erhalten nämlich

I) falls ν gerade, $= 2\mu$ ist,

die beiden Formen

$$(U_h')_I = a_1(-1)^h + a_2(-1)^\mu \sin\left(\frac{\varDelta'}{\tau_1}\frac{2h+1}{2}\pi - \delta\right),$$
$$(U_h'')_I = a_1(-1)^h + a_2(-1)^{\mu+h} \cos\left(\frac{\varDelta''}{\tau_1}\frac{2h+1}{2}\pi + \delta\right), \tag{12}$$

II) falls ν ungerade, $= 2\mu+1$ ist, die anderen

$$(U_h')_{II} = a_1(-1)^h + a_2(-1)^{\mu+h} \cos\left(\frac{\varDelta'}{\tau_1}\frac{2h+1}{2}\pi - \delta\right).$$
$$(U_h'')_{II} = a_1(-1)^h + a_2(-1)^\mu \sin\left(\frac{\varDelta''}{\tau_1}\frac{2h+1}{2}\pi + \delta\right). \tag{13}$$

Die Periode dieser Ausdrücke, welche wegen der mit h wechselnden Vorzeichen einiger Glieder nicht sofort hervortritt, erkennt man am besten

durch Betrachtung einer schematischen Figur, welche die U_h als Ordinaten über eine Abscisse, auf welcher h (oder t_h) aufgetragen ist, darstellt. Die sämmtlichen Werthe U_h stellen sich dann dar als discrete Punkte zweier gleicher Sinuslinien, deren eine um a oberhalb, die andere um a unterhalb der Abscissenaxe liegt. Bei $(U'_h)_I$ und $(U''_h)_{II}$ besitzen die vertical übereinanderliegenden Punkte gleiche Phase, bei $U_h)_{II}$ und $(U''_h)_I$ um π verschiedene.

Die Periode in Bezug auf t_h ist

$$\text{für } (U'_h)_I \text{ und } (U'_h)_{II} \text{ gleich } 2\,\pi/\Delta'$$
$$\text{für } (U''_h)_I \text{ und } (U''_h)_{II} \text{ gleich } 2\,\pi/\Delta''$$

also übereinstimmend mit der zweier einfacher Töne von den Indices

$$\Delta' = \tau_2 - \nu\tau_1, \quad \Delta'' = (\nu + 1)\,\tau_1 - \tau_2.$$

Wiederum wird diejenige Periode von beiden am hervortretendsten, derjenige Ton am deutlichsten sein, für welchen die grösste Zahl von Werthen U_h innerhalb einer Periode auftritt, und dies ist ersichtlich immer derjenige, für welchen der Index Δ' resp. Δ'' der kleinere ist.

Wenn hierin eine vollständige Analogie zu den Resultaten des vorigen Abschnittes besteht, so findet in anderer Hinsicht eine wichtige Abweichung statt.

Dort ergab sich das Vorhandensein von zwei Arten extremer Werthe U_h, die für sich je eine verschiedene Periode besitzen.

Hier ergibt sich nur eine Art von extremen Werthen, aber sie haben die Eigenschaft, sich als Ordinaten zweier verschiedener Curven mit zwei verschiedenen Perioden ansehen zu lassen. Offenbar liegt hierin ein Moment, welches es dem Ohr erschweren muss, die beiden Perioden gesondert wahrzunehmen.

Dass Herr König unter Umständen beobachtet hat, welche den vorstehend gemachten Voraussetzungen nahe entsprechen, möchte man schon daraus schliessen, dass bei angeschlagenen Stimmgabeln die höheren Töne wegen der inneren Reibung schneller zur Ruhe kommen, als die tieferen, — die Betrachtung der Curven, die er mit seinen Stimmgabeln aufgezeichnet hat, macht es zur Gewissheit. Denn obwohl dieselben natürlich mit möglichst grossen Elongationen, also im Anfang des Zusammenklanges hergestellt sind und kaum das Intervall einiger Secunden umfassen dürften, ist nach dem Ende desselben hin das Eintreten des von uns vorausgesetzten Zustandes, dass der höhere Ton nur die Maxima der Elongationen des tieferen verändert, aber keine neuen hervorbringt, deutlich vorbereitet, bei einigen schon eingetreten, indem nämlich die Kräuselungen der Curven keine Gipfel mehr haben, sondern nur die Gestalt abgerundeter Stufen besitzen.

In der That stimmen alle oben gezogenen theoretischen Folgerungen auf das genaueste mit den von Herrn König gemachten Beobachtungen, was ich des Raumes wegen hier auszuführen unterlassen will.

In den Fällen, die zwischen den oben betrachteten extremen liegen, wird sich ein mittlerer Zustand einstellen. Je mehr die lebendige Kraft des oberen Tones von der Gleichheit mit der des tieferen aus abnimmt, um so mehr müssen die Helmholtz'schen Differenz- und Summationstöne verschwinden und die König'schen hervortreten und umgekehrt.

Damit stimmt überein, dass Herr König in einigen wenigen Fällen neben seinen „Stosstönen" einen von ihnen abweichenden Differenzton gehört hat.

Göttingen, 4. Mai 1890.

Eingesendete Bücher.

Marktanner-Turneretscher. Die Mikrophotographie als Hilfsmittel naturwissenschaftlicher Forschung, Halle a. S., Verlag von W. Knapp, 1890. 344 S. mit 195 Abb. 8 M. Eine vortreffliche Anleitung zur Ausführung mikrophotographischer Untersuchungen nebst aller zugehörigen Manipulationen. Von Werth ist auch die als Anhang gegebene Uebersicht der gesammten einschlägigen Literatur.

Dr. J. M. Eder. Ausführliches Handbuch der Photographie, 2. bis 4. Auflage. Halle a. S., Verlag von W. Knapp. Diese Neuauflage des bekannten Werkes wird in ca. 40 Lieferungen à 1 M. erscheinen, und über 1000 Abb. nebst 5 Tafeln enthalten. Die vorliegende 1. Lieferung enthält die Geschichte der Photographie vom Alterthum bis in unser Jahrhundert.

W. Pfanhauser. Die galvanische Metallplatirung und Galvanoplastik. 3. Aufl. Wien, Verlag von Spielhagen und Schurich 1890. 341 S. mit 85 Abb. 6 M. Da in diesem Werke alle zur Galvanoplastik nöthigen Manipulationen, z. B. Reinigen der Metalloberflächen, Bereitung der Bäder, Poliren etc. genau angegeben sind, so wird dasselbe nicht nur in der grossen Praxis, sondern auch für den Physiker im Laboratorium oft von grossem Nutzen sein.

Register.

Die Zahlenangaben bedeuten Seitenzahlen.


Digitized by Google

